Kombinatorika
EKSTREMALNI PRINCIP

Danica Kosanović
41/2011
mr11041@alas.matf.bg.as.rs

Ekstremalni princip je jedna od kombinatornih tehnika koja se može pokazati zgodnom u različitim situacijama, a kao što ćemo videti kroz ovde navedene zadatke, često i u zadacima u kojima je potrebno dokazati postojanje objekta sa određenim svojstvima. Ako izaberemo pogodnu funkciju i dokažemo postojanje objekta koji maksimizira ili minimizira tu funkciju (što se obično lako dobija), onda koristeći taj objekat jednostavno pronalazimo i objekat tražen u zadatku.
Podsetimo se narednih činjenica, koje će nam biti od pomoći:

1. Svaki konačan neprazni skup A prirodnih ili realnih brojeva ima minimalni element - $minA$ i maksimalni element - $maxA$.

2. Svaki neprazni podskup skupa $\mathbb{N}$ ima minimum - Princip dobrog uređenja prirodnih brojeva (ekvivalent Principa matematičke indukcije).

3. Beskonačni podskup A skupa $\mathbb{R}$ ne mora imati minimalni ili masksimalni element. Ako je A ograničen odozgo onda postoji najmanje gornje ograničenje - $supA$, a ako je A ograničen odozdo onda postoji najveće donje ograničenje - $infA$.

Zadatak 1. Dato je n tačaka u ravni. Svake tri od njih formiraju trougao površine ≤ 1. Pokazati da svih n tačaka leže u trouglu površine ≤ 4.

Rešenje. Izaberimo tačke A, B i C takve da je površina trougla ABC maksimalna (skup tačaka je konačan, pa je i broj trouglova konačan $\Longrightarrow$ maksimum postoji prema svojstvu 1)). Kroz temena tog trougla povucimo prave paralelne naspramnim stranicama, i dobijeni trougao koji te prave formiraju označimo sa $A'B'C'$. Njegova površina je očigledno 4 puta veća od površine ABC, dakle $P(A'B'C') \leq 4$. Pokažimo da su sve tačke skupa unutar ovog trougla.
Pretpostavimo suprotno: neka je D tačka skupa van trougla $A'B'C'$. Tada, trougao ABC i tačka D nalaze se sa različitih strana bar jedne od pravih $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$. Neka je to, na primer, prava $B'C'$. Međutim, ako sada uočimo trougao BCD, primetićemo da on ima površinu veću od trougla ABC

(osnovica BC je ista, a visina iz D duža je od visine iz A na pravu BC, prema konstrukciji). Kontradikcija sa maksimalnošću ABC.

Zadatak 2. Dato je $2n$ tačaka u ravni, od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Tačno n tačaka iz tog skupa su farme $F = \{F_1, \ldots, F_n\}$, ostalih n su bunari $B = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Trebalo bi izgraditi pravolinijske puteve od svake farme do tačno jednog bunara. Pokazati da se bunari mogu bijektivno dodeliti farmama, tako da se nikoja dva puta ne preseku.

Rešenje. Ako je data bijekcija $f : F \to B$, onda pomoću nje možemo da formiramo sistem puteva, povezujući F_i sa $f(F_i)$. Ukupno postoji $n!$ različitih bijekcija skupa od n elemenata u sebe. Od svih tih $n!$ sistema puteva izaberimo onaj minimalne dužine i pokažimo da je to traženi, odnosno - da se nikoja dva puta ne seku.
Pretpostavimo suprotno. Neka se putevi od farmi F_1 i F_2 do odgovarajućih bunara B_i i B_k seku u tački P. Primetimo da nejednakost trougla primenjena na trouglove F_1PB_k i F_2PB_i daje $|F_1B_k| + |F_2B_i| \leq |F_1B_i| + |F_2B_k|$. Međutim, ako sada međusobno zamenimo bunare ovih farmi, tj. stavimo $F_1 \to B_k$ i $F_2 \to B_i$, dobijamo sistem puteva sa manjom ukupnom dužinom. Ovo je kontradikcija sa minimalnošću f.

