Математички факултет у Београду

Геометрија - стереометрија

материјали за вежбе из методике

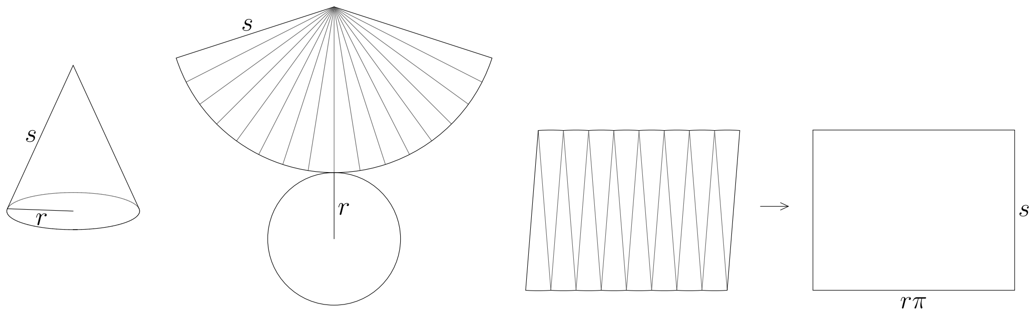
Студенти:

Вељко Панић 88/2011
Бојана Јевтић 67/2011
Милан Павловић 63/2011
Ивана Марковић 66/2011
Јована Јовановић 70/2011
Јована Недељковић 40/2011
Александар Нешовановић 1/2011

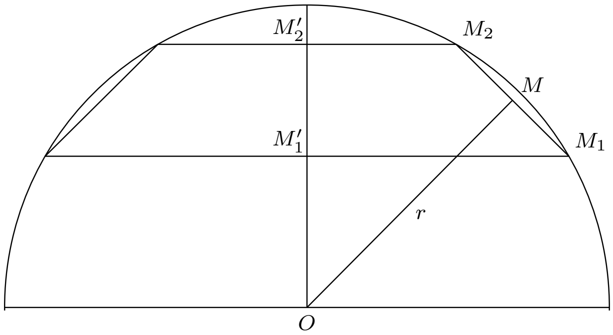
У Београду, децембар 2014.

1 Увод

Претпоставимо да су радници при крају изградње цркве, остаје само купола да се покрије. Руководилац радова је кренуо у набавку, али да не би потрошио превише новца потребно је да му кажу колика је тачно површина омотача купе која је модел куполе. Притом знају да ће 6% материјала пропасти на градилишту (задатак 3). Радници знају полупречник основе и дужину изводнице. Уколико не знају образац за површину омотача купе, наш савет би им био да размишљају на следећи начин. Означимо изводницу са s и полупречник основе са r. Како бисмо извели образац за површину омотача купе, развијмо га у мрежу и исецкајмо као на слици. Затим их сложимо као на другој слици. Добијамо фигуру која подсећа на паралелограм. Када број делова тежи бесконачности, фигура тежи правоугаонику са страницама s и $r\pi$, па је површина омотача $sr\pi$.



Мотивација за наредно разматрање биће нам задатак 6. Наиме, нека је дата сфера полупречника r и тачкасти извор светлости на удаљености s од сфере. Треба наћи површину сфере која је осветљена. Одмах видимо да се задатак своди на рачунање површине калоте. Уколико знамо образац за то, задатак решавамо у два реда (види решење задатка 6), а уколико не знамо, морамо се мало помучити да дођемо до њега. Нека је сфера $S(O,r)$ пресечена равни α и тако је добијена калота висине h. Пресецимо калоту равнима паралелним равни α на $n-1$ зону и једну калоту, тако да у равном пресеку кроз центар сфере, нормалном на те равни, одговарајуће праве деле кружни лук на $2n$ једнаких лукова. Површина сваке зоне је приближно једнака површини омотача зарубљене купе, чије су основе пресечни кругови. На слици је дат осни пресек, лук M_1M_2 описује зону, а сечица M_1M_2 омотач купе, њихова пројекција на висину калоте је $M_1'M_2'$. M_1M_1' и M_2M_2' су полупречници основа зарубљене купе. Тачка М је средиште лука M_1M_2. Нека је $\measuredangle MOM_1' = \alpha$ и $\measuredangle M_1OM = \varphi$. Тада је површина омотача зарубљене купе

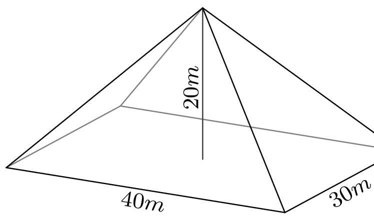


$$P = \pi(M_1M_1' + M_2M_2')M_1M_2 = \pi(r\sin(\alpha+\varphi) + r\sin(\alpha-\varphi))\frac{M_1'M_2'}{\sin\alpha}$$

$$= \pi(2r\sin\alpha\cos\varphi)\frac{M_1'M_2'}{\sin\alpha} = 2\pi\cos\varphi M_1'M_2'$$

Када саберемо све такве површине добијамо $2\pi rh\cos\varphi$. Повећавајући број зарубљених купа, смањујемо φ , па процењујемо да је површина калоте баш $2\pi rh$. Површина зоне висине h је разлика површина две калоте висиа h_0 и $h_0 - h$. Тада је површина зоне $P = 2\pi rh_0 - 2\pi r(h_0 - h) = 2\pi rh$. Површина сфере је дупло већа него површина полусфере, што је калота висине r, $P = 2(2\pi rr) = 4\pi r^2$.

Замислимо сада следећу ситуацију: Треба да поставимо вентилациони систем у зграду облика пирамиде, па нам треба њена запремина. Знамо да је основа те пирамиде правоугаоник дужине $40m$ и ширине $30m$, а да је висина пирамиде $20m$. Наравно, ако знамо образац за израчунавање запремине пирамиде, само треба у њега да убацимо одговарајуће бројеве. Претпоставимо, међтим, да немамо тај луксуз, да нико пре нас није извео образац за израчунавање запремине пирамиде, а нама је то веома битно за наш тренутни проблем. Немамо другог избора, већ сами морамо да га изведемо. Да бисмо било шта извели, неопходно је да имамо нешто од чега бисмо почели. Претпоставимо зато, неколико ствари.



Прво, ако квадар има странице дужина a, b и c, онда је његова запремина $V = abc$.

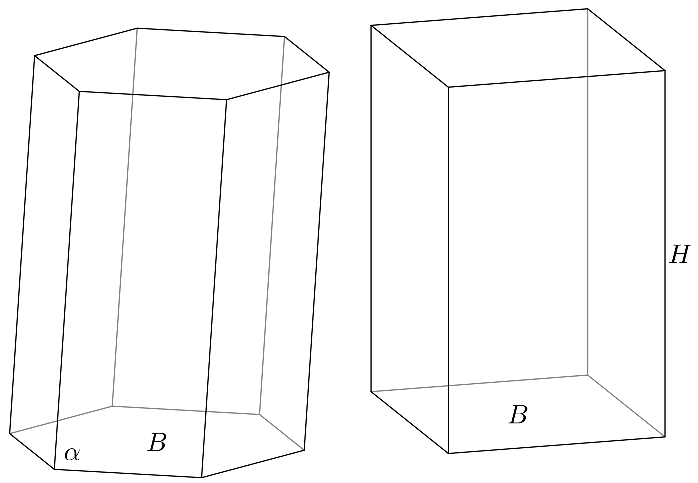
Друго (Кавалијеријев принцип), нека су дата два тела Φ_1 и Φ_2 и раван α. Ако су површине пресека сваке равни паралелне равни α са Φ_1 и Φ_2 једнаке, онда Φ_1 и Φ_2 имају једнаке запремине.

