Univerzitet u Beogradu,
Matematički fakultet

Seminarski rad iz metodike nastave matematike i računarstva

Sličnost trouglova i primene

Autori:
Aleksandra Obradović
Aleksandra Radulović
Milica Pješčić
Mirjana Stefanović
Sanja Milenković
Jelena Smiljković

Mentor:
dr Nebojša Ikodinović

14. decembar 2015

1 Uvod

Ako su date duži a, b, k gde je k jedinična duž, i ako je $a = mk$, $b = nk$, tada količnik $m : n$, odnosno $\frac{m}{n}$, nazivamo razmerom duži a i b, što označavamo sa $a : b = m : n$, odnosno $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Definicija 1 *Preslikavanje P_k ravni α na samu sebe, koje svake dve tačke A, B prevodi u tačke $A_1B_1 = k * AB$, gde je k dati pozitivan broj, naziva se **transformacijom sličnosti** (ili kratko **sličnošću**) sa koeficijentom k*

Stavovi sličnosti trouglova 1 *Neka su $\triangle SAA_1$ i $\triangle S_1BB_1$ dva trougla. Svaki od navedenih uslova je potreban i dovoljan da važi $\triangle SAA_1 \sim \triangle S_1BB_1$.*

1. $$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{SA}{S_1B} = \frac{SA_1}{S_1B_1}$$

2. $$\angle A = \angle B, \angle A_1 = \angle B_1$$

3. $$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{SA}{S_1B}, \angle A = \angle B.$$

Primena sličnosti na posebne slučajeve 1 *Pod posebnim slučajevima se misli na posebne slučajeve trouglova.*

1. *Svaka dva jednakostranivcna trougla su slična.*
2. *Dva jednakokraka trougla su slična ako imaju jednake uglove naspam osnovica.*
3. *Dva jednakokraka trougla su slična ako im je razmera osnovica jednaka razmeri krakova.*
4. *Svaka dva jednakokrako pravougla trougla su slična.*
5. *Dva pravougla trougla su slična ako su im katete proporcionalne.*
6. *Dva pravougla trougla su slična ako im je razmera hipotenuza jednaka razmeru jednog para kateta.*

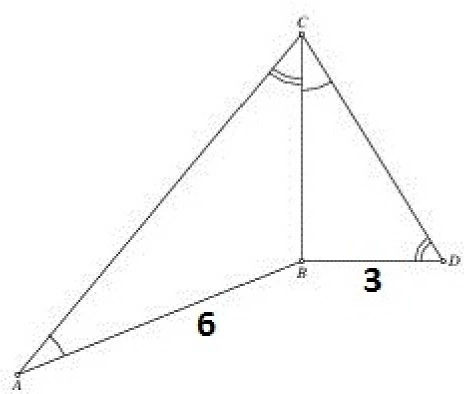
2 Zadaci

1. Dat je trougao sa stranicama 0.8, 1.2, 1.4. Odrediti stranice sličnog trougla obima 136.

   Resenje:
   a=0.8
   b=1.2
   c=1.4
   O_1=136
   a_1, b_1, c_1=?
   $\frac{O_1}{O} = k \Leftrightarrow \frac{0.8+1.2+1.4}{136} = k \Leftrightarrow k = \frac{1.7}{68}$
   $\frac{a}{a_1} = k \Leftrightarrow \frac{0.8}{a_1} = \frac{3.4}{136} \Leftrightarrow a_1 = \frac{136*0.8}{3.4} \Leftrightarrow a_1 = 32$
   $\frac{b}{b_1} = k \Leftrightarrow \frac{1.2}{b_1} = \frac{3.4}{136} \Leftrightarrow b_1 = \frac{136*1.2}{3.4} \Leftrightarrow b_1 = 48$
   $\frac{c}{c_1} = k \Leftrightarrow \frac{1.4}{c_1} = \frac{3.4}{136} \Leftrightarrow c_1 = \frac{136*1.4}{3.4} \Leftrightarrow c_1 = 56$

2. Ako su dati trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle CBD$ takvi da je $AB = 6$ i $BD = 3$ i $\angle CAB = \angle BCD, \angle ACB = \angle BDC$, odrediti dužinu zajedničke stranice BC datih trouglova.

