VEKTORI

Veličine koje se mogu izraziti brojnom vrednošću nazivamo **skalarima**. Takve su dužina duži, površina kvadrata, zapremina piramide... Postoje veličine koje nije dovoljno izraziti samo brojnom vrednošću. Recimo, nije dovoljno reći da se automobil kreće brzinom od $70\frac{km}{h}$, već je potrebno i reći u kom pravcu i smeru se kreće. Veličine određene ne samo brojnom vrednošću, već i pravcem i smerom nazivamo **vektorima**, odnosno **vektorskim veličinama**. Za označavanje vektora koristimo strelicu: $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB}$...

Jedan od primera vektora predstavlja premeštanje figure u ravni. Premeštanje karakterišu rastojanje, pravac i smer premeštanja. Ako figuru premestimo iz tačke A u tačku B, to premeštanje ćemo predstaviti sa duži usmerenoj od tačke A ka tački B. Ovaj vektor označićemo

sa $\overrightarrow{AB}$.

Intenzitet (dužina, moduo) vektora $\overrightarrow{AB}$ je dužina usmerene duži AB i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$.

Pravac vektora $\overrightarrow{AB}$ je određen pravom AB ili njoj paralelnom pravom.

Smer vektora $\overrightarrow{AB}$ je određen usmerenjem od tačke A ka tački B.

Za dva vektora kažemo da su **kolinearni** ako su predstavljeni usmerenim dužima na jednoj pravoj ili na paralelnim pravama. Kolinearnost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označavamo sa $\vec{a}||\vec{b}$.

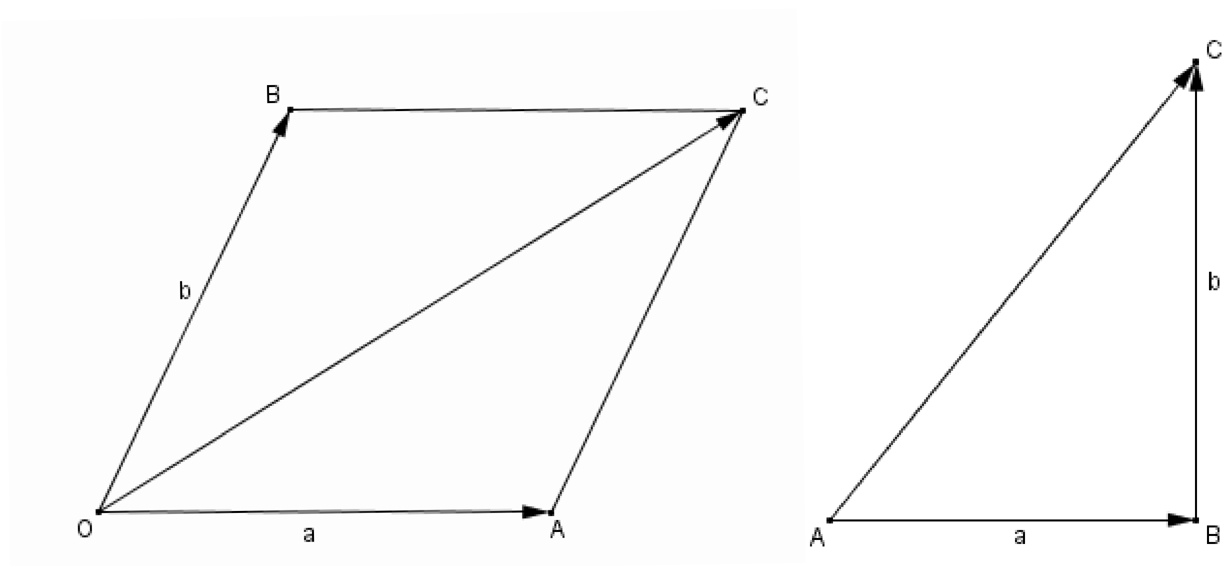
Vektor koji ima isti pravac i intenzitet kao vektor $\vec{a}$, a suprotan smer od smera $\vec{a}$ nazivamo **suprotnim vektorom** vektora $\vec{a}$ i označavamo ga sa -$\vec{a}$.

Vektor čiji je intenzitet jednak 0 nazivamo **nula vektor** i označavamo ga sa $\vec{0}$.

Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su **jednaki** ako imaju iste pravce, intenzitete i smerove.