Треће, запремина тела се не мења при изометријским трансформацијама, тј. како год да неко тело сместимо у простору, његова запремина остаје иста.

Четврто, запремина два тела једнака је збиру њихових запремина (ако је њихов пресек мере 0, или интуитивно, ако се секу највише по површи).

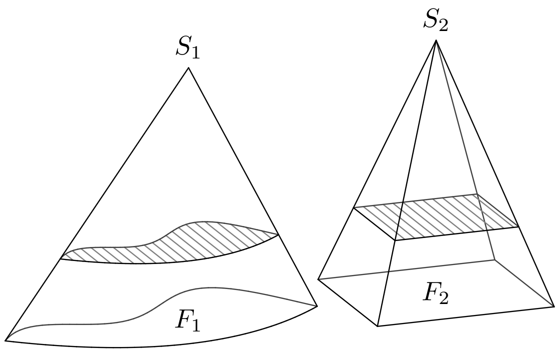
Наравно, не треба ово превише строго посматрати, тиме се бави теорија мере, а кога занима, може наћи више о томе у литератури за курс Анализа 3а. Посматрајмо сада мало детаљније Кавалијеријев принцип. Он нам даје довољан услов када су два тела једнаких запремина. Можемо се запитати да ли је и неопходан. Одговор је негативан, а пример два тела једнаких запремина код којих не можемо испунити услове Кавалијеријевог принципа препуштамо читаоцима. Такође, читаоцима препуштамо да сами дефинишу и аналогно тврђење у равни, тј. када две фигуре у равни имају једнаке површине. Сада, када смо поставили основу за даље изучавање, можемо да кренемо са рачунањем запремина конкретних тела.

Почнимо најпре од призме. Нека призма има основу B и висину H (са B и H ћемо означавати и површину основе и дужину висине). Нека је α раван једне од основа призме. Конструишимо



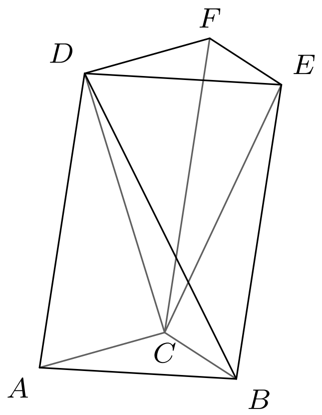
квадар висине H и основе B коме основа лежи у равни α. Такав квадар постоји, јер у равни α постоји правоугаоник (бесконачно много њих, заправо) површине B. Тада призма, квадар и раван α испуњавају услове Кавалијеријевог принципа, јер је пресек сваке равни паралелне равни α са призмом и квадром или празан, или подударан њиховим основама, па призма и квадар имају једнаке запремине, тј. за призму важи $V = BH$. Аналогно се доказује и да је запремина ваљка $V = BH$, ако је B основа, а H висина ваљка.

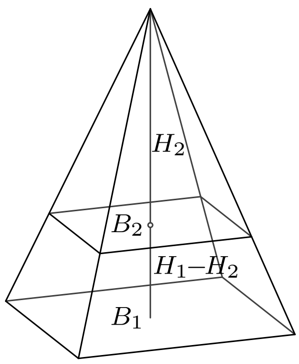
Посматрајмо сада, раван α и две фигуре једнаких површина B у тој равни. Нека су то фигуре F_1 и F_2. Нека су S_1 и S_2 са исте стране и на растојању H од равни α и нека су Φ_1 и Φ_2 тела која се добијају спајањем F_1 и S_1 као и F_2 и S_2. Тако добијена тела Φ_1 и



Φ_2 су „пирамиде" са основама F_1 и F_2 и врховима у S_1 и S_2, редом. Нека је раван β паралелна равни α и на растојању h од врхова „пирамида". Пресек равни β са $\Phi_1(\Phi_2)$ можемо видети и као слику од $F_1(F_2)$ при хомотетији са центром у $S_1(S_2)$ и коефицијентом $\frac{h}{H}$. Тада су површине одговарајућих пресека једнаке $B \cdot \frac{h^2}{H^2}$, јер се при хомотетији са коефицијентом k површине мењају сразмерно са k^2. Ово захтева доказ (који није лак и биће изостављен), али је интуитивно јасно да се дужине мењају сразмерно са k, површине сразмерно са k^2, а запремине сразмерно са k^3. Сада, према Кавалијеријевом принципу, Φ_1 и Φ_2 имају једнаке запремине, па видимо да запремина „пирамиде" зависи само од површине базе и висине. Како запремина пирамиде не зависи од облика базе, већ само од њене површине, можемо посматрати само тростране пирамиде. Нека је $ABCD$ пирамида. Допунимо је до призме $ABCDEF$. Тада пирамиде $ABCD$ и $BCDE$ имају заједничку висину из темена C, а површине одговарајућих основа ABD и BDE су једнаке, јер су троуглови $\triangle ABD$ и $\triangle BDE$ половине паралелограма $ABED$.

Дакле, пирамиде $ABCD$ и $BCDE$ имају једнаке запремине. Слично, пирамиде $BCDE$ и $CDEF$ имају једнаке запремине. Како је призма $ABCDEF$ унија те три пирамиде, запремина сваке пирамиде је трећина запремине призме, па је специјално $V_{ABCD} = \frac{1}{3}P_{ABC} \cdot H_D$, где је P_{ABC} површина троугла $\triangle ABC$, а H_D висина из темена D. Како запремина пирамиде не зависи од облика базе, запремина пирамиде са основом B и висином H је $V = \frac{B \cdot H}{3}$. Напоменимо да је и купа један специјалан случај „пирамиде”, па и за њу важи исти образац. Сада, када смо извели образац за израчунавање запремине пирамиде, можемо га искористити да израчунамо запремину зграде са почетка. База је била правоугаоник страница $30m$ и $40m$, а висина је била $20m$. Површина базе је $B = 30m \cdot 40m = 1200m^2$, па је запремина $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{1200m^2 \cdot 20m}{3} = 8000m^3$.

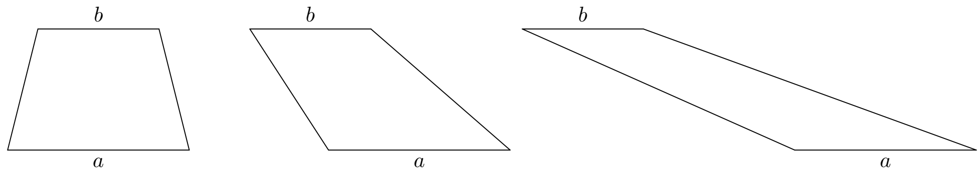




Сада можемо да израчунамо запремину зарубљене пирамиде (или купе) као разлику запремина двеју пирамида. Нека су површине основа те зарубљене пирамиде B_1(већа) и B_2(мања) и висина H. Допунимо зарубљену пирамиду до пирамиде. Тако добијамо две пирамиде, једну са базом B_1(већу) и другу са базом B_2(мању). Нека су H_1 и H_2 одговарајуће висине. Тада важи $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^3$ и $\frac{B_1}{B_2} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^3$, где су V_1 и V_2 запремине одговарајућих пирамида. Тада је запремина зарубљене пирамиде $V = V_1 - V_2 = V_1\left(1 - \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3\right) = V_1\left(1 - \frac{H_2}{H_1}\right)\left(1 + \frac{H_2}{H_1} + \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2\right) = V_1\left(\frac{H_1 - H_2}{H_1}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} + \frac{B_2}{B_1}\right) = \frac{V_1}{B_1 \cdot H_1}(H_1 - H_2)(B_1 + \sqrt{B_1 \cdot B_2} + B_2) = \frac{1}{3}H(B_1 + \sqrt{B_1 \cdot B_2} + B_2)$

Сада можемо решити следећи проблем: Ако је P површина, а V запремина полиедра чије све пљосни додирују сферу полупречника r, доказати да важи $V = \frac{1}{3}Pr$. Ово је 18. задатак, па га нећемо радити сада, али ће нам резултат овог задатка бити потребан у каснијем раду.

