Jednačine sa parametrima - racionalne, iracionalne, eksponencijalne, trigonometrijske, logaritamske

December 8, 2015

Nikola Kovačević
Filip Jekić
Amanda Kuprešanin
Marina Nikolić
Anita Damjanović
Vanja Mihajlović

1. Rešiti jednačinu, u zavisnosti od parametra a:
$\frac{x^2}{x^2-2a^2} = \frac{6a^2}{x^2-a^2}$
Rešenje:
Prvo moramo da gledamo domen. Izraz sa leve strane je definisan ako i samo ako $x^2 - 2a^2 \neq 0$ pa , da bismo ovo rešili, prvo posmatramo $x^2 - 2a^2 = 0$. Kada saberemo sa $2a^2$ i levu i desnu stranu (učenički rečeno, kad prebacimo sa druge strane) imamo $x^2 = 2a^2$ tj. $x = \pm\sqrt{2}a$, (formalno rečeno, umjesto a trebalo bi da stoji $|a|$, ali ovaj $\pm$ znači i $\pm$ iz formule i $\pm$ što se apsolutne vrednosti tiče, nadalje imamo konstantno na umu ovakvu napomenu) pa dakle, za naš slučaj, imamo $x \neq \pm\sqrt{2}a$. Izraz sa desne strane je definisan ako i samo ako $x^2 - a^2 = 0$ tj. ako i samo ako, kada saberemo i levu i desnu stranu sa a^2, važi $x^2 = a^2$ tj. $x = \pm a$. Dakle, za naš slučaj, $x \neq \pm a$. Dakle, sve zajedno, mora biti $x \neq \pm 2a, x \neq \pm a$. Ovo je domen.
Sada pristupamo rešavanju zadatka. Od leve i od desne strane oduzimamo $\frac{6a^2}{x^2-a^2}$, tj. taj razlomak prebacujemo sa leve strane. Sada imamo
$\frac{x^2}{x^2-2a^2} - \frac{6a^2}{x^2-a^2} = 0$
$\frac{x^2(x^2-a^2)-6a^2(x^2-2a^2)}{(x^2-2a^2)(x^2-a^2)} = 0$ i primetimo da u okviru domena izraz sa donje strane jeste uvek različit od nule. Dakle, prethodna jednačina ekvivalentna je sa:
$x^4 - a^2x^2 - 6a^2x^2 + 12a^4 = 0$, kad se ove zagrade izmnože, a ovo dalje sa:
$x^4 - 7a^2x^2 + 12a^4 = 0$
$x^4 - 3a^2x^2 - 4a^2x^2 + 12a^4 = 0$
$x^2(x^2 - 3a^2) - 4a^2(x^2 - 3a^2) = 0$
$(x^2 - 4a^2)(x^2 - 3a^2) = 0$
$x^2 = 4a^2$ ili $x^2 = 3a^2$
$x = \pm 2a$ ili $x = \pm\sqrt{3}a$.

2. U zavisnosti od realnog parametra a rešiti jednačinu:
$\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1$.
Rešenje: Logaritam za osnovu nula nije definisan. Dakle, izbacujemo slučaj $a = 0$. Takodje, logaritam osnove 1 nije definisan. Ali, da bi logaritam od a za proizvoljnu osnovu bio definisan, taj broj a mora biti strogo pozitivan. Nijedan drugi slučaj ne izbacujemo apriori. Naravno, takodje, i x ne može biti nula jer bi drugi logaritam bio sa osnovom nula. Dakle, ako bismo za neku konstantu a imali da je $x = 0$ rešenje, takvu konstantu a morali bi da izbacimo iz traženog skupa. Sada, $\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1$ znači $\frac{\log(x)}{\log(a^2)} + \frac{\log(a)}{\log(x^2)} = 1$, pa imamo $\frac{\log(x)}{2\log(a)} + \frac{\log(a)}{2\log(x)} = 1$, pa imamo $\frac{\log(x)}{\log(a)} + \frac{\log(a)}{\log(x)} = 2$, ali sada ako uvedemo smenu $t = \frac{\log(x)}{\log(a)}$, pri čemu, naravno, $t \neq 0$, pa mora biti $\log(a) \neq 0$ pa mora biti $a \neq 1$, što smo već izbacili, imamo $t + \frac{1}{t} = 2$ tj. imamo $\frac{1+t^2}{t} = 2$ tj. $1 + t^2 = 2t$ tj.

