Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Metodika nastave matematike i računarstva

Seminarski rad

Problemi maksimuma i minimuma

Studenti:
Marija Kaljević
Marta Krčaković
Igor Lučić
Verica Milovanović
Nikolina Stolica
Vera Vukosavljević

21. decembar 2015

1 Uvod

Matematički modeli raznih pojava i procesa u prirodi su funkcije jedne ili više promenljivih, a za rešavanje izvesnog broja zadataka povezanih sa tim pojavama i procesima potrebno je naći maksimum ili minimum tih funkcija. Metode nalaženja ekstremuma zavise od osobina posmatrane funkcije, od oblasti u kojoj se traže ekstremumi i, naravno, od matematičkog aparata koji se koristi. Ponekad sama pretpostavka da ekstremum postoji, pojednostavljuje početni problem i brže dovodi do traženih rezultata. Problemi maksimuma i minimuma susreću se u geometriji, teoriji brojeva, kombinatorici, verovatnoći, raznim problemima optimizacije, linearnom programiranju, teoriji grafova, kao i u konstruisanju efikasnih računarskih algoritama kako bi se realizovali uz minimalan broj operacija.

2 Problemi maksimuma i minimuma u geometriji

Definicija 1. *Tačka c koja pripada domenu funkcije f zove se kritična tačka funkcije f ako je ili $f(c) = 0$ ili $f(c)$ ne postoji.*

Teorema 1. *Ako je funkcija f neprekidna na intervalu (a, b) i ima ekstremnu vrednost (tj. lokalni minimum ili lokalni maksimum) u tački c, $c \in (a, b)$, tada je tačka c kritična tačka funkcije f.*

Teorema 2. *Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b), izuzev možda u tački $c \in (a, b)$ i neka je c kritična tačka za funkciju f.*

1. *Ako je $f(x) > 0$ za $x \in (a, c)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (c, b)$, tada funkcija f ima lokalni maksimum u tački c.*

2. *Ako je $f(x) < 0$ za $x \in (a, c)$, a $f(x) > 0$ za $x \in (c, b)$, tada funkcija f ima lokalni minimum u tački c.*

3. *Ako je $f(x) > 0$, ili $f(x) < 0$, za sve $x \in (a, b)$, osim možda u tački c, tada funkcija f nema ekstremne vrednosti u tački c.*

Zadaci:

1. Od kartona oblika kvadrata stranice a načiniti otvorenu kutiju (slika 1 - levo) maksimalne zapremine. Odrediti dimenzije kutije i maksimalnu zapreminu.

   Rešenje:

   Osnovna ivica kutije je $a - 2x$, a visina x (slika 1 - desno). Onda je zapremina:

   $$V(x) = (a - 2x)^2 x = (a^2 - 4ax + 4x^2)x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2 x$$

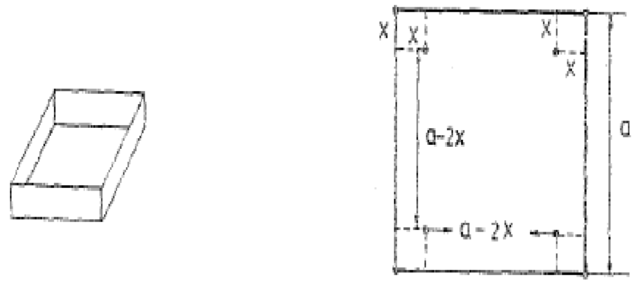
   Na osnovu teoreme 1, ako u nekoj tački x_0 funkcija $V(x)$ dostiže maksimum, onda je x_0 kritična tačka. Posmatramo prvi izvod funkcije $V(x)$:

   $$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$$

   Na osnovu formule za rešavanje kvadratne jednačine:

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   Nule prvog izvoda su u tačkama: $x_1 = \frac{a}{2}$ i $x_2 = \frac{a}{6}$. Dalje imamo:



Slika 1: Trazeni oblik kutije i šema izrezanog kartona

$V(x) \nearrow$ za $x \in (-\infty, \frac{a}{6})$
$V(x) \searrow$ za $x \in (\frac{a}{6}, \frac{a}{2})$
$V(x) \nearrow$ za $x \in (\frac{a}{2}, +\infty)$