ZBIR 2 VEKTORA

Neka su dati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i neka je O proizvoljna tačka u prostoru. Ako vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ paralelnim pomeranjem dovedemo u položaj da im je O zajednički početak, tada postoje jedinstvene tačke A i B takve da važi : $\overrightarrow{OA}$=$\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}$=$\vec{b}$. **Zbir** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u oznaci $\vec{a}$ + $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ =$\overrightarrow{OC}$, gde je tačka C teme paralelograma OACB koje je suprotno temenu O.



OSOBINE:

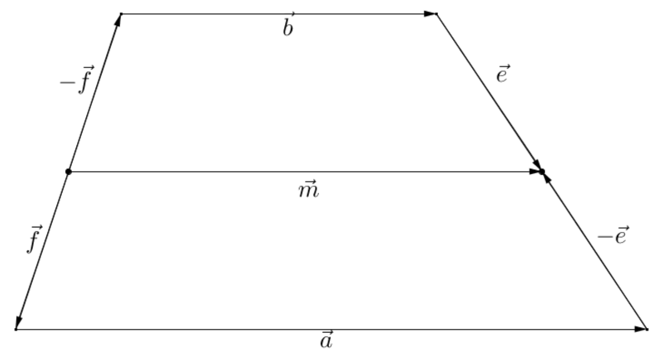
- $\vec{a}$ + ($\vec{b} + \vec{c}$)= $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

1. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori osnovica datog trapeza, a $\vec{m}$ vektor srednje linije, dokazati da je $\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

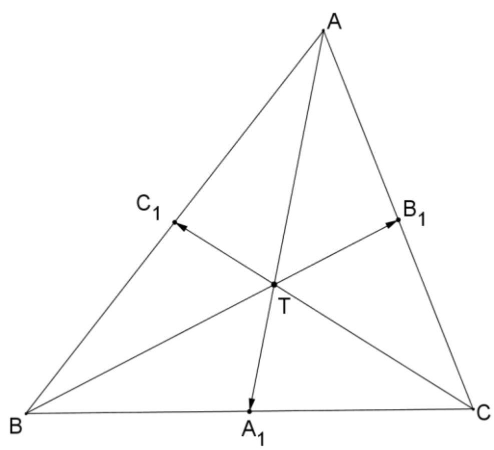
$\vec{m} = -\vec{f} + \vec{b} + \vec{e}$

$\vec{m} = \vec{f} + \vec{a} - \vec{e}$

$2 * \vec{m} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{m} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$



2. Dokazati da ako je T težište trougla ABC, tada je $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$.



$$\overrightarrow{A\overrightarrow{AA_1} =\ C} +\ \overrightarrow{CA_1} =\ \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} +\ \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Sabraćemo ove 3 jednačine.

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{BB_1} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}\right) = \frac{3}{2}\vec{0}$$
$$= \vec{0}$$

Sada ćemo $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}$ pokušati da izrazimo preko $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{BB_1}$.

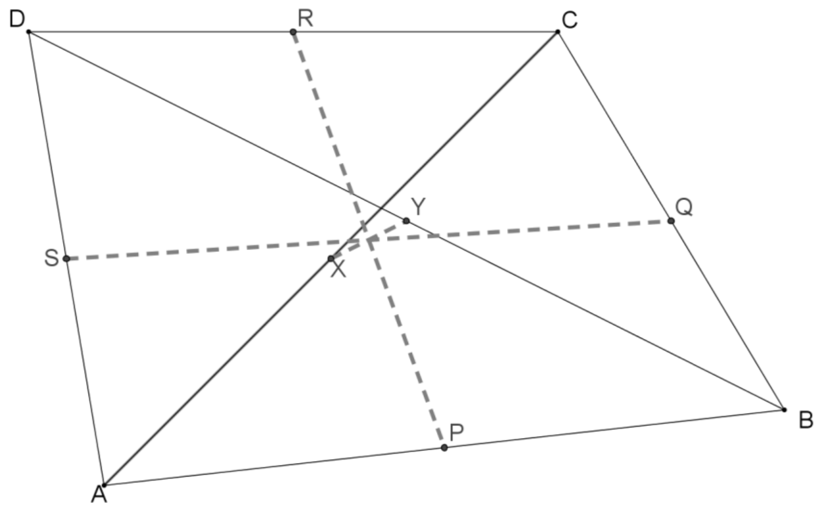
$$\overrightarrow{TA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A}$$

$$\overrightarrow{TB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B_1B}$$

$$\overrightarrow{TC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C}$$

$$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = -\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{BB_1}\right) = -\frac{2}{3} * \vec{0} = \vec{0}$$

3. Ako su A,B,C,D različite tačke i P,Q,R,S,X,Y redom središta duži AB,BC,CD,DA,AC,BD, dokazati da duži PR,SQ i XY imaju zajedničko središte.