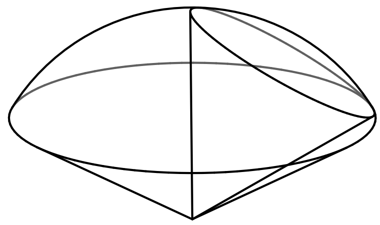
Примену Кавалијеријевог принципа можемо видети и у следећем проблему: Трапез ротира око веће основице a, а затим око мање основице b. Однос запремина тако насталих обртних тела је $m : n$. Израчунати $a : b$ (19. задатак). Овде је највећи проблем то што не знамо како изгледа тај трапез. На слици су приказане разне могућности за изглед трапеза. Кавалијеријев принцип нам

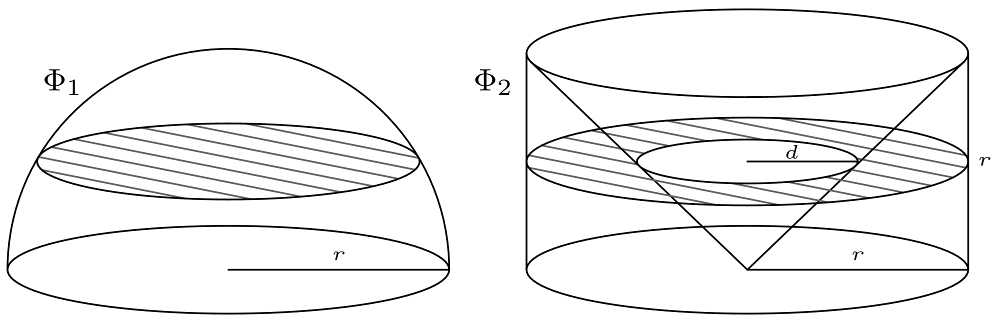


овде може помоћи да видимо да запремина обртног тела зависи само од a, b и H, где је H висина трапеза, а не и од изгледа трапеза. Поставимо два трапеза са основицама a и b и висине H тако да основице дужине a леже на истој правој. Означимо са s праву која садржи основице дужине a, а са Φ_1 и Φ_2 тела која настају ротацијом одговарајућих трапеза око s. Тада је пресек сваке праве паралелне правој s са Φ_1 једнаке дужине као и пресек са Φ_2, па је према Кавалијеријевом принципу за површине у равни, површина пресека сваке равни паралелне правој s са Φ_1 и Φ_2 једнака. Међутим, сада можемо да применимо Кавалијеријев принцип за запремине (за раван α из услова Кавалијеријевог принципа можемо да изаберемо било коју раван паралелну правој s), па видимо да Φ_1 и Φ_2 имају једнаке запремине. Дакле, не морамо да бринемо о изгледу трапеза који ротирамо, па можемо да изаберемо онај изглед који нам највише одговара (за однос који се добије за $a : b$ погледати решење 19. задатка).

Није тешко видети шта се добија ротацијом троугла, квадрата, правоугаоника или трапеза, па онда није проблем ни израчунати запремину тако добијених ротационих тела. Међтим, постоје и комплекснији објекти које можемо ротирати. Тако, на пример, можемо да поставимо питање колика је запремина тела које се добија ротацијом купе око једне изводнице (у 20. задатку се тражи баш то за конкретну купу). Да бисмо израчунали запремину тако добијеног тела, неопходно је прво да одредимо о ком се телу уопште ради. У овом тренутку препоручујемо читаоцима да застану на тренутак и размисле које се тело добија, пре него што наставе са читањем текста. Ако обрнемо купу и поставимо осу ротације усправно (као на слици), можемо видети да се добија лоптин исечак.

Када смо одредили о ком се телу ради, сада можемо да изведемо формулу за израчунавање запремине. Да бисмо то урадили, израчунајмо прво запремину лоптиног одсечка. Посматрајмо полулопту Φ_1 полупречника r и ваљак чија је основа круг полупречника r и висина r, тако да се основе полулопте и ваљка налазе у равни α (као на слици). Исецимо купу из ваљка, тако да је основа купе уједно и основа ваљка, али она основа која није у равни α, а врх купе је центар друге основе ваљка. Тако добијамо тело Φ_2. Нека је раван β паралелна равни α, на растојању d од α $(0 \leq d \leq r)$. Пресек равни β и полулопте Φ_1 је круг полупречника $\sqrt{r^2 - d^2}$, па је његова површина $\pi(r^2 - d^2)$. Пресек равни β и тела Φ_2 је кружни прстен спољног полупречника r, а унутрашњег полупречника d, па је његова површина $\pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$, па према Кавалијеријевом принципу тела Φ_1 и Φ_2 имају једнаке запремине, тј. запремина полулопте је $V = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^3$.





Запремина лоптиног одсечка је разлика запремина одговарајућег ваљка и зарубљене купе. Висина ваљка једнака је висини H лоптиног одсечка, па је његова запремина $V_1 = \pi r^2 H$. Висина зарубљене купе је такође једнака H, полупречник једне основе је r, а друге $r - H$, па је запремина зарубљене купе $V_2 = \frac{H}{3}(\pi r^2 + \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi(r-H)^2} + \pi(r-H)^2) = \frac{H}{3}(\pi r^2 + \pi r(r-H) + \pi(r-H)^2) = \frac{\pi H}{3}(r^2 + r^2 - rH + r^2 - 2rH + H^2) = \frac{\pi H}{3}(3r^2 - 3rH + H^2) = \pi r^2 H - \pi r H^2 + \frac{\pi H^3}{3}$. Одавде добијамо да је запремина лоптиног одсечка висине H и полупречника r $V_{LO} = V_1 - V_2 = \pi H^2 \left(r - \frac{H}{3}\right)$. Запремина лоптиног исечка једнака је збиру запремина одговарајућег лоптиног одсечка и купе висине $r - H$ и полупречника основе $\sqrt{r^2 - (r-H)^2}$. Када се израчуна, добије се да је запремина лоптиног исечка $V_{LI} = \frac{2}{3}\pi r^2 H$.

На крају овог уводног дела, посматрајмо следећи проблем: Око лопте полупречника r описана је купа код које је угао између висине и изводнице 30°. Ако са P означимо површину, а са V запремину те купе, израчунати $\frac{V}{P}$. Ако читалац израчуна ово, и притом не погреши у рачуну, требало би да добије да је $\frac{V}{P} = \frac{r}{3}$. Може исто питање да се постави, уколико се уместо купе, око лопте опише ваљак. Резултат је исти. То не би требало да нас изненади, ако се присетимо резултата 18. задатка. Купу можемо произвољно добро апроксимирати „описаним” пирамидама. Те пирамиде додирују лопту сваком својом пљосни, а из резултата 18. задатка знамо да за њих важи $\frac{V}{P} = \frac{r}{3}$. Слично, ваљак можемо апроксимирати „описаним” призмама. И генерално, за свако тело које произвољно добро можемо апроксимирати полиедрима (и површину и запремину), тако да свака пљосан тог полиедра додирује лопту ће важити $\frac{V}{P} = \frac{r}{3}$. Напоменимо да је веома битно да свака пљосан полиедра додирује лопту. Пример када то не важи је полулопта. Лопта уписана у њу има полупречник дупло мањи од полулопте, али за полулопту не важи $\frac{V}{P} = \frac{r}{3}$, где је r полупречник уписане лопте. Како апроксимације полиедрима нису строго уведене, у задацима се препоручује израчунавање тог односа за конкретно тело (у 21. задатку је то купа, а у 22. зарубљена купа).