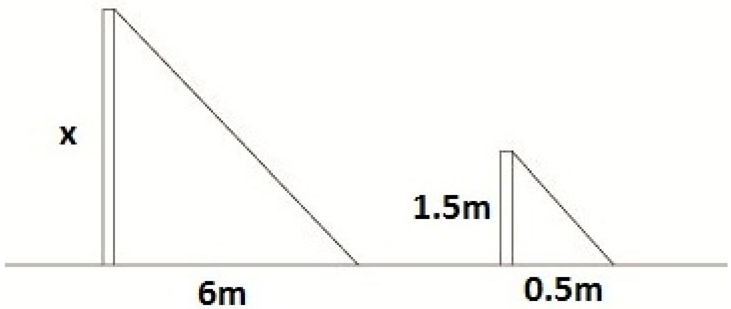
   Resenje:
   $AB : BC = BC : BD$ $6 : BC = BC : 3 \Rightarrow BC^2 = 18 \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$



Sad jedan zadatak koji se stalno sreće po zbirkama, a može da posluži i kao odgovor na pitanje gde ću u životu koristiti sličnosti.

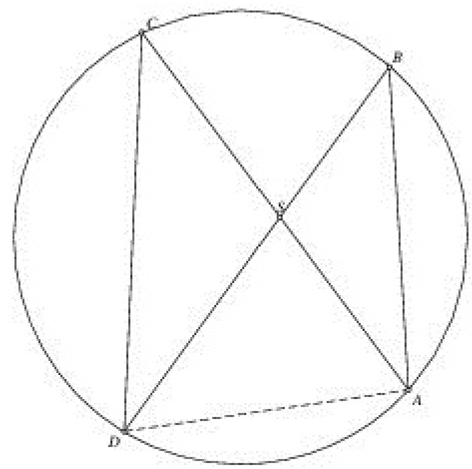
3. Marko je visok 1.5m i stoji pored jarbola koji je ortogonalana na vodoravnom pločniku. U jednom trenutku dužina senki Marka i jarbola su 0.5m i 6m, redom.Odrediti visinu tog jarbola.

Resenje:
$x : 1.5 = 6 : 0.5$
$x = \frac{6*1.5}{0.5}$
$x = 18m$



4. Dokazati da su slični trouglovi $\triangle ABS$ i $\triangle CDS$ gde je S proizvoljna tačka unutrašnjosti kruga kao na slici.

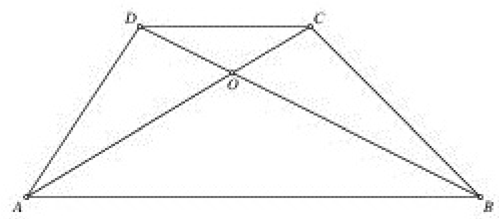
Resenje:



$\angle ASB = \angle CSD$ (unakrsni uglovi)
$\angle ABD = \angle ACD$ (periferijski uglovi nad istim lukom AD)
Odavde $\Rightarrow \triangle ABS \sim \triangle CDS$

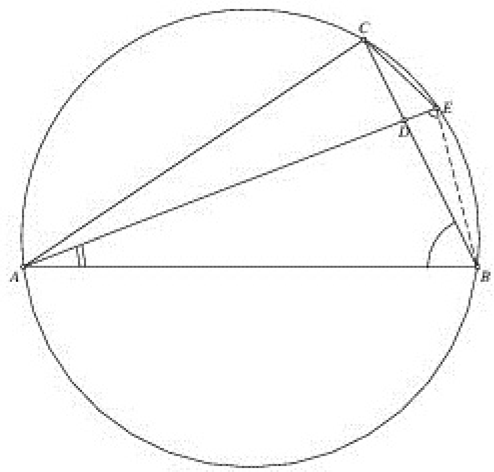
5. Dat je trapez $ABCD$ kod koga je $AB \parallel CD$. Neka je O presek dijagonala AC i BD. Dokazati da su trouglovi $\triangle OAB$ i $\triangle OCD$ slični.