Na osnovu teoreme 2, $V(x)$ maksimalna u tački $x = \frac{a}{6}$
$\Rightarrow$ Osnovna ivica kutije je $a-2x = \frac{2a}{3}$, visina je $\frac{a}{6}$, a tražena maksimalna zapremina je $\frac{2a^3}{27}$

2. Neka je S skup tačaka u ravni, tako da za svake dve tačke A i B iz S postoji tačka C iz S na kružnici čiji je prečnik AB, različita od tačaka A i B. Dokazati da je skup S beskonačan (Državno takmičenje iz matematike, prvi razred B kategorija, 2008)

   Rešenje: Pretpostavimo suprotno: neka je S konačan skup. Onda postoje dve tačke iz S koje su na najmanjem rastojanju i neka su to tačke A i B. Ako je C iz S tačka na kružnici sa prečnikom AB tada je trougao ABC pravougli sa pravim uglom kod temena C. Pa onda mora da bude $CA < AB$, što je u kontradikciji sa načinom izbora tačaka A i B. Dakle pretpostavka je bila pogrešna. Zaključujemo da je skup S beskonačan.
   (O ovom zadatku ne tražimo ekstremnu vrednost problema, već se služimo pretpostavkom da takav element postoji).

3 Problemi maksimuma i minimuma u rešavanju jednačina

Zadaci:

3. Odrediti sve vrednosti realnog parametra a, za koje jednačina

$$|||x-1|-2|-3| = a$$

ima najveći mogući broj rešenja.

Rešenje: Neka je $f(x) = |||x-1|-2|-3|$. Prvo ćemo analizirati vrednost $|x-1|$:

$$|x-1| = \begin{cases} -x+1, \text{ ako je } x \leq 1 \\ x-1, \text{ ako je } x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ||x-1|-2| = \begin{cases} |-x-1|, \text{ za } x \leq 1 & 1^\circ \\ |x-3|, \text{ za } x > 1 & 2^\circ \end{cases}$$

1°

$$|-x-1| = \begin{cases} -x-1, \text{ za } x \leq -1 \\ x+1, \text{ za } -1 < x \leq 1 \end{cases}$$

2°

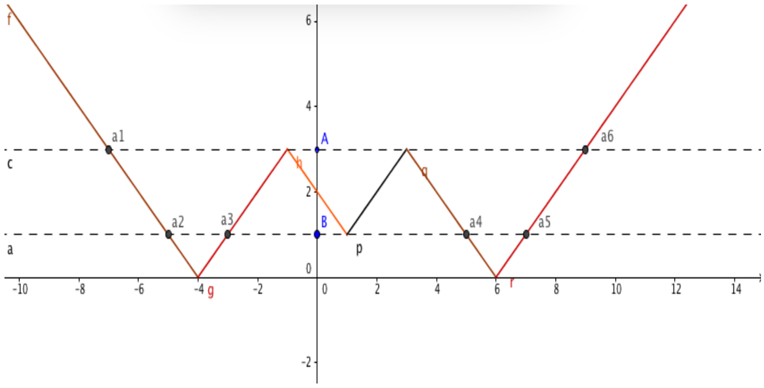
$$|x-3| = \begin{cases} x-3, \text{ za } x > 3 \\ -x+3, \text{ za } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Pa važi:

$$|||x-1|-2|-3| = \begin{cases} |-x-4|, \text{ za } x \leq -1 \\ |x-2|, \text{ za } -1 < x \leq 1 \\ |-x|, \text{ za } 1 < x \leq 3 \\ |x-6|, \text{ za } x > 3 \end{cases} \tag{1}$$

Sada analiziramo početnu funkciju $f(x) = |||x-1|-2|-3|$. Iz (1) zaključujemo:

- za vrednosti $x < -1$: $f(x) = \begin{cases} -x-4, \text{ za } x < -4 \\ x+4, \text{ za } x > -4 \end{cases}$
- za vrednosti $-1 < x \leq 1$: $f(x) = 2-x$



Slika 2: Grafik funkcije $f(x)$

- za vrednosti $1 < x \leq 3$: $f(x) = x$
- za vrednosti $x > 4$: $f(x) = \begin{cases} 6 - x, \text{ za } x < 6 \\ -6 + x, \text{ za } x > 6 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x - 4, \text{ za } x \leq -4 \\ x + 4, \text{ za } -4 < x \leq -1 \\ 2 - x, \text{ za } -1 < x \leq 1 \\ x, \text{ za } 1 < x \leq 3 \\ 6 - x, \text{ za } 3 < x \leq 6 \\ x - 6, \text{ za } x > 6 \end{cases}$$

Prava paralelna x-osi može seći ovaj grafik u najviše 6 tačaka, što se dogadja za $1 < a < 3$ (slika 2).