2 Задаци

1. Нека је дат кружни ваљак и на његовом омотачу две тачке A и B. Наћи најкраћи пут од тачке A до тачке B такав да садржи тачку са основе ваљка. Дозвољено је кретати се само по површини ваљка.

2.Нека је дата јединична коцка $ABCDA'B'C'D'$ и на једној њеној страници тачка M. Наћи најкраће растојање од тачке M до темена коцке. Дозвољено је кретати се само по омотачу коцке.

3. Радници треба да покрију кров црепом. Кров је купа полупречника $8m$ и изводнице $12m$. Колико црепа је потребно да се покрије кров, ако знамо да 6% материјала пропадне.

4. Дата је сфера полупречника r и тачкасти извор светлости на удаљености s од сфере. Наћи површину сфере која је осветљена.

5. Дат је конвексан полиедар у који се може уписати сфера, а чије су пљосни могу обојити са две боје тако да су сваке две пљосни са заједничком ивицом обојене различитим бојама. Доказати да збир површина пљосни обојених једном бојом једнак збиру површина пљосни обојених другом бојом.

6.Полупречник основе купе је $6dm$, а висина $18dm$. У купу је насута вода која досеже до половине висине купе. Докле ће досезати ако се купа окрене врхом наниже?

7. Раван сече бочне ивице правилне четворостране пирамиде у тачкама A,B,C,D које се налазе, редом, на удаљености a,b,c,d од врха пирамиде. Доказати да важи $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

8. Чаша облика ваљка висине H и полупречника основе r до врха је напуњена водом, и важи релација $H>2r$. Колико ће воде остати у чаши ако се нагне за угао од $\pi/4$?

9. Конструисан је пресек косе призме, чија је бочна ивица дужине l, једном равни нормалном на бочне ивице призме.
а) Ако је обим пресека p, наћи површину омотача призме.
б) Ако је површина пресека Q, наци запремину призме.

10. Дате су правилна тространа пирамида и правилна тространа призма. Темена основе призме су средишта ивица основе пирамиде, а висина пирамиде је три пута мања од висине призме. Који део запремине призме се налази ван пирамиде?

11. У коцку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ уписана је четворострана пирамида основе $ABCD$ са врхом A_1. Ако је површина уписане пирамиде 1, наћи површину коцке.

12. Основе зарубљене пирамиде имају површине B и B_1. Кроз средиште висине конструисана је раван паралелна основама. Наћи површину добијеног пресека.

13. Пирамида чија је основица правоугаоник са страницама a и b, једнаких бочних ивица, пресечена је једном равни паралелно основи на два дела једнаких запремина. Одредити растојање врха пирамиде од равни пресека.

14. Основа праве призме је правоугли троугао обима $2s$ са оштрим углом α. Израчунати површину омотача призме ако је познато да се у њу може уписати лопта.

15. Одредити максималну вредност односа запремине лопте и око ње описане купе.

16. Израчунати површину омотача пирамиде ако је површина њене основе Q, а углови диедра при основи су φ.

17. Основе зарубљене пирамиде су два правилна осмоугла, један ивице $0,4m$ и други ивице $0,3m$; висина зарубљене пирамиде је $0,5m$. Колика је запремина одговарајуће потпуне пирамиде?

18. Ако је P површина, а V запремина полиедра чије све пљосни додирују сферу полупречника r, доказати да важи $V = \frac{1}{3}Pr$.

19. Трапез ротира око веће основице a, а затим око мање основице b. Однос запремина тако насталих обртних тела је $m : n$. Израчунати $a : b$.

20. Купа код које је угао између изводнице и висине 30° ротира око једне своје изводнице. Израчунати запремину тако добијеног тела ако је дужина изводнице s.

21. Доказати да је однос запремина лопте и око ње описане купе једнак односу њихових површина.

22. Доказати да је однос запремина лопте и око ње описане зарубљене купе једнак односу њихових површина.

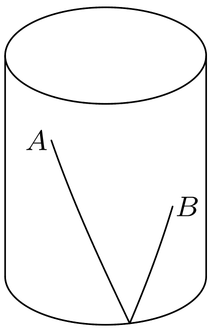
23. Ако је O произвољна унутрашња тачка конвексног полиедра Ω са једнаким пљоснима (једнаких површина), доказати да је збир одстојања те тачке од равни свих његових пљосни константан.

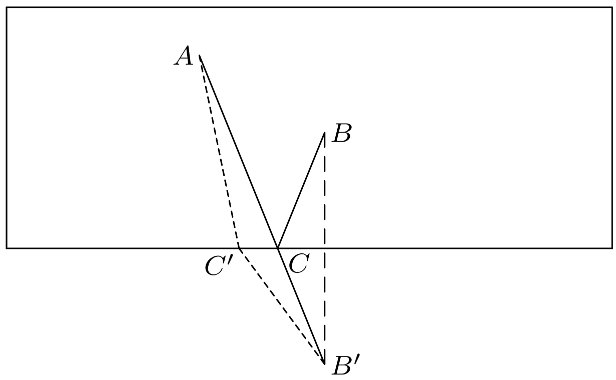
24. Ако су h_a, h_b, h_c, h_d висине тетраедра $ABCD$ и d_a, d_b, d_c, d_d одстојања произвољне тачке O, која се налази у том тетраедру, од равни BCD, CDA, DAB, ABC, доказати да је:

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} + \frac{d_d}{h_d} = 1$$

3 Решења

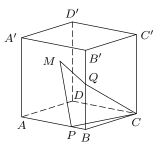
1. Нека је C тачка са основе ваљка коју путања мора да садржи. Она се очигледно налази на граници основе. Задатак решавамо тако што развијемо ваљак у мрежу. Уочимо тачку B' симетричну тачки B у односу на границу основе.
Пресек дужи AB' и границе основе је управо тачка C, а тражени

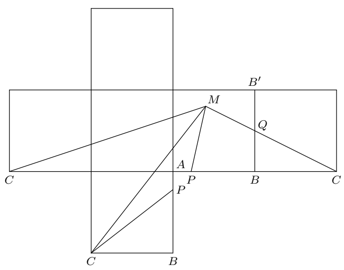


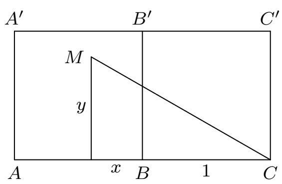


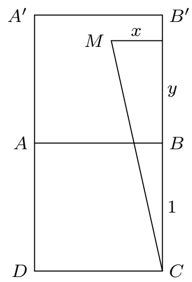
пут је $A - C - B$. Наиме, ако изаберемо неку другу тачку C' важи следеће:

$$AC' + C'B = AC' + C'B' > AB' = AC + CB' = AC + CB$$









2. Без умањења општости можемо претпоставити да се тачка M налази на страници $ABA'B'$. У зависности од тога да ли се посматрано теме налази на истој страници коцке као и тачка M разматрамо следеће случајеве:

1. Ако и теме и тачка M припадају истој страници, онда је најкраће растојање управо дуж која их спаја.

