Metodika nastave matematike i računarstva

Vežbe

PRIMENA KOMPLEKSNIH BROJEVA U GEOMETRIJI

Studenti:

Lalić Radmila

Rašula Milica

Gavrilović Natalija

Jovanović Biljana

Todorović Rada

Tanasić Milica

1. Odrediti $|z|$ i arg(z) ako je:

$$z = \frac{\{\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\}}{\{-1+i\}} \quad \begin{matrix} \rightarrow z_1 \\ \rightarrow z_2 \end{matrix}$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja:

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta), \theta \in R,$

Ako je $\theta \in (-\pi, \pi)$, onda je $\theta = arg(z)$

z=a+ib , $a \in Re, b \in Im$

$|z| = \sqrt{(a)^2 + b^2}$ moduo

-Prvo ćemo algebarski izraz z2=(-1 + i) zapisati u trigonometrijskom obliku, a zatim izvršiti deljenje.

-1 + i = (-1, 1) , nalazi se u II kvadrantu

$b > 0, a < 0$

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arg(z2) = arctg\left(\frac{b}{a}\right) + \pi = arctg\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = arctg(-1) + \pi = \frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

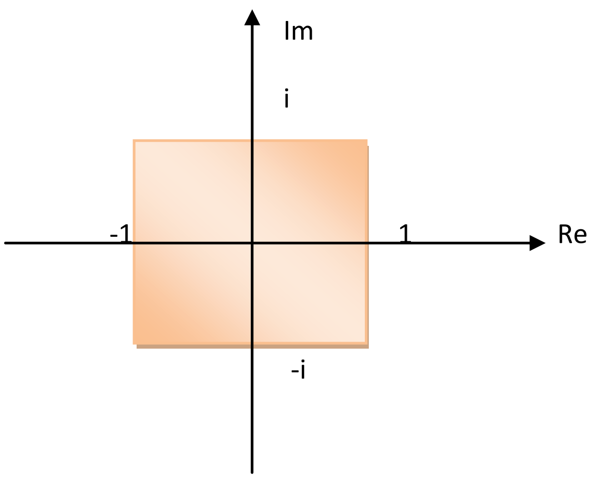
$$|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\sqrt{\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}}_{=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$arg(z) = -\frac{\pi}{2}$$

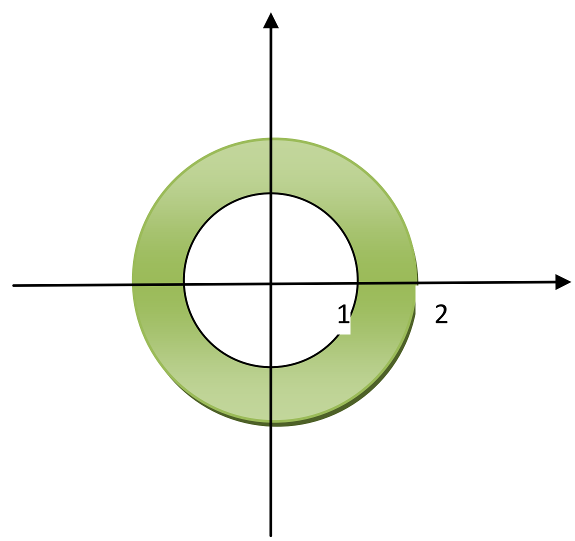
2. Predstaviti grafički u kompleksnoj ravni sve brojeve za koje važe uslovi:

a) $|\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{z})| \leq \mathbf{1}$ **i** $|\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{z})| \leq \mathbf{1}$

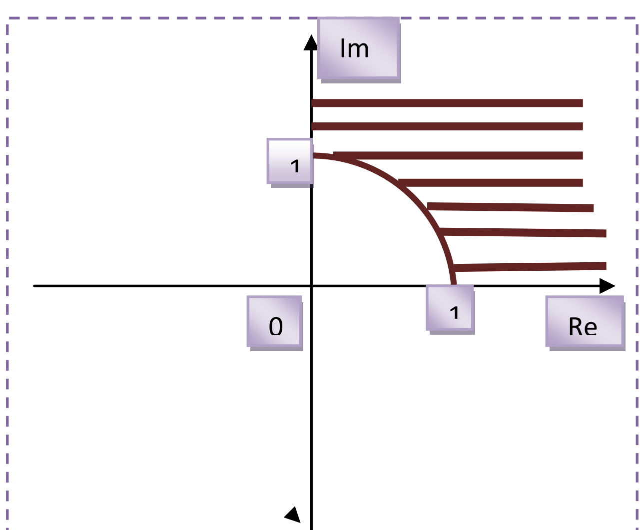
<=> $-1 \leq Re(\boldsymbol{z}) \leq \mathbf{1}$ **i** $\mathbf{-1} \leq \boldsymbol{Im}(\boldsymbol{z}) \leq \mathbf{1}$