4. Napisati najveću i najmanju vrednost izraza $F = -2x - y + 330$ na oblasti $x \geq 0$ i $y \geq 0$ i $x + y - 20 \leq 0$ i $x - 10 \leq 0$ i $y - 30 \leq 0$ i $x + y - 10 \geq 0$

Rešenje: $F = -2x - y + 330 \Rightarrow y = -2x + 330 - F$, pa je:

$$\begin{array}{c} x \geq 0 \\ -2x + 330 - F \geq 0 \\ x - 2x + 330 - F - 20 \leq 0 \\ x - 10 \leq 0 \\ -2x + 330 - F - 30 \leq 0 \\ x - 2x + 330 - F - 10 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x \geq 0 \\ -2x + 330 - F \geq 0 \\ -x + 310 - F \leq 0 \\ x - 10 \leq 0 \\ -2x + 300 - F \leq 0 \\ -x + 320 - F \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x \geq 0 \\ 2x + F \leq 330 \\ x + F \geq 310 \\ x \leq 10 \\ 2x + F \geq 300 \\ x + F \leq 320 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x \geq 0 \\ x \leq \frac{330-F}{2} \\ x \geq 310-F \\ x \leq 10 \\ x \geq \frac{300-F}{2} \\ x \leq 320-F \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x \geq 0 \\ \frac{330-F}{2} \geq x \\ x \geq 310-F \\ 10 \geq x \\ x \geq \frac{300-F}{2} \\ 320-F \geq x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{330-F}{2} \geq 0 \\ \frac{330-F}{2} \geq 310-F \\ \frac{330-F}{2} \geq \frac{300-F}{2} \\ 10 \geq 0 \\ 10 \geq 310-F \\ 10 \geq \frac{300-F}{2} \\ 320-F \geq 0 \\ 320-F \geq 310-F \\ 320-F \geq \frac{300-F}{2} \end{array}$$

Daljim računanjem dobijamo:

$$\begin{array}{c} 330 \geq F \\ F \geq 290 \\ 330 \geq 300 \\ 10 \geq 0 \\ F \geq 300 \\ F \geq 280 \\ 320 \geq F \\ 320 \geq 310 \\ 340 \geq F \end{array}$$

Sada izdvojimo nejednakosti koje imaju značaj za rešavanje zadatka, odnosno nejednakosti gde se pojavljuje F (ostale nejednakosti su očigledne):

$$\begin{array}{c} F \leq 330 \\ F \geq 290 \\ F \geq 300 \\ F \geq 280 \\ F \leq 320 \\ F \leq 340 \end{array}$$

Unija ovih nejednakosti je:

$$300 \leq F \leq 320$$

Najmanja vrednost izraza: $F = 300$, a najveća $F = 320$.

4 Problemi maksimuma i minimuma u verovatnoći

Definicija 2. *Binomna raspodela (u oznaci $X : B(n,p)$) predstavlja raspodelu verovatnoće realizacije tačno k uspeha u n eksperimenata, pri čemu je verovatnoća svakog uspeha p.*

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$

Ako je n dovoljno veliko ($n \geq 30$), binomna raspodela se aproksimira:

- Puasonovom raspodelom ($np < 10$):

$$P\{X = k\} \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ \lambda = np$$

- Normalnom raspodelom ($np \geq 10$):

$$P\{X = k\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{\frac{-1(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

$$P\{a \leq X \leq b\} \approx \Phi_0(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi_0(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}})$$

gde je:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Zadaci:

5. Iz skupa brojeva $\{1, 2, ..., n\}$ na slučajan način se, sa vraćanjem, izvlači $2n$ brojeva ($n \geq 100$). Odrediti najmanji broj k tako da verovatnoća da broj izvučenih četvorki ne bude manji od k, iznosi najviše 0.05.