2. Ако теме припада наспрамној страници. Приметимо да најкраћи пут сече само једну ивицу коцке. Нека је посматрано теме тачка C. Развијмо коцку у мрежу и приметимо да тачке М и Ц можемо спојити на више начина. Нека су $Q = MC \cap BB'$ и $P = MC \cap AB$. Поставимо координатни систем у теме Б, тако да $x - osa$ садржи ивицу AB, а $y - osa$ ивицу BB'. Са мреже видимо да је

$$d_1 = (MQ + QC)^2 = y^2 + (1+x)^2 = y^2 + x^2 + 1 + 2x$$

и

$$d_2 = (MP + PC)^2 = x^2 + (1+y)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2y$$

Минималност растојања зависи од члана $2x$, односно $2y$. Из овога закључујемо:

- ако је $x < y$, онда је $d_1 < d_2$
- ако је $x > y$, онда је $d_1 > d_2$
- ако је $x = y$, онда је $d_1 = d_2$

3. Површина купе је $P = 8 \cdot 12 \cdot \pi$. Из пропорције:

$$8 \cdot 12 \cdot \pi \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{100-6}{100}$$

$$x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

добијамо

$$x = \frac{100 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \pi}{100-6} = 320,68m^2$$

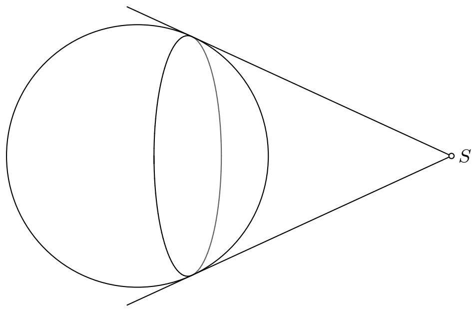
4. Посматрајмо попречни пресек сфере. Из сличности троуглова $\triangle ODB$ и $\triangle OBS$ добијамо

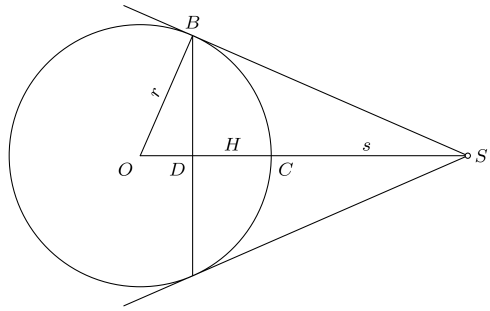
$$\frac{OB}{OS} = \frac{OD}{OB}$$

$$\frac{r}{r+s} = \frac{r-H}{r}$$

Одатле следи

$$H = \frac{rs}{r+s}$$





Површина осветљеног дела сфере је $2rH\pi$, па је

$$P = \frac{2r^2 s\pi}{r+s}$$

5. Нека је O центар сфере уписане у тај полиедар. Посматрајмо пљосни P_1 и P_2 са заједничком ивицом AB. Нека су O_1 и O_2 додирне тачке тих пљосни са уписаном сфером. Тада важи $OO_1 \perp P_1 \Rightarrow OO_1 \perp AB, OO_2 \perp P_2 \Rightarrow OO_2 \perp AB$. Нека је α раван одредјена тачкама O, O_1 и O_2. Нека је $M = AB \cap \alpha$. Тада је $O_1M = O_2M$ као тангентне дужи, а $AB \perp O_1M$ и $AB \perp O_2M$, јер је $AB \perp \alpha$. Како су O_1M и O_2M висине троуглова $\triangle ABO_1$ и $\triangle ABO_2$, онда је $P(ABO_1) = P(ABO_2)$. Сваку пљосан можемо поделити на троуглове чије је једно теме додирна тачка те пљосни. Овако ће свакој ивици полиедра одговарати два троугла различитих боја и једнаких површина,па је збир површина пљосни обојених једном бојом једнак збиру површина пљосни обојених другом бојом.

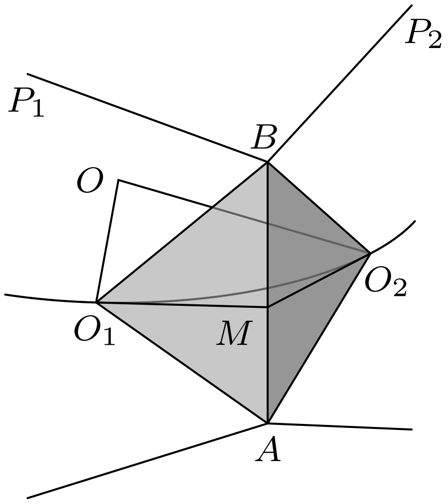
6. Запремина воде је $V = \frac{1}{3}9\pi(6^2+18+3^2) = 189\pi$. Том водом напунимо купу сличну датој ($h = 3r$), чија је запремина $V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{27}h^3\pi$. Из $189\pi = \frac{1}{27}h^3\pi$ добијамо $h = 9\sqrt[3]{7} \approx 17,216dm$.

7. Нека је H врх пирамиде, K пресек висине пирамиде и равни и $x = HK$. Тада је $P_{ACH} = P_{AKH} + P_{KCH}$, тј. $\frac{ac}{2}\sin(2\alpha) = \frac{ax}{2}\sin\alpha + \frac{cx}{2}\sin\alpha$, где је α угао који висина пирамиде образује са њеним бочним ивицама. Дељењем са $\frac{acx\sin\alpha}{2}$ добијамо

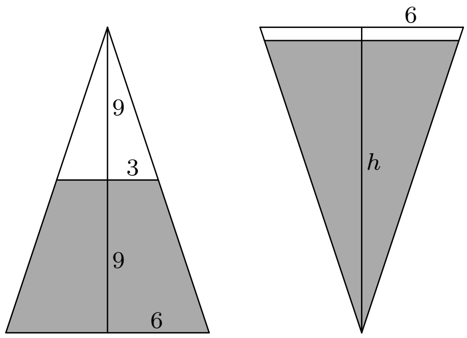
$$\frac{\sin(2\alpha)}{x\sin\alpha} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

Слично, из $P_{BDH} = P_{BKH} + P_{KDH}$ добијамо

$$\frac{\sin(2\alpha)}{x\sin\alpha} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$$



слика уз задатак 5



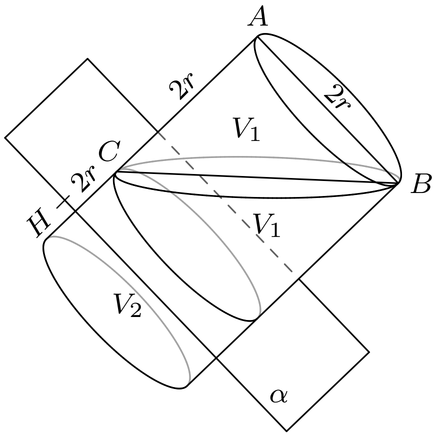
слика уз задатак 6

Из претходне две релације следи тврђење.