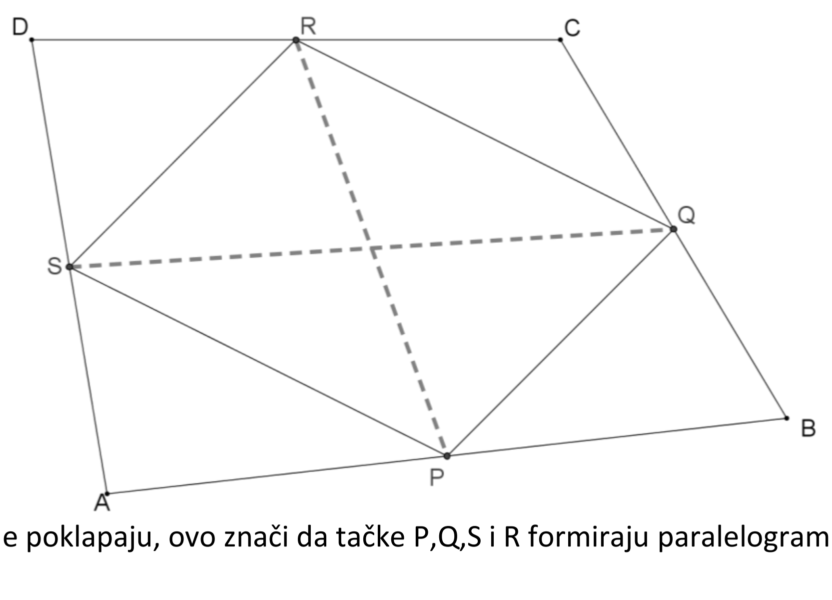


$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{SD} + 2\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{SR}$$

Iz ovoga sledi :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$



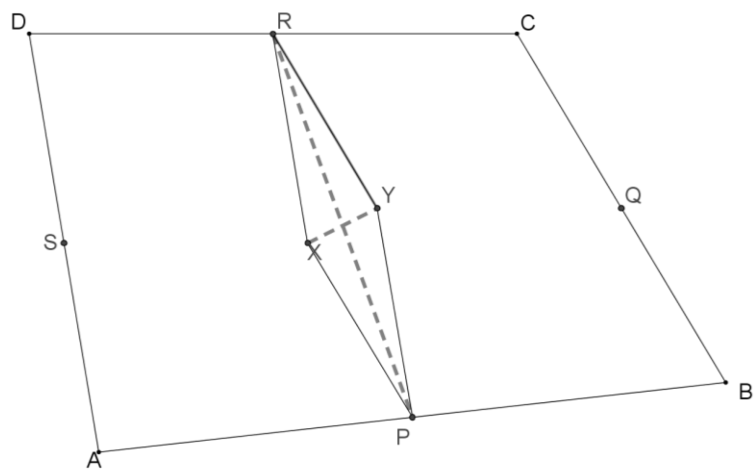
Pošto se ne poklapaju, ovo znači da tačke P,Q,S i R formiraju paralelogram:

Samim tim, dijagonale PR i SQ se polove. Preostaje nam da proverimo XY:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{PX}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{YD} + 2\overrightarrow{DR} = 2\overrightarrow{YR}$$

Vidimo, kao i u prethodnom slučaju, da P,X,Y i R obrazuju paralelogram:



Samim tim, dijagonale XY i PR se međusobno polove, a iz prethodnog znamo da se PR i SQ polove.