   Rešenje: Neka je X broj izvučenih četvorki. Problem se može svesti na ekvivalentan problem u kome se traži takav broj k tako da je:

$$P\{X \geq k\} \leq 0.05,\ X : B(2n, \frac{1}{n})$$

   $2n$ - broj izvlačenja, $\frac{1}{n}$ - verovatnoća da se izvuče četvorka
   $np = 2n \cdot \frac{1}{n} = 2 < 10 \Rightarrow$ koristimo Puasonovu aproksimaciju

$$P\{X \geq k\} \leq 0.05 \Rightarrow 1 - P\{X < k\} \leq 0.05 \Rightarrow P\{X < k\} \leq 0.95$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{k-1} P\{X = l\} \leq 0.95$$

Na osnovu tablice Puasonove raspodele nalazimo da je $k - 1 = 5 \Rightarrow k = 6$

6. Strelac pogađa cilj sa verovatnoćom 0.4. Koliko najmanje gađanja treba da planira, pa da verovatnoća da će imati bar 80 pogodaka bude 0.9?

   Rešenje: Neka je X broj pogodaka. Problem se može svesti na ekvivalentan problem u kome se traži takav broj n tako da je:

$$P\{X \geq 80\} = 0.9,\ X : B(n, 0.4)$$

$np = 0.4n \geq 0.4 \cdot 80 \geq 10 \Rightarrow$ koristimo normalnu aproksimaciju

$$P\{X \geq 80\} = 0.9 \Rightarrow 1 - P\{X < 80\} = 0.9 \Rightarrow P\{0 \leq X \leq 79\} = 0.1$$

$$\Rightarrow \Phi_0(\frac{79 - 0.4n}{\sqrt{0.4n \cdot 0.6}}) - \Phi_0(\frac{0 - 0.4n}{\sqrt{0.4n \cdot 0.6}}) = 0.1$$

$$\Rightarrow \Phi_0(\frac{79 - 0.4n}{\sqrt{0.24n}}) - \Phi_0(-\sqrt{\frac{2n}{3}}) = 0.1$$

$$\Rightarrow \Phi_0(\frac{79 - 0.4n}{\sqrt{0.24n}}) + \Phi_0(\sqrt{\frac{2n}{3}}) = 0.1 \text{ (pošto je } \sqrt{\frac{2n}{3}} > 5 \Rightarrow \Phi_0(\sqrt{\frac{2n}{3}}) = 0.5)$$

$$\Phi_0(\frac{79 - 0.4n}{\sqrt{0.24n}}) = -0.4 \Rightarrow \Phi_0(\frac{0.4n - 79}{\sqrt{0.24n}}) = 0.4$$

$\Rightarrow \frac{0.4n-79}{\sqrt{0.24n}} = 1.28$, na osnovu tablice normalne raspodele

$$0.4n - 1.28 \cdot \sqrt{0.24}\sqrt{n} - 79 = 0$$

$\Rightarrow \sqrt{n} < 0(odbacujese), \sqrt{n} = 14.863$
$\Rightarrow n \approx 220.92 \Rightarrow n = 221$

5 Problemi maksimuma i minimuma u teoriji brojeva

Teorema 3. *Svaki podskup S skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ ima minimalan element.*

Zadaci:

7. Dokazati da $n\sqrt{2}$ nije ceo broj za svaki pozitivan ceo broj n.

   Rešenje: Neka je S skup pozitivnih celih brojeva n, za koje je $n\sqrt{2}$ ceo broj. Ako S nije prazan, na osnovu teoreme 3, imaće najmanji element k. Posmatrajmo $(\sqrt{2}-1)k$. Onda $(\sqrt{2}-1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2}$, i kako $k \in S$, to su $(\sqrt{2}-1)k$ i $2k - k\sqrt{2}$ su pozitivni celi brojevi. Tako, po definiciji $(\sqrt{2}-1)k \in S$. Ali $(\sqrt{2}-1)k < k$, što je kontradikcija sa tim da je k najmanji element skupa S. Znači, S je prazan, što znaći da je $n\sqrt{2}$ iracionalan.