8. Нека су ознаке као на слици (видећемо да због услова $H > 2r$ слика изгледа управо тако). Посматрајмо троугао ABC. То је правоугли троугао са једним углом од $\pi/4$, па је једнакокраки, дакле $AC = AB = 2r$. Нека је V_1 запремина дела воде који је истекао из чаше, а V_2 запремина мањег ваљка који се добија када почетни пресечемо равни π паралелној основама која садржи тачку C. Тај ваљак има основу полупречника r као и почетни, а висина му је $H - 2r$(због тога је битан почетни услов). Сада је $V_2 = r^2\pi(H - 2r)$, а $V_1 = (V - V_2)/2$, где је $V = r^2\pi H$, запремина почетног ваљка (тј.чаше). Јасно је сада да је запремина преостале воде у чаши једнака $V_1 + V_2 = r^2\pi(H - r)$.

9. а) Дата раван дели призму на два дела. Ако један од њих транслирамо тако да се равни основа призме поклопе, добиће се права призма чија је основа пресек дате равни и призме, а бочне ивице су дужине l. Та призма има површину омотача pl, као и полазна.
б) На исти начин као под а) добије се права призма запремине Ql, а то је управо и запремина полазне косе призме.

10. Нека је запремина призме V_1, а запремина пирамиде V_2 и



нека је дужина ивице основе пирамиде a, а њена висина H. Тада важи

$$V_1 = B_1(3H),\ B_1 = (\frac{a}{2})^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}BH,\ B = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 4B_1$$

Уместо да директно рачунамо запремину призме ван пирамиде, израчунајмо запремину пирамиде ван призме, што је далеко једноставније. Ван призме је део пирамиде сачињен од 3 тростране пирамиде, чија је база једнакостраничан троугао ивице $\frac{a}{2}$, на слици је једна од њих пирамида C_1BA_1M (нека је запремина сваке од њих V_0). Висину MF можемо израчунати на основу сличности троуглова BFM и BED (Равни које чине стране призме су паралелне са висином пирамиде, нормалне су на основу ABC, па је заиста MF висина). Добија се

$$\frac{MF}{DE} = \frac{BF}{BE}$$

а знамо да је

$$BF = h/2, BE = \frac{2}{3}h$$

где је h висина основе ABC пирамиде $ABCD$. Одате добијамо

$$\frac{MF}{H} = \frac{3}{4}$$

$$MF = \frac{3}{4}H$$

Сада можемо израчунати V_0.

$$V_0 = \frac{1}{3}B_1\frac{3}{4}H = \frac{1}{4}B_1H$$

Део запремине призме који је унутар пирамиде јендак је

$$V_2 - 3V_1,$$

па је однос запремине дела унутра и укупне запремине

$$\frac{V_2 - 3V_1}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}B_1H - \frac{3}{4}B_1H}{3B_1H}$$

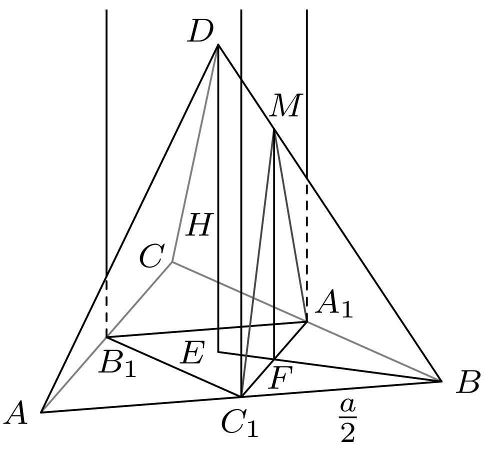
Добијамо

$$\frac{V_2 - 3V_1}{V_1} = \frac{7}{36},$$

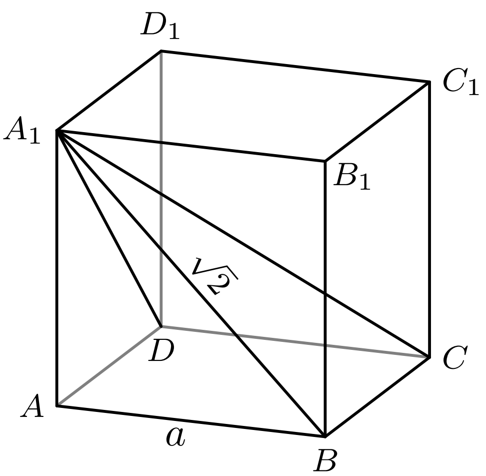
па је решење задатка

$$1 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}$$

Дакле, $\frac{29}{36}V_1$ је ван пирамиде.



слика уз задатак 10



слика уз задатак 11

11. Нека је P_1 површина пирамиде, а P површина коцке. Ако је страница коцке a, имамо $P = 6a^2$ и

$$P_1 = B + M = P_{ABCD} + P_{ABA_1} + P_{ADA_1} + P_{BCA_1} + P_{CDA_1}$$

$$P_1 = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{A_1B \cdot BC}{2} + \frac{AD \cdot DC}{2}$$
$$P_1 = 2a^2 + \frac{a^2\sqrt{2}}{2} + \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

јер је $A_1B = AD = a\sqrt{2}$ и троуглови BCA_1 и CDA_1 су правоугли са правим угловима код темена B, односно D. Добијамо дакле

$$P_1 = a^2(2 + \sqrt{2})$$

Из услова задатка знамо $P_1 = 1$ тј. $a^2 = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$, па је

$$P = 6a^2 = 6\frac{1}{2+\sqrt{2}}\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$P = 6\frac{2-\sqrt{2}}{2^2-2}$$
$$P = 3(2-\sqrt{2})$$

12. Запремина зарубљене пирамиде једнака је запреминама зарубљених пирамида које настају задатим пресецањима. Ако означимо са B_x тражену површину, на основу познатих формула за рачунање запремине зарубљене пирамиде биће

$$\frac{H}{3}(B_1 + B + \sqrt{BB_1}) = \frac{H}{6}(B + B_x + \sqrt{BB_x}) + \frac{H}{6}(B_1 + B_x + \sqrt{B_1B_x})$$

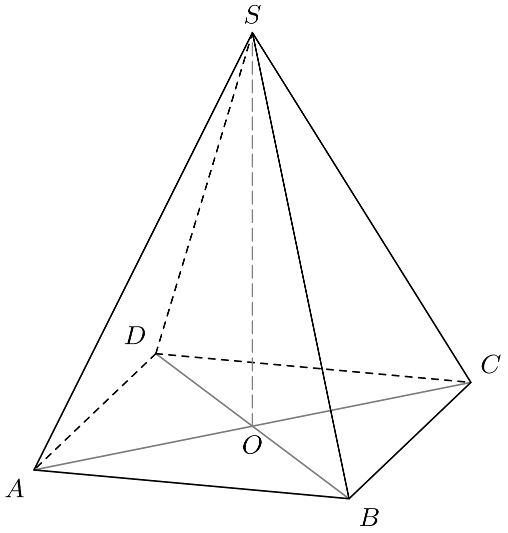
одакле се добија

$$2B_x + \sqrt{B_x}(\sqrt{B_1} + \sqrt{B}) - (\sqrt{B_1} + \sqrt{B})^2 = 0$$

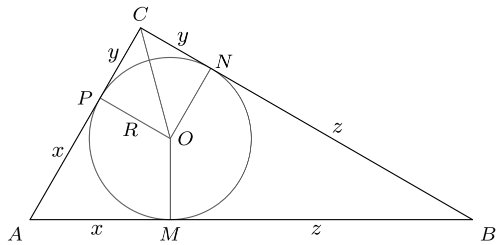
и коначно решавањем квадратне једначине добија се

$$B_x = \frac{1}{2}(\frac{B+B_1}{2} + \sqrt{BB_1})$$

13. Висина пирамиде је $H = \sqrt{l^2 - (\frac{d}{2})^2}$, где је $d = \sqrt{a^2+b^2}$ дијагонала основе, дакле $\frac{1}{2}\sqrt{4l^2-a^2-b^2}$. Раван дели висину у односу $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} : \left(1 - (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}\right)$, па је тражено растојање: $\frac{\sqrt{4l^2-a^2-b^2}}{2^{\frac{4}{3}}}$.