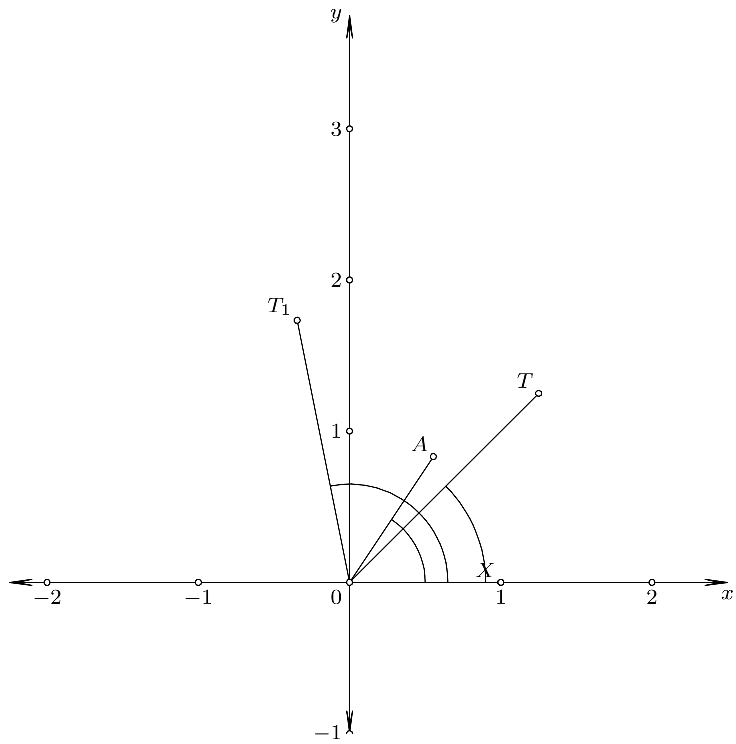
b) $\mathbf{1} \leq |\boldsymbol{Z}| \leq \mathbf{2}$



c) ***Re(z)***$\geq \mathbf{0}$ i ***Im(z)***$\geq \mathbf{0}$ i $|\boldsymbol{z}| \geq \mathbf{1}$