Skalarni proizvod

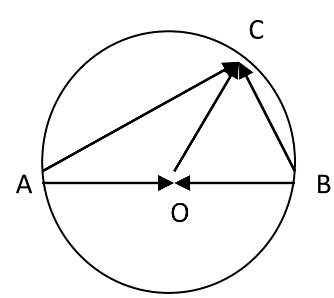
Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ I $\vec{b}$ je realan broj, u oznaci $\overrightarrow{a \cdot b}$ koji se računa:

$$\overrightarrow{a \cdot b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Osobine:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ - komutativnost
2) $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ - množenje skalarom
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ - distributivnost

1. Pokazati da je ugao nad prečnikom kruga prav

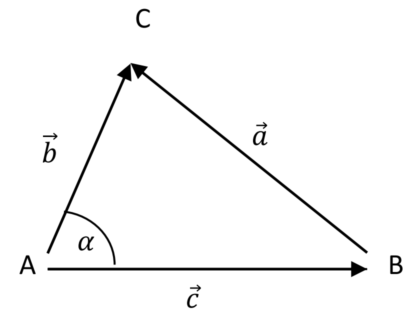


$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = r$$
$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 90° \Leftrightarrow cos\sphericalangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 0$$
$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|cos\sphericalangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 0$$
$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\overrightarrow{BC} = 0$$

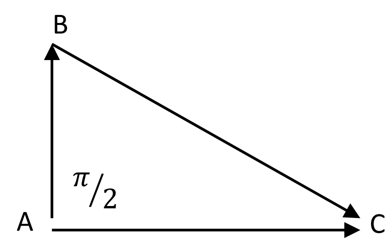
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} =$
$-\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = -r^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} + r^2 = \overrightarrow{OC} \cdot$
$(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}) = \overrightarrow{OC} \cdot (-\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BO}) = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{0} = 0$

2. Primenom vektora dokazati kosinusnu teoremu



$\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$
$|\vec{c}| = c, |\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b$
Iz zbira: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$
$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}\vec{c}$
$|\vec{a}||\vec{a}|cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{b}||\vec{b}|cos\sphericalangle(\vec{b}, \vec{b}) - 2|\vec{b}||\vec{c}|cos\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) + |\vec{c}||\vec{c}|cos\sphericalangle(\vec{c}, \vec{c})$
$|\vec{a}||\vec{a}|cos0 = |\vec{b}||\vec{b}|cos0 - 2|\vec{b}||\vec{c}|cos\alpha + |\vec{c}||\vec{c}|cos0$
$|\vec{a}||\vec{a}|1 = |\vec{b}||\vec{b}|1 - 2|\vec{b}||\vec{c}|cos\alpha + |\vec{c}||\vec{c}|1$
$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|cos\alpha$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$

3. Primenom vektora dokazati Pitagorinu teoremu



$|\overrightarrow{AB}| = a, |\overrightarrow{AC}| = b, |\overrightarrow{BC}| = c$
Iz zbira: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$
$|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BC}|cos\sphericalangle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC})$
$= |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AC}|cos\sphericalangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) - 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
$+ |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AB}|cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})$
$|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BC}|cos0 = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AC}|cos0 - 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|cos\frac{\pi}{2} + |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AB}|cos0$
$|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BC}|1 = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AC}|1 - 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|0 + |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AB}|1$
$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$
$c^2 = b^2 + a^2$

VEKTORSKI PROIZVOD

Vektorski proizvod je binarna operacija na dva vektora u trodimenzionalnom Euklidskom prostoru koja rezultira drugim vektorom koji je normalan na ravan koja sadrži dva početna vektora.

Vektorski proizvod se definiše na sledeći način:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \vec{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \vec{k}(a_1b_2 - a_2b_1) =$$

$$\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Osobine vektorskog proizvoda:

1. Vektorski proizvod nije komutativan:
   $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. Ukoliko je vektorski proizvod jednak nuli, znači da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ortogonalni.
3. $k(\vec{a} \times \vec{b}) = k\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times k\vec{b}$
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Intenzitet vektorskog proizvoda dva vektora jednak je površini paralelograma konstruisanog nad istim vektorima. P = $|\vec{a} \times \vec{b}|$