слика уз задатак 13



слика уз задатак 14

14. Нека су ознаке:
M - површина омотача призме
H - висина призме
R - полупречник уписане лопте

$$M = aH + bH + cH = (a + b + c)H = 2sH$$

Решавањем следећег система једначина

$$a + b + c = 2s$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = b \operatorname{tg} \alpha$$

добијамо странице троугла:

$$a = \frac{2s \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}$$

$$b = \frac{2s \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}$$

$$c = \frac{2s}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}$$

Потребно је још да се израчуна висина призме.

Како је у призму могуће уписати лопту, висина призме је једнака пречнику уписане лопте.

Посматрамо троугао који се добија као пресек призме са равни паралелне основи која садржи додирне тачке лопте са странама призме (види слику).

$$AM = AP = x, CN = CP = y, BM = BN = z$$

$$x + y + z = s$$

$$OM = ON = OP = R$$

Како је троугао PCO правоугли једнакокракитроугао ($\measuredangle PCO = \frac{\pi}{4}$, а $\measuredangle CPO = \frac{\pi}{2}$), добија се да је $R = y$.
Решавањем следећег система једначина

$$x + y = b$$

$$x + z = c$$

$$y + z = a$$

добија се y, тј. R:

$$y = R = \frac{b - c + a}{2}.$$

Дакле, $H = 2R = b - c + a$.
Коначно,

$$M = 2sH = 2s(b - c + a)$$

$$M = 2s\left(\frac{2s\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1} - \frac{2s}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1} + \frac{2s\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}\right)$$

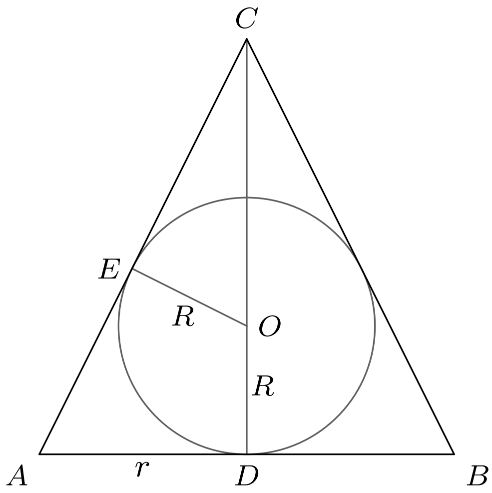
$$M = 4s^2\frac{\cos\alpha + \sin\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}$$

15. Ако са R означимо полупречник лопте, са r полупреник основе купе, а са H висину купе, онда је запремина купе $V_k = \frac{\pi H r^2}{3}$, а запремина лопте $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Тада је $k = \frac{V_l}{V_k} = \frac{4R^3}{Hr^2}$. Из сличности троуглова COE и CAD следи

$$\frac{CO}{CA} = \frac{EO}{DA}$$

односно

$$\frac{H - R}{\sqrt{H^2 + r^2}} = \frac{R}{r}.$$



Одатле се добија да је

$$H = \frac{2r^2R}{r^2 - R^2}$$

Према томе

$$k = \frac{2R^2(r^2 - R^2)}{r^4} = 2\frac{R^2}{r^2}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

Како је збир позитивних бројева $\frac{R^2}{r^2}$ и $1 - \frac{R^2}{r^2}$ константан, то је њихов производ највећи када су они једнаки, тј. за $\frac{R^2}{r^2} = \frac{1}{2}$.
Дакле, $k_{max} = \frac{1}{2}$.

16. Површина основе пирамиде је збир троуглова $\triangle A_iA_{i+1}O$, где су A_i темена основе, а O подножје висине пирамиде.
Нека су ознаке:
h - висина бочне стране пирамиде
h_a - висина троугла у основи пирамиде
B - површина основе пирамиде
M - површина омотача пирамиде

$$\frac{B}{M} = \frac{Q}{M} = \frac{\sum P_{\triangle \text{основе}}}{\sum P_{\triangle \text{бочни}}} = \frac{h_a}{h} = \cos\varphi$$

Одатле се добија $M = \frac{Q}{\cos\varphi}$.

17. Нека су ознаке: a_1 - ивица једне основе; $a_1 = 0,4m$ a_2 - ивица друге основе; $a_2 = 0,3m$ h_1 - висина зарубљене пирамиде; $h_1 = 0,5m$

H - висина потпуне пирамиде. Из сличности троуглова $\triangle A_1A_2S$ и $\triangle B_1B_2O$ следи

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{H}{H - h_1}.$$

Одатле се добија да је

$$H = \frac{a_1 h_1}{a_1 - a_2}.$$

Када заменимо дате вредности добијамо $H = 2m$. Обележимо са B_1 површину осмоугла странице a_1. Добијамо $B_1 = 0,7725$. И коначно, добијамо тражену запремину потпуне пирамиде $V = \frac{B_1 H}{3} = 0,515m$.

Напомена:
Површина базе се рачуна на следећи начин:
Са слике видимо да је

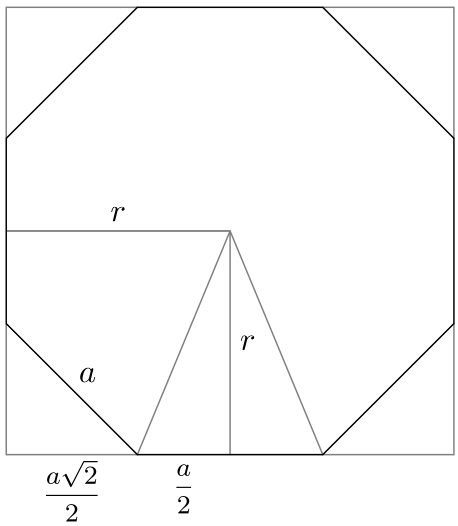
$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2},$$

па је

$$B = P_{\text{осмоугла}} = 8\frac{ra}{2}$$

$$= 4ra = 2(a\sqrt{2} + a)a$$

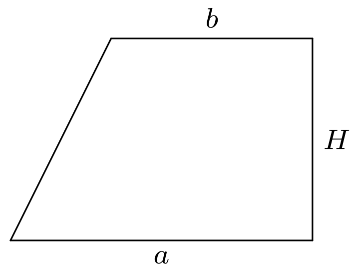
Када убацимо вредности за a добијамо $B = 0,7725m$.

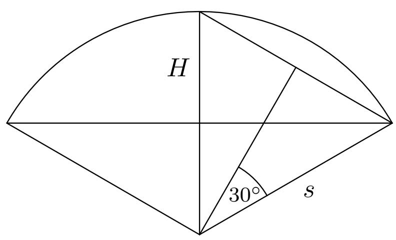


18. Нека је O центар дате сфере. Поделимо полиедар на пирамиде, тако да је O врх сваке пирамиде, а основе пирамида су пљосни полиедра. Висина сваке од тих пирамида је r, јер свака пљосан полиедра додирује сферу, па је r растојање од центра сфере до сваке пљосни полиедра. Запремина пирамиде је $V_{\text{пирамиде}} = \frac{r}{3}B_{\text{пирамиде}}$. Одавде видимо да је $V_{\text{полиедра}} = \frac{r}{3}P_{\text{полиедра}}$, јер је запремина полиедра збир запремина пирамида, а површина полиедра је збир површина база пирамида.