$1 - 2t + t^2 = 0$ tj. $(1-t)^2 = 0$ tj. $1 - t = 0$ tj. $t = 1$. Sada je $\log(x) = \log(a)$ pa je $x = a$(jer je logaritam rastuća funkcija).

3. U zavisnosti od parametra a rešiti jednačinu $\sqrt{4x+a} = 2x - 1$
Rešenje:
Data jednačina je ekvivalentna sistemu: $4x + a = (2x-1)^2, 2x - 1 \geq 0$, tj. sistemu $4x^2 - 8x + 1 - a = 0, x \geq \frac{1}{2}$.
Budući da je diskriminanta jednačine tog sistema nenegativna za $a \geq -3$, taj sistem, a time i data jednačina, pri $a < -3$ nemaju rešenja
Za $a > -3$, jednačina poslednjeg sistema ima rešenja $x_1 = \frac{2-\sqrt{a+3}}{2}$ i $x_2 = \frac{2+\sqrt{a+3}}{2}$, pri čemu je $x_1 < x_2$. Zato data jednačina ima dva rešenja pri onim vrednostima parametra a pri kojima poslednji sistem ima dva rešenja, tj. pri $x_1 \geq \frac{1}{2}$ i $a > -3$.
Na taj način, data jednačina ima dva rešenja ako je $\frac{2-\sqrt{a-3}}{2} \geq \frac{1}{2}$ i $a \geq -3$, tj. ako je $\sqrt{a+3} \leq 1, a \geq -3$. Odatle sledi da mora biti $-3 < a \leq -2$
Data jednačina ima samo jedan koren x_2, ako je $x_1 < \frac{1}{2}$ i $x_2 \geq]frac12$ odnosno ako i samo ako pri $a > -3$ je $\frac{2-\sqrt{a+3}}{2} < \frac{1}{2}$ i $\frac{2+\sqrt{a+3}}{2} \geq \frac{1}{2}$, tj. ako pri $a > -3$ je $\sqrt{a+3} > 1, \sqrt{a+3} \geq -1$. Odatle proizlazi da mora biti $a > -2$
Ako je $a = -3$ onda data jednačina ima jedno rešenje $x = 1$.
Dakle, ako je $a < -3$, data jednačina nema rešenja
ako je $a = -3$ onda je rešenje $x = 1$
ako je $-3 < a \leq -2$, onda rešenja date jednačine čine skup $\{\frac{2-\sqrt{a+3}}{2}, \frac{2+\sqrt{a+3}}{2}\}$
a ako je a¿-2,onda je rešenje $\frac{2+\sqrt{a+3}}{2}$