8. Svaka tačka rešetke ravni označena je pozitivnim brojem. Svaki ovaj broj je aritmetička sredina svoja četiri suseda (gornjeg, donjeg, levog, desnog). Pokazatii da su sve oznake jednake.

   Rešenje: Posmatramo najmanju oznaku m. Neka je L tačka rešetke označena sa m. Njeni susedi su označeni sa: a, b, c, d. Onda je $m = \frac{a+b+c+d}{4}$, ili $a+b+c+d = 4m$. Sada, $a \geq m$, $b \geq m$, $c \geq m$, $d \geq m$ (jer je m minimalan element). Ako bi neka od ovih nejednakosti bila striktna, imali bismo $a+b+c+d > 4m$ što je kontradikcija. Tako je $a = b = c = d = m$. Iz toga sledi da su sve oznake jednake m. Ovo je vrlo jednostavan problem. Zamenjujući pozitivne prirodne pozitivnim realnim, postaje težak problem. Nevolja je što pozitivni realni ne moraju da imaju najmanji element. Za pozitivne prirodne, ovo je osigurano principom dobrog uredjenja (teorema 3).

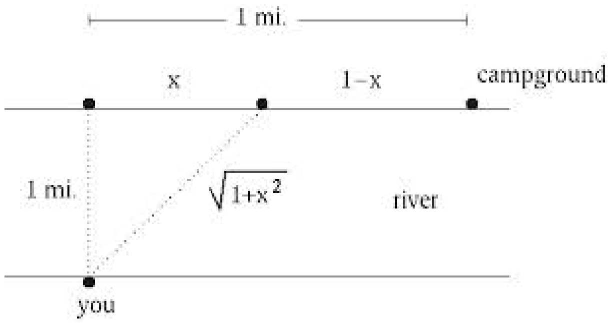
9. Dokazati da među devet uzastopnih prirodnih brojeva ima najviše četiri prosta broja

   Rešenje: Skup od devet elemeneta je konačan, pa postoji minimalni element. Ako je najmanji od devet uzastopnih prirodnih brojeva $1, 2$ ili 3, onda među njima ima tačno četiri prosta broja. Ako je najmanji od 9 uzastopnih prirodnih brojeva veći od 3, onda je među njima bar pet složenih brojeva, jer su bar četiri parna i bar jedan od četiri uzastopna neparna je deljiv sa 3.

6 Problemi maksimuma i minimuma u mehanici

Zadaci:

10. Verica stoji kraj reke koja se sporo kreće i široka je 1 kilometar. Ona želi da se vrati u svoj kamp koji je na suprotnoj strani reke. Može da pliva $2m/h$ i hoda $3m/h$. Prvo mora da pliva preko reke do neke tačke na suprotnoj strani. Zatim da odatle pešači do kampa koji je na jedan kilometar udaljen od tačke koja se nalazi direktno preko reke od tačke od koje je započeto kretanje. Kojim putem će Verica potrošiti najmanje vremena?



Slika 3: Skica prelaska

Rešenje: Označimo sa x razdaljinu sa slike.

brzina plivanja: $2\frac{m}{s}$

brzina hodanja: $3\frac{m}{s}$

Podsetimo se da ako se kretanje vrši konstantnom brzinom onda:

$$(\text{dužina puta}) = (\text{brzina})(\text{proteklo vreme})$$

Želimo da minimiziramo proteklo vreme:

$$T = (\text{vreme plivanja}) + (\text{vreme pešačenja})$$

$$T = \frac{dužina\ preplivanog\ puta}{brzina\ plivanja} + \frac{dužina\ prepešačenog\ puta}{brzina\ pešačenja}$$

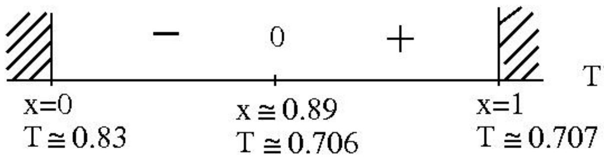
$$T = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1-x}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x$$

$$T' = \frac{1}{4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x - \frac{1}{3} = \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \; 3x = 2\sqrt{1+x^2} \quad /^2 \qquad \Longleftrightarrow \; 9x^2 = 4 + 4x^2 \; \Longleftrightarrow \; x^2 = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \approx \pm 0.89$$

$$x \neq -\frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ jer } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.89km$$