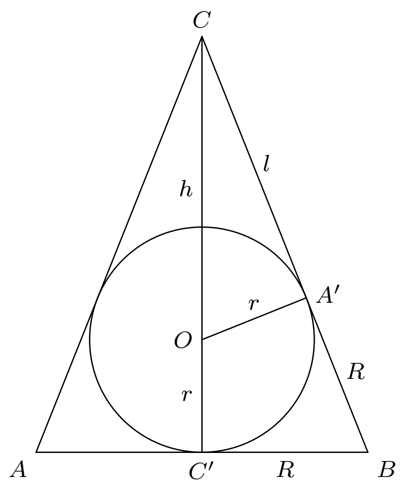
19. Као што смо видели у уводном делу, запремина тела које се добија ротацијом трапеза око основице не зависи од облика трапеза, па можемо изабрати трапез оног облика који нам највише одговара. Овде ћемо изабрати правоугли трапез. Нека је његова

висина H. Запремина тела које се добија ротацијом око веће основице a је збир запремина ваљка висине b чија је основа круг полупречника H и купе која има заједничку основу са ваљком и висину $a-b$. Дакле, запремина тог тела је $V_1 = \pi H^2 b + \pi H^2 \frac{a-b}{3} = \pi H^2 \frac{a+2b}{3}$. Слично, запремина тела које се добија када трапез ротирамо око мање основице b је $V_2 = \pi H^2 a - \pi H^2 \frac{a-b}{3} = \pi H^2 \frac{2a+b}{3}$. Сада је $m : n = V_1 : V_2 = (a+2b) : (2a+b)$, па одавде добијемо $a : b = (2n-m) : (2m-n)$.

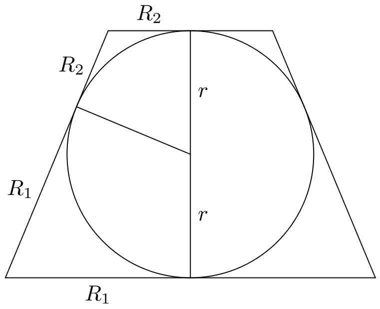




20. Тело које се добија ротацијом купе око једне њене изводнице је лоптин исечак, где је полупречник одговарајуће лопте s. Запремина лоптиног исечка је $V = \frac{2}{3}\pi s^2 H$, где је H висина одговарајућег лоптиног одсечка. Тада је $H = s - s\cos(2\cdot 30°) = \frac{s}{2}$, па је тражена запремина $V = \frac{2}{3}\pi s^2 \cdot \frac{s}{2} = \frac{\pi s^3}{3}$.



21. На слици је дат осни пресек. Нека је r полупречник лопте, $OC = h$, $C'B = R$ и $CA' = l$. Тада је и $BA' = R$, јер су BA' и BC' тангентне дужи. Ако са s означимо дужину изводнице купе, тада је $s = l + R$. Троугао $\triangle COA'$ је правоугли, па је $l = \sqrt{h^2 - r^2}$. Троуглови $\triangle COA'$ и $\triangle CBC'$ су слични, па је $\frac{R}{r} = \frac{BC'}{OA'} = \frac{CC'}{CA'} = \frac{r+h}{l}$, тј. $R = \frac{r(r+h)}{l} = \frac{r(r+h)}{\sqrt{h^2-r^2}}$. Даље, $s = l + R = \sqrt{h^2 - r^2} + \frac{r(r+h)}{\sqrt{h^2-r^2}} = \frac{h^2-r^2+r^2+rh}{\sqrt{h^2-r^2}} = \frac{h(r+h)}{\sqrt{h^2-r^2}}$. Сада је запремина купе $V_{\text{купе}} = \frac{\pi R^2(r+h)}{3} = \frac{\pi r^2(r+h)^3}{3(h^2-r^2)} = \frac{\pi r^2(r+h)^2}{3(h-r)}$, а површина $P_{\text{купе}} = \pi R(R+s) = \pi \frac{r(r+h)}{\sqrt{h^2-r^2}}\left(\frac{r(r+h)}{\sqrt{h^2-r^2}} + \frac{h(r+h)}{\sqrt{h^2-r^2}}\right) = \pi \frac{r(r+h)}{\sqrt{h^2-r^2}}\left(\frac{(r+h)^2}{\sqrt{h^2-r^2}}\right) = \frac{\pi r(r+h)^3}{h^2-r^2} = \frac{\pi r(r+h)^2}{h-r}$, па је $\frac{V_{\text{купе}}}{P_{\text{купе}}} = \frac{r}{3} = \frac{V_{\text{лопте}}}{P_{\text{лопте}}}$, одакле добијамо $\frac{V_{\text{лопте}}}{V_{\text{купе}}} = \frac{P_{\text{лопте}}}{P_{\text{купе}}}$.



22. Нека је r полупречник лопте, а R_1 и R_2 полупречници основа зарубљене купе. У осном пресеку се добија једнакокраки трапез у који је уписан круг. Висина зарубљене купе једнака је висини трапеза и износи $H = 2r$, а изводница зарубљене купе једнака је бочној страни трапеза и износи $s = R_1 + R_2$. Запремина зарубљене купе је $V_{\text{зк}} = \frac{\pi H(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)}{3} = \frac{2\pi r(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)}{3}$, а површина зарубљене купе је $P_{\text{зк}} = \pi(R_1^2+R_2^2+(R_1+R_2)s) = 2\pi(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)$, па је $\frac{V_{\text{зк}}}{P_{\text{зк}}} = \frac{r}{3} = \frac{V_{\text{лопте}}}{P_{\text{лопте}}}$, одакле добијамо $\frac{V_{\text{лопте}}}{V_{\text{зк}}} = \frac{P_{\text{лопте}}}{P_{\text{зк}}}$.

23. Нека су пљосни полиедра Ω означене са F_i, пирамида којој је база F_i, а врх O са Φ_i, а одговарајућа висина пирамиде са H_i. Како је полиедар конвексан, можемо га поделити на овакве пирамиде. Из услова задатка све пљосни полиедра имају једнаку површину $(\forall i,j)(P(F_i) = P(F_j) = P_0)$. Ако са V_i означимо запремину пирамиде Φ_i, добијамо да је висина $H_i = \frac{3V_i}{P(F_i)} = \frac{3V_i}{P_0}$. Сада је $\sum_i H_i = \sum_i \frac{3V_i}{P_0} = \frac{3V}{P_0}$, где је V запремина датог полиедра, па видимо да збир растојања унутрашње тачке O од пљосни полиедра не зависи од положаја те тачке.

24. Тетраедар $ABCD$ се може поделити на тетраедре $OBCD$, $OCDA$, $ODAB$ и $OABC$, а њима одговарајуће висине из тачке O су d_a, d_b, d_c и d_d, редом. Сада је $\frac{d_a}{h_a} = \frac{\frac{3V_{OBCD}}{P_{BCD}}}{\frac{3V_{ABCD}}{P_{BCD}}} = \frac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}}$. Слично се добија и $\frac{d_b}{h_b} = \frac{V_{OCDA}}{V_{ABCD}}$, $\frac{d_c}{h_c} = \frac{V_{ODAB}}{V_{ABCD}}$, $\frac{d_d}{h_d} = \frac{V_{OABC}}{V_{ABCD}}$, па је $\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} + \frac{d_d}{h_d} = \frac{V_{OBCD}+V_{OCDA}+V_{ODAB}+V_{OABC}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}} = 1$.