1. Koristeći vektorski proizvod dokazati sinusnu teoremu za trougao u ravni.

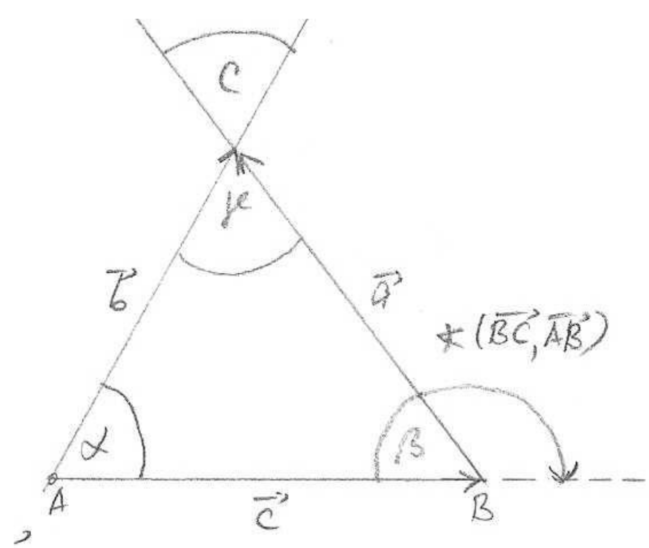
$\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = \vec{a}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{c}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{BC}| \sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}) \\ &= |\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{BC}| \sin 0 = \vec{0}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} / \times \overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BC} \times (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{0} \Rightarrow\end{aligned}$$



$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AB}$

$|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{AC}|\sin(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}) = |\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{AB}|\sin(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB})$

$|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{AC}|\sin\gamma = |\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{AB}|\sin(\pi-\beta)$

$|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{AC}|\sin\gamma = |\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{AB}|\sin\beta \ /\dfrac{1}{|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$

$\dfrac{\sin\alpha}{c} = \dfrac{\sin\gamma}{b}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} / \times \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \times \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Rightarrow$

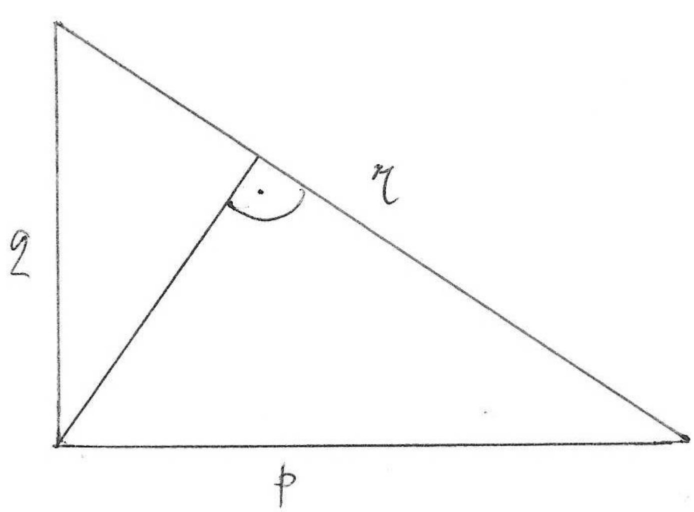
$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC}$

$|\overrightarrow{AC}|\left|\overrightarrow{AB}\right|(-\sin\alpha) = -|\overrightarrow{AC}|\left|\overrightarrow{BC}\right|\sin\gamma \ /-\dfrac{1}{|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$

$\dfrac{\sin\alpha}{c} = \dfrac{\sin\gamma}{a}$

$\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{c} = \dfrac{\sin\beta}{b}$

2. Dve stranice trougla su $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ i $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b}$, gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ normalni ortovi. Izračunati visinu prema trećoj stranici trougla.



$\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$; $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

$\vec{a} \perp \vec{b}$

$$P = \frac{1}{2}|\vec{p} \times \vec{q}| = \frac{1}{2}\left|\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 4\vec{b}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|2(\vec{a} \times \vec{a}) - 8\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + 3\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) - 12\left(\vec{b} \times \vec{b}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-8\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + 3\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|-11\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right| = \frac{1}{2} * 11\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

$$= \frac{11}{2}|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{11}{2}$$

$\vec{r} = \vec{p} - \vec{q} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{a} + 4\vec{b} = \vec{a} + 7\vec{b}$

$\vec{r}^2 = \left(\vec{a} + 7\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 + 49\left|\vec{b}\right|^2 + 14|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| = 1 + 49 = 50$

$|\vec{r}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$$P = \frac{r * h}{2}$$

$$\frac{11}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}h$$

$$h = \frac{11}{5\sqrt{2}}$$

Mešoviti proizvod

Mešoviti proizvod tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$je broj koji se dobija po formuli: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Ako vektore zapišemo preko koordinata: $\vec{a}$ = (a_1,a_2,a_3), $\vec{b}$= (b_1,b_2,b_3), $\vec{c}$ = (c_1,c_2,c_3), mešoviti proizvod ova tri vektora je determinanta:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