4. U zavisnosti od parametra $a \in (0,1]$, rešiti jednačinu $(\frac{1+a^2}{2a})^x - (\frac{1-a^2}{2a})^x = 1$
Rešenje:
Ako je $a \in (0,1)$ onda možemo da uvedemo smenu $a = \tan(z)$, gde je $z \in (0, \frac{\pi}{4})$, čime je $\frac{1+a^2}{2a} = \frac{1+\tan^2(z)}{2\tan(z)} = \frac{1}{\sin(2z)}$ i $\frac{1-a^2}{2a} = \frac{1-\tan^2(z)}{2\tan(z)} = \frac{\cos^2(z)-\sin^2(z)}{2\sin(z)\cos(z)} = \frac{\cos(2z)}{\sin(2z)}$, pa se data jednačina može zapisati u obliku $(\frac{1}{\sin(2z)})^x - (\frac{\cos(2z)}{\sin(2z)})^x = 1$, tj. u obliku $1 - (\cos(2z))^x = (\sin(2z)^x$
Jednačina $(\cos(2z))^x + (\sin(2z))^x = 1$ ima očigledno rešenje $x = 2$. Dokažimo da ona nema drugih rešenja.
Naime, za proizvoljno fiksirano $z \in (0, \frac{\pi}{4})$ su $\cos(2z)$ i $\sin(2z)$ pozitivni i manji od 1, pa pri $x > 2$ važe nejednakosti $(\cos(2z))^x < (\cos(2z))^2$ i $(\sin(2z))^x < (\sin(2z))^2$ čime je $(\cos(2z))^x + (\sin(2z))^x < 1$, što je nemoguće.
Ako je $x < 2$, onda je $(\cos(2z))^x > (\cos(2z))^2$ i $(\sin(2z))^x > (\sin(2z))^2$, čime je $\cos(2z))^x + (\sin(2z))^x < 1$, što je nemoguće.

Dakle, za $a \in (0,1)$ jedino rešenje jednačine je $x = 2$. Ako je $a = 1$, onda se data jednačina svodi na jednačinu $(\frac{1+1}{2})^x - (\frac{1-1}{2})^x = 1$, koja je ekvivalentna jednačini $1^x = 1$, čije rešenje je bilo koje $x > 1$.
Dakle ako je $0 < a < 1$,onda je rešenje $x = 2$,
a ako je $a = 1$, onda je rešenje bilo koje $x > 0$.

5. Dokazati identitet: $\log_a x - 4\log_{\frac{1}{a}} x - \log_a x^5 = 0$ gde $a \in R^+ \setminus 1, x \in R^+$.
Ovde koristimo osobine logaritma:
1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $x, y \in R^+, a \in R^+ \setminus 1$
2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - log_a y$ $x, y \in R^+, a \in R^+ \setminus 1$
3) $\log_{a^m} x = \frac{1}{m}\log_a x$ $x \in R^+, a \in R^+ \setminus 1, m$ konstanta
4) $\log_a x^m = m\log_a x$ $x \in R^+, a \in R^+ \setminus 1, m$ konstanta
5) $\log_a 1 = 0$ $a \in R^+ \setminus 1$ $\log_a x - 4\log_{\frac{1}{a}} x - \log_a x^5 =$
$\log_a x - \log_{\frac{1}{a}} x^4 - \log_a x^5 =$
$\log_a x + \underbrace{\log_a x^4 - \log_a x^5} =$
$\log_a x + \log_a \frac{x^4}{x^5} =$
$\underbrace{\log_a x + \log_a \frac{1}{x}} =$
$\log_a x\frac{1}{x} =$
$\log_a 1 = 0.$

6 Ako je $\log_a x = p$, $\log_b x = q$ i $\log_{abc} x = r$, izračunati $\log_c x$.
Polazimo od $r = \log_{abc} x =$
$\frac{1}{\log_x abc} =$
$\frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} =$
$\frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x}}$
kada zamenino odgovarajuće vrednosti iz postavke zadatka dobijemo da je

$r = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{\log_c x}}$, tj.

$r = \frac{pq\log_c x}{q\log_c x + p\log_c x + pq}$

pa je $r(q\log_c x + p\log_c x + pq) = pq\log_c x$,

tj. $r(q + p)\log_c x + rpq = pq\log_c x$

$rqp = (pq - rq - rp)\log_c x$ i na kraju dobijamo da je

$\log_c x = \frac{rpq}{pq-rq-rp}$.

7. Naći p za koje $\cos^2 x - \cos x + p + 1$ ima tačno dva rešenja za $0 \leq x \leq 2\pi$.

   Rešenje: Pošto $\cos x = T$ ima najviše dva realna rešenja u $0 \leq x \leq 2\pi$ za datu konstantu T, imamo tri slučaja:

   (a) $\cos x = t_1$ nema rešenja i $\cos x = t_2$ ima dva rešenja.