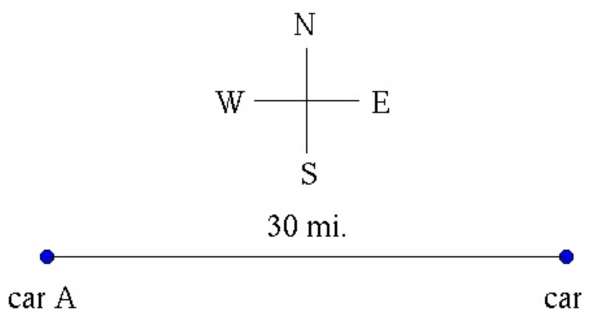


Slika 4: Tablica monotonosti za T

$$\Rightarrow \mathbf{T \approx 0.71h}$$

11. Automobil B je 30 metara istočno od automobila A i počinje kretanje na zapad brzinom $90\frac{m}{s}$. U istom trenutku automobil A počinje kretanje severno brzinom $60\frac{m}{s}$. Šta će biti najmanje rastojanje između automobila i u koje vreme t će se dostići minimum?

Rešenje:

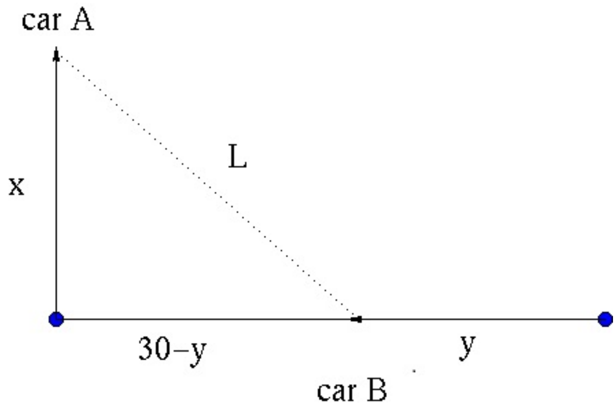


Slika 5: Početno rastojanje izmedju automobila A i B

Pretpostavimo da se automobili kreću sledećim brzinama:

$$A : 60\frac{m}{s} \text{ i } B : 90\frac{m}{s}$$

Neka je x put koji automobil A pređe za vreme t i neka je L udaljenost automobila A i B za vreme t.



Slika 6: Položaj automobila A i B posle vremena t

Tada je:

$$L = \sqrt{x^2 + (30 - y)^2}$$

Pre nego što diferenciramo, prepisaćemo desnu stranu kao funkciju od t. Podsetimo se da ako je brzina konstantna onda je :

$$\text{(dužina puta)} = \text{(brzina)(proteklo vreme)}$$

pa je za automobil A dužina puta za vreme t: $x = 60t$, a za automobil B: $y = 90t$

$$\Rightarrow L = \sqrt{(60t)^2 + (30 - 90t)^2} = \sqrt{3600t^2 + (30 - 90t)^2}$$

$$L' = \frac{1}{2}(3600t^2 + (30 - 90t)^2)^{-\frac{1}{2}}(7200t + 2(30 - 90t)(-90))$$

$$L' = \frac{23400t - 5400}{2\sqrt{3600t^2 + (30 - 90t)^2}} = 0$$

Pa je:

$$23400t - 5400 = 0 \Rightarrow t = \frac{5400}{23400} \approx 0.23$$

$$t \approx 0.23h = 13.8min$$

$$\Rightarrow x \approx 13.85km,\ y \approx 20.77km \Rightarrow \mathbf{L} \approx \mathbf{24.96km}$$

7 Problemi maksimuma i minimuma u teoriji grafova

Definicija 3. *Graf G je uređeni par (V, E), gde je $E \subseteq \binom{V}{2}$, gde je $\binom{V}{2}$ skup svih dvoelementnih podskupova skupa V. Elementi skupa V se zovu čvorovi, a elementi skupa E grane grafa G. Ako je $e = \{u, v\} \in E$, tada su u i v krajevi grane e, a kaže se i da su čvorovi u i v susedni.*