1. Odredi zapreminu tetraedra čija su temena: A = (2,-3,5), B= (0,2,1), C = (-2,-2,3), D = (3,2,4).

$\overrightarrow{AD}$= (1,5,-1), $\overrightarrow{AC}$ = (-4,1,-2), $\overrightarrow{AB}$ = (-2,5,-4)

Det =$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$= |-36|= 36; $V = \frac{1}{6}$*Det = 6

2. Zapremina tetraedra je 5. Tri njegova temena su A = (2,1,-1), B = (3,0,1), C=(2,-1,3). Naći četvrto teme ako se zna da je ono na y-osi.

Četvrto teme D je na y-osi, dakle ima oblik D = (0,y,0).

$\overrightarrow{AB}$= (1,-1,2) $\overrightarrow{AC}$ = (0,-2,4) $\overrightarrow{BC}$ = (-2,y-1,1)

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix}$ = |-4y + 2|

Zapremina tetraedra je jednaka šestini mešovitog proizvoda vektora koji razapinju taj tetraedar:

$5 = \frac{1}{6} |-4y + 2|$

$30 = |-4y + 2| \Rightarrow 30 = -4y + 2 \wedge -30 = -4y + 2$

D=(0,-7,0) ∧ D=(0,8,0)

Dvostruki vektorski proizvod

Dvostruki vektorski proizvod je zapravo vektorsko množenje primenjeno dva puta za redom, tj. ima oblik $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

Važi:

1) Rezultat dvostrukog vektorskog proizvoda je vektor $\vec{z} = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
2) $\vec{z} = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ = $(\vec{u} \cdot \vec{w})x \times -(\vec{v} \cdot \vec{w}) \times \vec{u}$ ←**Lagranžova formula**
3) Zbog antikomutativnosti vektorskog proizvoda važi: $\vec{z} = \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \times \vec{w}$ = $-\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})$ pa važi
$\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{w}\right) + \vec{v} \times \left(\vec{w} \times \vec{u}\right) + \vec{w} \times \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = 0$ ←**Jakobijeva formula**

Primer:

Koje uslove treba da ispunjavaju vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ čiji su intenziteti različiti od 0, da bi važilo $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a}$?

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ = $(\vec{a} \cdot \vec{c}) \times \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \times \vec{a}$ pa $\vec{a}$ treba biti ortogonalan na $\vec{c}$ (da bi im skalarni proizvod bio nula), a $(\vec{b} \cdot \vec{c})$ = -1 .

1. Tri tačke su date vektorima $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$,$\vec{r}_3$ u odnosu na neku tačku O. Odredi uslov koji treba da ispunjavaju vektori $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$,$\vec{r}_3$ da bi tačke bile kolinearne.

Potrebno je da važi: $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 = 0$.

Vektori su linearno nezavisni ako se jedan ne može izraziti kao linearna kombinacija ostalih. Na pravoj postoji tačno jedan, u ravni tačno dva, a u prostoru tačno tri linearno nezavisna vektora.

2. Ako su vektori $\vec{u}, \vec{v}$ linearno nezavisni, pokazati da su i $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ takođe linearno nezavisni.

Pretpostavimo suprotno. Neka su $\vec{u}, \vec{v}$ linearno nezavisni, ali $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ linearno zavisni. To znači da se $\vec{u} \times \vec{v}$ može izraziti kao linearna kombinacija prva dva, tj.

$\vec{u} \times \vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

Pomnožimo ovo skalarno sa $\vec{u} \times \vec{v}$.

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \alpha\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) + \beta\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \alpha[\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}] + \beta[\vec{v}, \vec{u}, \vec{v}]$

$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = 0$ tj. $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$ što je kontradikcija, jer bi moralo biti

$|\vec{u}| = 0$ ili $|\vec{v}| = 0$ ili $\sin(\measuredangle \vec{u}, \vec{v}) = 0$ što je nemoguće jer ovi vektori postoje i linearno su nezavisni (nisu kolinearni pa sinus ugla između njih ne može biti nula).