   (b) $\cos x = t_1$ ima tačno jedno rešenje i $\cos x = t_2$ ima ima tačno jedno rešenje.

   (c) $\cos x = t_1$ ima dva rešenja i $\cos x = t_2$ nema rešenja.

   Primetimo da

   - $\cos x = T$ nema rešenja u $0 \leq x \leq 2\pi$ ako i samo ako $|T| > 1$.
   - $\cos x = T$ ima tačno jedno rešenje u $0 \leq x \leq 2\pi$ ako i samo ako $T = -1$.
   - $\cos x = T$ ima dva rešenja u $0 \leq x \leq 2\pi$ ako i samo ako $-1 < T < 1$.

   Kako se (2) ne može dogoditi, rešenje je

$$\{p| - 3 - 4p = 0\}$$
$$\cup \left\{p| - 3 - 4p > 0, \frac{1+\sqrt{-3-4p}}{2} > 1, -1 < \frac{1-\sqrt{-3-4p}}{2} \leq 1\right\}$$
$$\cup \left\{p| - 3 - 4p > 0, -1 < \frac{1+\sqrt{-3-4p}}{2} \leq 1, \frac{1-\sqrt{-3-4p}}{2} < -1\right\},$$

   pa je

$$p = -\frac{3}{4} \ \vee\ -3 < p < -1.$$

8. Naći a za koje $(x-a)(\log_4(x-5)-1) = 0$ ima najveći broj realnih rešenja.

   Rešenje: Ako je $(x-a)(\log_4(x-5)-1) = 0$, tada je ili $(x-a) = 0$ ili $\log_4(x-5)-1 = 0$. U prvom slučaju, $x = a$, a u drugom je $\log_4(x-5) = 1$, tj. $x = 9$. Dakle, najveći broj realnih rešenja je za $a \neq 9, a > 5$.

9. Za koje vrednosti parametra a jednačina $\cos(mx + \frac{\pi}{6})\cos(mx - \frac{\pi}{6}) = a$ ima rešenje?
   Rešenje:

Pomoću trigonometrijske transformacije $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ dobija se:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(mx+\frac{\pi}{6}+mx-\frac{\pi}{6})+\cos(mx+\frac{\pi}{6}-mx+\frac{\pi}{6})\right]=a$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(2mx+\frac{\pi}{3})\right]=a$$

Kako je $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, jednačina se svede na oblik

$$\frac{1}{2}\cos 2mx+\frac{1}{4}=a$$

odnosno

$$\cos 2mx=\frac{4a-1}{2}$$

Kako je $\cos x$ funkcija ograničena na $[-1,1]$ dobija se $-1\leq\frac{4a-1}{2}\leq 1$ odnosno $-\frac{1}{4}\leq a\leq\frac{3}{4}$.

10. U kom intervalu leži realan parametar a da bi jednačina

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=a$$

imala koren x koji pripada intervalu $(0,\frac{\pi}{2})$?

Rešenje:

Kako $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ sledi da $\sin x>0$ i $\cos x>0$ pa i $a>0$. Transformacijom jednačine dobija se

$$\frac{\cos x+\sin x}{\cos x\sin x}=a$$

$$\sin x+\cos x=a\sin x\cos x$$

Kvadriranjem poslednje jednakosti dobija se:

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=a^2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$1+2\sin x\cos x=a^2\sin^2 x\cos^2 x$$

Pomoću izometrijske transformacije $2\sin x\cos x=\sin 2x$ uvodi se smena $\sin 2x=t$ pa jednačina dobija oblik:

$$1+t=a^2\frac{t^2}{4}$$

$$a^2t^2-4t-t=0$$

Rešavamo kvadratnu jednačinu po t:

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16a^2}}{2a^2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{4 + 4a^2}}{2a^2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4a^2}}{a^2}$$