Zadatak 3. Neka je data beskonačna rešetka u ravni, čija su temena označena prirodnim brojevima. Ako je vrednost u svakom temenu jednaka artimetičkoj sredini vrednosti u četiri susedna temena (gore, dole, levo, desno), dokazati da u svim temenima mora biti ista vrednost.

Rešenje. Vrednosti su prirodni brojevi, pa formiraju podskup skupa $\mathbb{N}$. Prema svojstvu 2), ovaj skup ima minimalni element, neka je to m. Označimo njegove susede sa a, b, c, d. Tada, kako je m minimalan, važi: $m \leq a$, $m \leq b$, $m \leq c$, $m \leq d$. Međutim, primenivši uslov zadatka za m i susede:

$$4m = a + b + c + d$$

Ako bi negde važila nejednakost, prethodna jednakost se ne bi dostizala. Zato svuda imamo jednakosti: $m = a = b = c = d$, pa i u čitavoj rešetki.

Zadatak 4 (Silvesterov problem: Sylvester 1893)**.** Konačan skup tačaka u ravni je takav da svaka prava koja sadrži dve tačke iz skupa, sadrži i neku treću. Dokazati da su sve tačke iz skupa kolinearne.

Rešenje (Kelly, 1948). Označimo skup tačaka sa A i pretpostavimo suprotno - nisu sve tačke iz A kolinearne. Posmatrajmo parove (p, L), za svaku tačku

$p \in A$ i pravu L koja sadrži neke druge dve tačke iz skupa. A je konačan, pa je i skup ovih parova konačan: prema 1), postojaće par (p, L) za koji je rastojanje tačke p od prave L minimalno.
Neka je f podnožje visine iz p na L. Prema uslovu zadatka prava L sadrži neke tri tačke iz skupa - bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da važi raspored $c - f - b - a$, za neke $a, b, c \in A$. Ako sada uočimo pravu L' kroz p i a, imamo da je rastojanje od b do L' manje od $|pf|$, što protivreči izboru para (p, L) kao minimalnog.

Zadatak 5. Jedno telo u prostoru ima osobinu da mu je svaki presek sa ravni pun krug. Dokazati da je to telo lopta.

Rešenje. Zadatak na prvi pogled ne izgleda teško, ali da bi se došlo do elegantnog rešenja treba se dosetiti kako najefikasnije iskoristiti ekstremalni princip. Posmatraćemo objekat koji maksimizira neku funkciju. Koju?
Dosetimo se da možemo posmatrati funkciju koja parovima tačaka datog tela dodeljuje njihovo međusobno rastojanje. Ako pronađemo par tačaka za koje se dostiže maksimum rastojanja, kako bismo ih mogli iskoristiti? Te dve tačke A i B formiraju tetivu maksimalne dužine u telu. Ako je M bilo koja tačka tela, onda ravan koja sadrži tačku M i duž AB mora biti krug prema pretpostavci. Sledi da tačka M pripada lopti čiji je prečnik duž AB. Dakle, ta lopta je nadskup tela. Ali, važi i obratno: ako neka tačka N pripada toj lopti, uzmimo ravan kroz N i AB. Presek te ravni sa telom je krug, a kako je duž AB maksimalne dužine, ona miri biti prečnik tog kruga. Sledi, N pripada i telu. To jest, telo jeste lopta.
Šta nam, mežutim, garantuje postojanje ovakve dve tačke? To je Vajerštrasova teorema [Weierstrass]:
Svaka realna funkcija na ograničenom i zatvorenom skupu dostiže svoj minimum i maksimum.

Literatura:
Engel A. Problem-solving strategies for math olympiads, 1998

Predavanje je održano 30.11.2014.,
na času Metodika nastave i računarstva