Vektori u fizici

Kao što je već rečeno mnoge veličine se mogu opisati brojnom vrednošću – površina zida, zapremina čaše, masa slona... Te veličine zovemo skalarima. Međutim mnoge veličine pored brojne vrednosti se opisuju i pravcem i smerom. Neke od njih su brzina, ubrzanje, sila... U ovom odlomku govorimo više o brzini i sili:

Brzina

Brzina kretanja jednog tela zavisi od promene njegovog položaja u odnosu na druga tela.

Primer: Brzina kretanja voza u odnosu na čoveka koji ga čeka na stanici nije ista brzini voza u odnosu na čoveka koji putuje u njemu.

Telo u odnosu na koje određujemo kretanje zove se referentno telo. Ako referentnom telu dodamo i sistem koordinata, tada taj sistem zovemo referentni sistem.

Brzina je jedna od veličina koja zavisi od izbora referentnog sistema. Neka je jedan referentni sistem nepokretan, dok se drugi referentni sistem kreće brzinom $\vec{u}$, a brzina tela koje se kreće, u odnosu na pokretni referentni sistem, je $\vec{v}$. Tada je brzina tela u odnosu na nepokretni referentni sistem:

$$\vec{w}=\vec{u} \times \vec{v}$$

Ove oznake ćemo nastaviti koristiti u nastavku teksta.

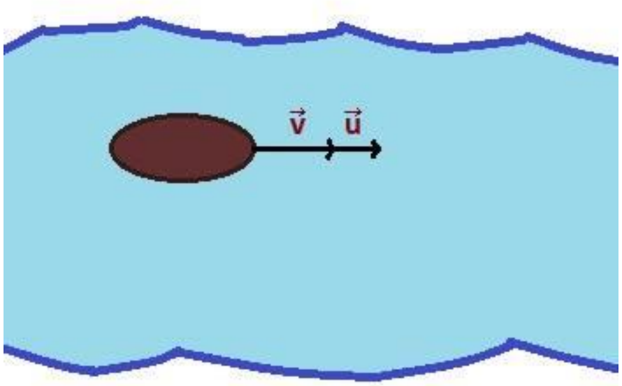
1. Brzina reke je 3km/h, a brzina čamca u odnosu na reku je 4km/h. Kolika je brzina čamca u odnosu na obalu ako:

a) se čamac kreće nizvodno, paralelno sa obalama?

b) se čamac kreće uzvodno, paralelno sa obalama?

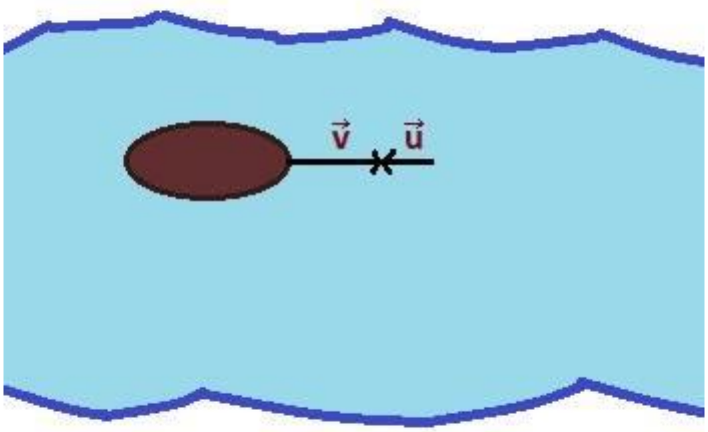
c) čamac drži kurs u pravcu normale na obale?

a) Kako su vektori $\vec{v}$i $\vec{u}$ istog pravca i smera, intenzitet vektora $\vec{w}$ dobijamo njihovim sabiranjem.



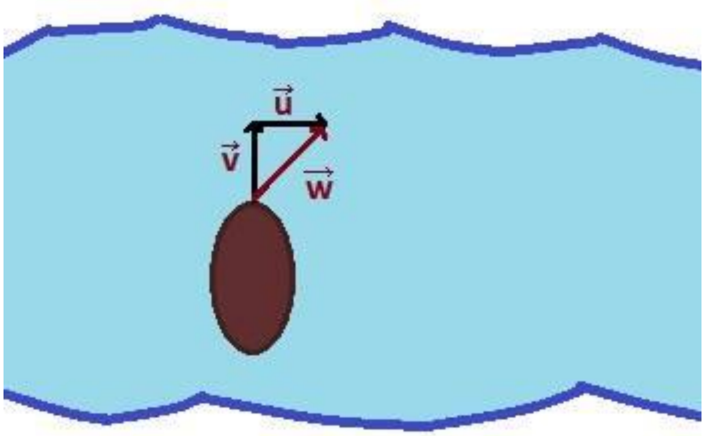
Intenzitet vektora $\vec{w}$je 7km/h.

b) Kako su vektori $\vec{v}$ i $\vec{u}$istog pravca ali različitih smerova, intenzitet vektora $\vec{w}$dobijamo njihovim oduzimanjem.