Kako je $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ i $\sin x > 0$ za svako x dobijamo da je t pozitivno pa važi:

$$t = \frac{2 + \sqrt{4 + 14a^2}}{a^2} \leq 1$$

Sada nam preostaje samo da rešimo nejednačinu po a.

$$\frac{2 + \sqrt{4 + 4a^2}}{a^2} \leq 1$$

$$2 + \sqrt{4 + 4a^2} \leq a^2$$

$$\sqrt{4 + 4a^2} \leq a^2 - 2$$

Kvadriranjem gornje jednačine dobija se:

$$4 + 4a^2 \leq a^4 - 4a^2 + 4$$

$$8a^2 \leq a^4$$

Parametar a je strogo veći od nule pa ne može biti nula te nejednakost delimo sa a^2

$$8 \leq a^2$$

$$a \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

11. Rešiti jednačinu:
$\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} = \frac{x}{a}; a\neg 0, x\neg 0; a > 0$
Rešenje:
Prvo racionališemo razlomak sa leve strane znaka jednakosti. Proširujemo ga sa $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$.
Dobijamo:
$\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}^2}{a+x-a+x} = \frac{x}{a}$
Kada skratimo a u imeniocu dalje imamo:
$\frac{a+x-2*\sqrt{(a+x)*(a-x)+a-x}}{2*x} = \frac{x}{a}$
$\frac{2*(a-\sqrt{a^2-x^2})}{2*x} = \frac{x}{a}$
Skratimo sa dva, i prebacimo sve na jednu stranu, pa dobijamo:

$\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \frac{x}{a} = 0$
Svedemo na jedan razlomak:
$\frac{a^2-a*\sqrt{a^2-x^2}-x^2}{a*x} = 0$

Izjednacimo brojilac sa nulom, pa dobijamo:
$a^2 - x^2 - a * \sqrt{a^2 - x^2} = 0$
$\sqrt{a^2 - x^2} * (\sqrt{a^2 - x^2} - a) = 0$
Sledi:
$\sqrt{a^2 - x^2} = 0 \quad V \quad \sqrt{a^2 - x^2} - a = 0$
Iz prve jednaįne imamo da je $x = a \ \ V \ \ x = a$.
Iz druge jednacine imamo:
$\sqrt{a^2 - x^2} = a$
$a^2 - x^2 = a^2$
Odakle sledi da je $x = 0$, ali to resenje odbacujemo.

12. Odrediti realan broj p tako da jednačina $(8 * x) + (2^{\frac{1}{p}+7} - 80) * x + 9 = 0$ ima jedinstveno rešenje, $p \neg 0$.

Rešenje:

Da bi kvadratna jednačina imala jedinstveno rešenje, njena diskriminanta mora biti 0.
Dakle:
$(2^{\frac{1}{p}+7} - 80)^2 - 4 * 64 * 9 = 0$
$(2^{\frac{1}{p}})^2 * 2^{14} - 2 * 2^{\frac{1}{p}} * 2^7 * 80 + 6400 - 4 * 64 * 9 = 0$
$(2^{\frac{1}{p}})^2 * 128 * 128 - 2^{\frac{1}{p}} * 128 * 160 + 128 * 32 = 0$
Skratimo sa $128 * 32$ i dobijamo:
$(2^{\frac{1}{p}})^2 * 4 - 2^{\frac{1}{p}} * 5 + 1 = 0$
Uvodimo smenu $2^{\frac{1}{p}} = t$, pa imamo:
$4t^2 - 5t + 1 = 0$
Rešenja ove jednačine su : $t_1 = 1$ i $t_2 = \frac{1}{4} = 2^2$.

$2^{\frac{1}{p}} = t$, pa rešenje t_1 odbacujemo.
Imamo:
$2^{\frac{1}{p}} = 2^2$, Odakle sledi da je $\frac{1}{p} = 2$, pa je $p = \frac{1}{2}$.