Resenje:
$AB \parallel CD$
$\triangle OAB \sim \triangle OCD$ (dokazati)
$\angle OAB = \angle OCD$ i $\angle OBA = \angle ODC$ jer su to uglovi na transverzali.
$\Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OCD$



6. Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ kod koga je $AB = AC$. Prava l koja sadrži tačku A seče pravu BC u tački D, a opisani krug u tački E.Dokazati da je $AB^2 = AD * AE$

Resenje:
$\angle AEB = \angle ACB$ (periferijski uglovi nad istim lukom AB)
$\angle ABD = \angle AEB$ (periferijski nad AB)
$\angle BAE = \angle DAB$ (isti ugao, tj. A, D, E su kolinearne)
$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ADB$
$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}$ (iz sličnosti sledi proporcionalnost stranica).



7. Dužine stranica pravougaonika su $a = 5$ i $b = 2$. Odrediti stranice sličnog pravougaonika čiji obim i površina imaju jednake merne brojeve.

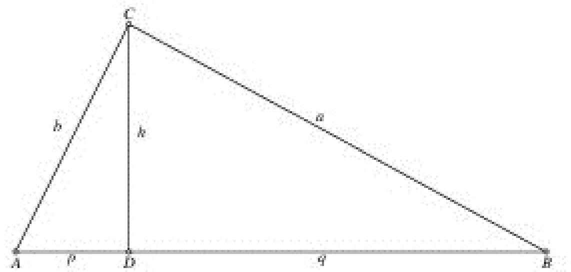
   Resenje:
   $a = 5, b = 2, P_1 = O_1$
   $a_1, b_1 = ?$
   Iz sličnosti $\Rightarrow \frac{a_1}{5} = \frac{b_1}{2} = k$
   $a_1 = 5k, b_1 = 2k$
   $P_1 = O_1 \Leftrightarrow a_1 b_1 = 2(a_1 + b_1)$
   $5k * 2k = 2 * 7k \Rightarrow k = \frac{7}{5}$
   $a_1 = 5 * \frac{7}{5} = 5$
   $b_1 = 2 * \frac{7}{5} = \frac{14}{5}$.

Pre nego što pređemo na zadatke koji su zapravo primena sličnosti na pravougli trougao, napravićemo kratak teorijski uvod. Pravougli trouglovi $\triangle ADC$ i $\triangle BCD$ (slika)su slični međusobom i slični sa datim trouglom $\triangle ABC$ ($\angle ACD = \angle CBD = \beta$), pa važe proporcije (Euklidovi stavovi).

1. $p : h_c = h_c : q$, tj. $h_c^2 = pq$, odnosno $h_c = \sqrt{pq}$
2. $b : p = c : b$, tj. $b^2 = pc$, odnosno $b = \sqrt{pq}$
3. $a : q = c : a$, tj. $a^2 = qc$, odnosno $a = \sqrt{qc}$
4. Pitagorina teorema: $a^2 + b^2 = c^2$

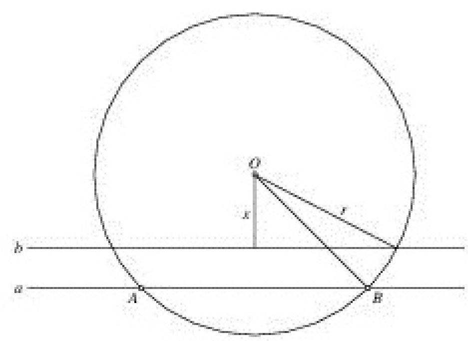
Sad prelazimo na zadatke. Prvi zadatak glasi:

1. Krug je presečen dvema paralelnim pravama koje su na međusobnom odstojanju 3cm i nalaze se sa iste strane središta kruga. Te prave određuju



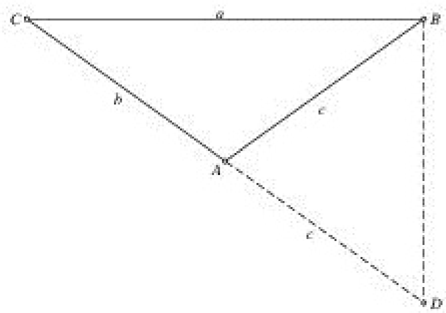
tetive dužine 18cm i 24cm. Izračunati dužinu r poluprečnika kruga.