Intenzitet vektora $\vec{w}$je 1km/h.

c) Pravci vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nisu isti, pa ćemo intenzitet vektora $\vec{w}$ dobiti primenom Pitagorine teoreme.



Intenzitet vektora $\vec{w}$ je 5km/h.

2. Duž istog pravog puta kreću se Jugo i džip. Jugo ima brzinu od 75km/h dok se džip kreće brzinom od 50km/h. Kolika je brzina Juga u odnosu na džip ako:

a) se kreću u istom smeru?

b) kreću se jedno drugom u susret?

Rešenje: Moramo primetiti da su nam u ovom zadatku date brzine $\vec{w}$ i $\vec{u}$.Treba naći brzinu tj. intenzitet vektora $\vec{v}$. Iz formule za računanje vektora $\vec{w}$ dobijamo: $\vec{v}$ = $\vec{w}$ - $\vec{u}$.

a)

Intenzitet vektora $\vec{v}$, računom po formuli, je 25km/h.

b)(Na slici je prikazan model juga koji nesrećom nikad nije dospeo na tržište ☺)

Kako su smerovi vektora $\vec{w}$ i $\vec{u}$ različiti, intenzitetvektora $\vec{v}$ je zapravo zbir vektora $\vec{w}$ i $\vec{u}$ ($|\vec{v}|$ = $|\vec{w}$ - (-$\vec{u}$)$|$ = $|\vec{w} + \vec{u}|$) i dobijamo brzinu od 125km/h.

Sila

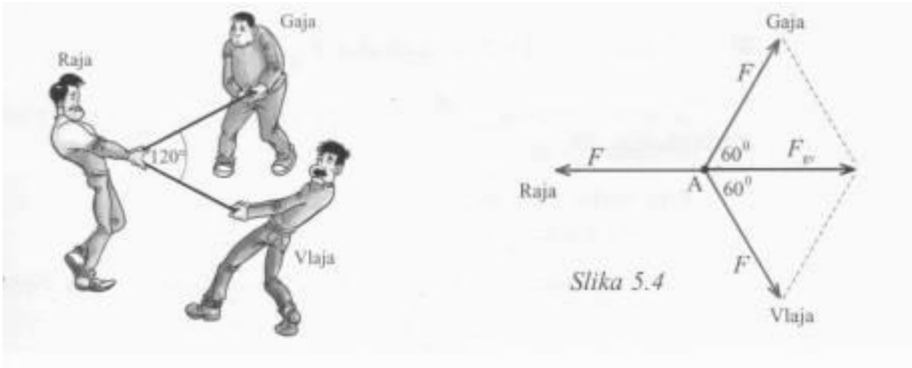
Rezultantna sila je sila pod čijim bi se dejstvom telo kretalo isto kao kada se ono kreće pod dejstvom više pojedinačnih sila koje na njega deluju istovremeno:

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_n$

Pridatak (primer i zadatak u jednom!):

Raja, Gaja i Vlaja vuku neistegljivo uže istim silama (slika). Ugao između delova užeta koje vuku Ivica i Marica je 120°. Hoće li Raja povući Gaju i Vlaju ili će Gaja i Vlaja povući Raju?

Rešenje:



Slika 5.4

Na slici 5.4 prikazano je slaganje sila: u tački A užeta (gde vuče Raja) deluju tri jednake sile $\vec{F}$. Rezultantna sila koju stvaraju Gaja i Vlaja je sila $\vec{F}_{gv}$. Ta sila je dijagonala romba. Kako su uglovi romba 60° i 120° dijagonala romba jednaka je njegovim stranicama tj. intenzitet vektora $\vec{F}_{gv}$jednak je intenzitetu vektora $\vec{F}$. Dakle rezultantna sila kojom vuku uže Gaja i Vlaja jednaka je sili kojom Raja vuče uže pa samim tim trojica momaka neće se pomeriti.