Definicija 4. *Šetnja W dužine k u grafu $G = (V, E)$ je niz $v_0, e_1, v_1, ..., e_k, v_k$ čvorova i grana tako da je $e_i = v_{i-1}v_i$ za $i = 1, 2, ..., k$. Čvorovi v_0 i v_k su krajnji čvorovi (krajevi) šetnje W. Staza je šetnja u kojoj se nijedna grana ne ponavlja. Put je šetnja u kojoj se nijedan čvor ne ponavlja. Kada je početni čvor šetnje jednak krajnjem čvoru, tada se šetnja naziva ciklus (kontura).*

Definicija 5. *Stablo je povezan graf bez kontura.*

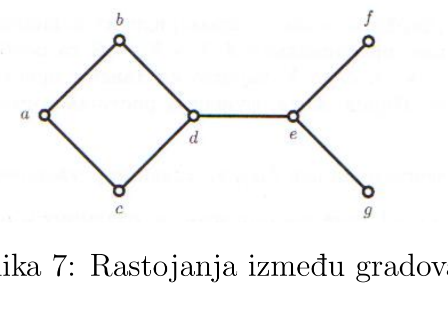
Definicija 6. *Čvorovi u i v grafa G su povezani ako u G postoji put čiji su krajnji čvorovi u i v.*

Teorema 4. *Povezan graf G sa n čvorova i tačno $n - 1$ grana je stablo.*

Definicija 7. *Ako su čvorovi u i v grafa G povezani, tada je rastojanje $d_G(u, v)$ od čvora u do čvora v jednako dužini najkraćeg puta izmedju čvorova u i v. Ako čvorovi u i v nisu povezani, onda je rastojanje $d_G(u, v) = \infty$. Eksentricitet $ecc(u)$ čvora u je najveće rastojanje od čvora u do svih ostalih čvorova.*

Zadaci:

12. Svaki od kružića na slici 7 predstavlja po jedan grad. Linije između kružića predstavljaju puteve između gradova, koji su svi dužine $1km$. Koji grad treba izabrati za prestonicu, tako da ukupna dužina svih puteva od ostalih gradova do prestonice bude minimalna?



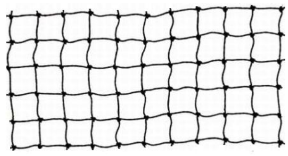
Slika 7: Rastojanja između gradova

Rešenje: Zamislimo gradove kao čvorove grafa, a puteve kao grane koje spajaju pojedine čvorove. Zadatak se svodi na određivanje centra grafa, pa je potrebno odrediti radijus, tj. najmanji ekscentricitet. Za to moramo odrediti rastojanje između svaka dva čvora grafa. Rastojanja između čvorova u grafu data su u tabeli na slici 8. U poslednjoj koloni se nalaze ekscentriciteti čvorova. Čvor koji ima najmanji ekscentricitet predstavljaće centar grafa pa za prestonicu treba izabrati grad d.

	a	b	c	d	e	f	g	ecc(v)
a	0	1	1	2	3	4	4	4
b	1	0	2	1	2	3	3	3
c	1	2	0	1	2	3	3	3
d	2	1	1	0	1	2	2	2
e	3	2	2	1	0	1	1	3
f	4	3	3	2	1	0	2	4
g	4	3	3	2	1	2	0	4

Slika 8: Rastojanja između svih čvorova u grafu

13. Koliko se najviše rezova može napraviti na odbojkaškoj mreži dimenzija 5x10? (slika 9), tako da se ona ne raspadne



Slika 9: Odbojkaska mreža

Rešenje: Posmatrajmo odbojkašku mrežu kao graf sa $66 = 11 \cdot 6$ čvorova i $115 = 11 \cdot 5 + 6 \cdot 10$ grana. Rezanje mreže predstavlja uklanjanje pojedinih grana. Zadatak se svodi na sledeći problem: Odrediti maksimalni podraf koji sadrži sve čvorove grafa i koji je stablo, jer uklanjanjem još jedne grane, dobijamo nepovezan graf, a dodavanjem bilo koje druge grane grafu dobijao konturu. Kako imamo 66 čvorova, to traženo stablo ima 65 grana, pa je najveći broj grana koji se može ukloniti a da pritom graf ostane povezan 50.