Resenje:
$r^2 = x^2 + 12^2$
$r^2 = (x + 3)^2 + 9^2$
$x^2 + 144 = x^2 + 6x + 90$
$6x = 54 \Rightarrow x = 9$
$r = \sqrt{9^2 + 12^2}$
$r = 15cm$



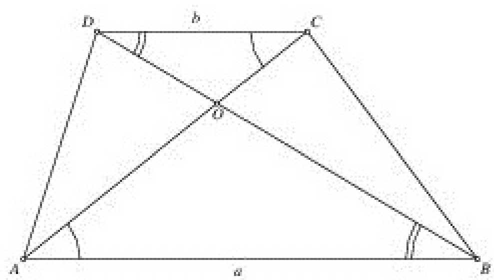
2. Dokazati da, ako za dužine stranica a, b, c trougla važi relacija $a^2 = b^2 + bc$, tada za odgovaraju'ce uglove važi da je $\alpha = 2\beta$.

   Resenje:
   $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta$
   $a^2 = b^2 + bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle BCD$
   $\wedge \angle BAC = \angle CBA + \angle DBA$
   $\angle DBA = \angle ADB$
   $\Rightarrow \alpha = 2\beta.$



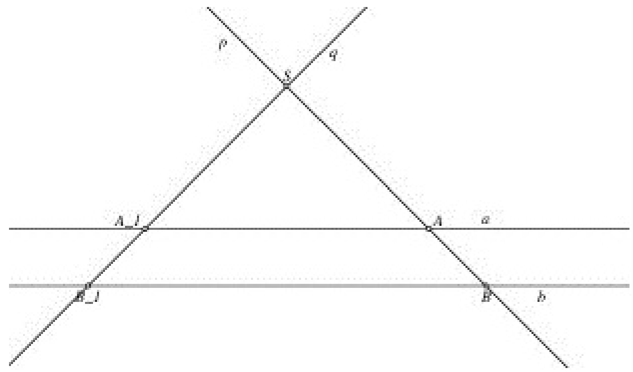
3. Osnovice trapeza ABCD su $AB = a$ i $CD = b$. Odrediti u kom odnosu dijagonala AC deli dijagonalu BD.

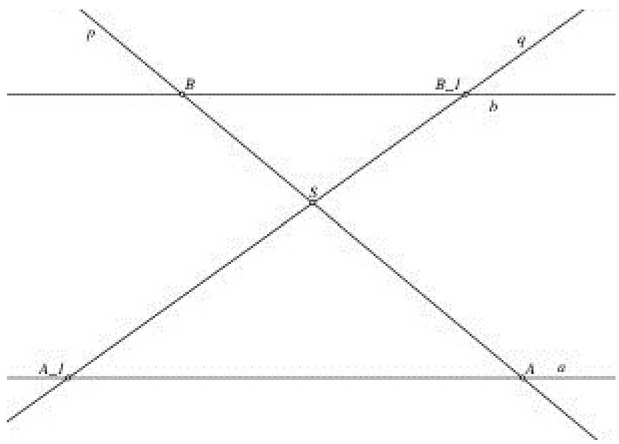
   Resenje:
   $AB \parallel CD$ (1)
   $\angle OAB = \angle OCD$ (2)
   $\angle OBA = \angle ODC$ (3)
   $(1), (2), (3) \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OCD$
   $\Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b}$.



Za sledeći zadatak nam je neophodna *Talesova teorema* koja glasi:

> **Talesova teorema 1** *Ako su paralelne prave a i b transverzale pravih p i q i ako je* $p \cap q = \{S\}, a \cap p = \{A\}, a \cap q = \{A_1\}, b \cap p = \{B\}, b \cap q = \{B_1\}, tadaje$
>
> $$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{SA}{SB} = \frac{SA_1}{SB_1} = k$$
>
> *gde je k koeficijent sličnosti trouglova* $\triangle SAA_1$ *i* $\triangle SBB_1$

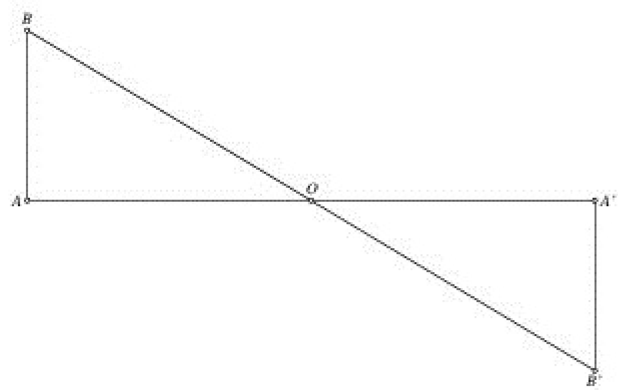




Čovek po kome teorema nosi ime je Tales iz Mileta. Ne zna se da li je rođen u Miletu, ali se zna da je nakon proterivanja iz Fenicije živeo u Miletu. Takođe, ne možemo pouzdano da tvrdimo ni kada je rođen. Prema nekim izvorima rođen je 640.p.n.e, a prema nekim drugim 624.p.n.e.
Tales se sa geometrijom susreo u Egiptu i preneo je u Grčku. Proklo piše da se geometrija razvila baš u Egiptu iz potrebe čestog premeravanja zemljišta nakon poplava, koje su uništavale međe između poseda. U istom delu Proklo Talesu prepisuje 5 teorema elementarne geometrije:

(a) da prečnik polovi krug;
(b) da su uglovi na osnovici jednakokrakog trougla jednaki;
(c) da su naspramni uglovi koje formiraju dve prave koje se seku jednaki;
(d) da je ugao upisan u polukrug prav;
(e) da je trougao određen jednom stranicom i uglovima naleglim na nju.

Tales je ove teoreme dokazivao empirijski, ali se on smatra ocem grčke matematike. Nažalost ništa od Talesovih tekstova niti izvora iz te epohe nije sačuvano, pa je teško oceniti njegova stvarna dostignuća. Jedna od anegdota tvrdi da je Tales znao da izmeri visinu piramide. Kako je on to uradio. Sačekao je doba dana kada je naša senka jednaka našoj visini i onda je izmerio duzinu senke piramide, koja je zapravo jednaka njenoj visini. Takođe, se tvrdi i da je znao da izračuna udaljenost broda na pučini. Evo kako. Neka je A položaj posmatrača na obali i B položaj usidrenog broda na morskoj pučini. Krećući se od tacke A u pravcu upravnom na AB, Tales je, došavši do tačke O nastavio da se kreće u istom pravcu do tačke A', takve da je $AO = OA'$. Zatim se kretao u pravcu upravnom na AA' prateći kada će njegov položaj biti na pravoj OB i iz podudarnosti trouglova $\triangle AOB$ i $\triangle A'OB'$ sledi da je $AB = A'B'$



Ima još mnogo anegdota o Talesu. Recimo, kada su ga pitali zašto nema decu, rekao je

> jer volim decu

Ali to je za časove filozofije. Zadatak u kojem ćemo primeniti Talesovu teoremu je sledeći:

4. Dat je trapez $ABCD$, kod koga je $AB \parallel CD$ i tačka E na duži AD, takva da važi $\frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}$. Neka prava koja sadrži tačku E i paralelna je sa AB seče duž BC u tački F. Dokazati da je $EF = \frac{m*CD+n*AB}{m+n}$.

   Resenje:
   $AC \cap EF = \{S\}$
   $\Rightarrow \frac{ES}{DC} = \frac{AE}{AD} = \frac{m}{m+n}, \frac{SF}{AB} = \frac{CS}{AC} = \frac{DE}{AD} = \frac{n}{n+m}$
   $EF = ES + SF = \frac{m}{m+n}CD + \frac{n}{n+m}AB = \frac{mCD+nAB}{m+n}$.