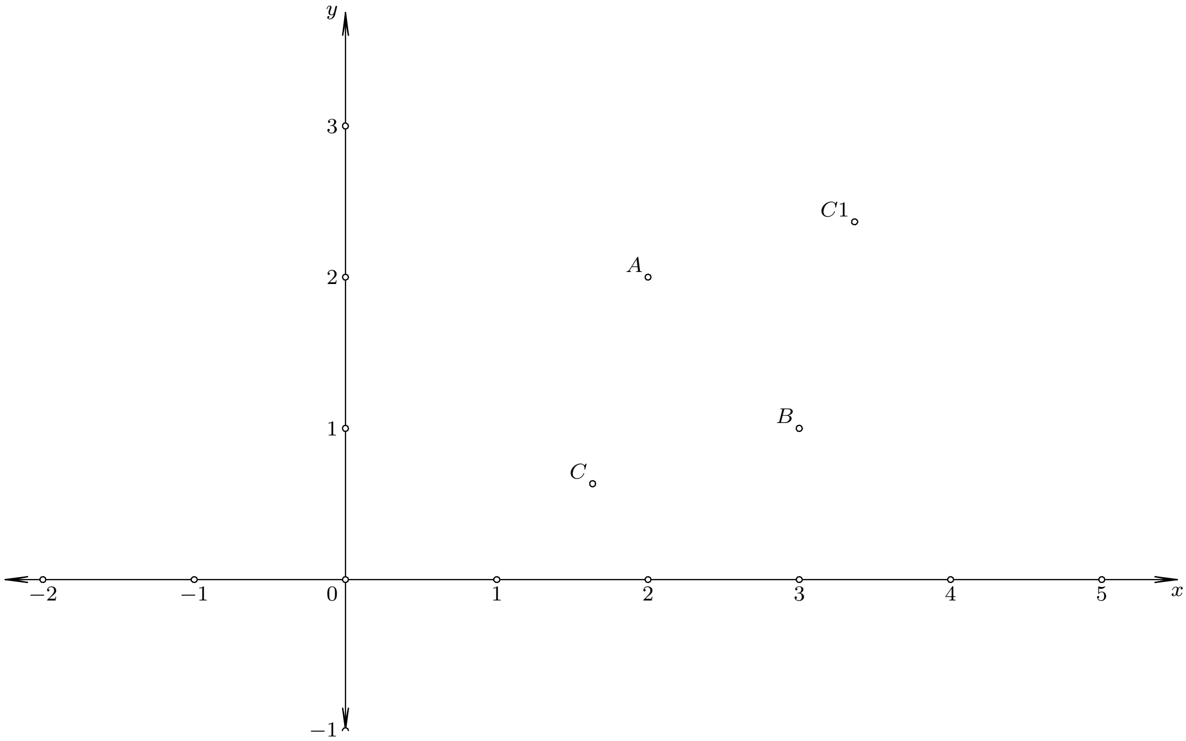


3. Razmotriti rotaciju kompleksnog broja z za orijentisani ugao α.
Rešenje:
Neka je dat kompleksan broj a sa jediničnog kruga, odnosno, takav da je $|a| = 1$, i neka je njegov zapis u trigonometrijskoj formi $a = cos\alpha + isin\alpha$.
Ma kakav da je kompleksan broj $z = r(cos\beta + isin\beta)$,
proizvod $z' = az$ je kompleksan broj:
$z' = az = r(cos(\alpha + \beta) + isin(\alpha + \beta))$.
Ako su T i T' u kompleksnoj ravni tačke koje odgovaraju, redom, kompleksnim brojevima z i $z' = az$, tada se tačka T' dobija rotacijom tačke T oko tačke O za orijentisani ugao α ($|z| = |z'|$). Pri tome, argument β' broja z' nalazi se kao $\alpha + \beta + 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, tako da $\beta' \in (-\pi, \pi]$.



4. U kompleksnoj ravni su data dva temena jednakostraničnog trougla. Pronaći treće teme.
Zadatak uraditi za zadate konkretne vrednosti temena $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 3 + i$

Rešenje:
Neka su date tačke A i B sa koordinatama z_1 i z_2. Zadatak ima 2 rešenja. Trougao $\triangle\ ABC_1$ je pozitivno orijentisan, a $\triangle\ ABC_2$ je negativno orijentisan.Tačku C_1 dobijamo kada tačku B rotiramo oko tačke A za ugao $\frac{\pi}{3}$, dok se C_2 dobija rotacijom tačke B oko tačke A za ugao $-\frac{\pi}{3}$.
Zato je $z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)e^{i\frac{\pi}{3}}$ $z_4 = z_1 + (z_2 - z_1)e^{-i\frac{\pi}{3}}$.



Primenićemo formulu na zadate konkretne vrednosti $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 3 + i$
:
$z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 + 2i + (1 - i)(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = \frac{5+\sqrt{3}}{2} + i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$
$z_4 = z_1 + (z_2 - z_1)e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2 + 2i + (1 - i)(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}) = \frac{5-\sqrt{3}}{2} + i\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

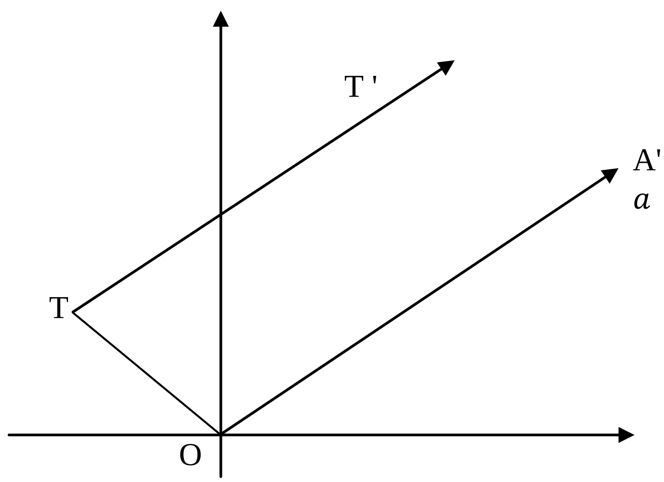
5.Razmotriti primer translacije.

Rešenje:

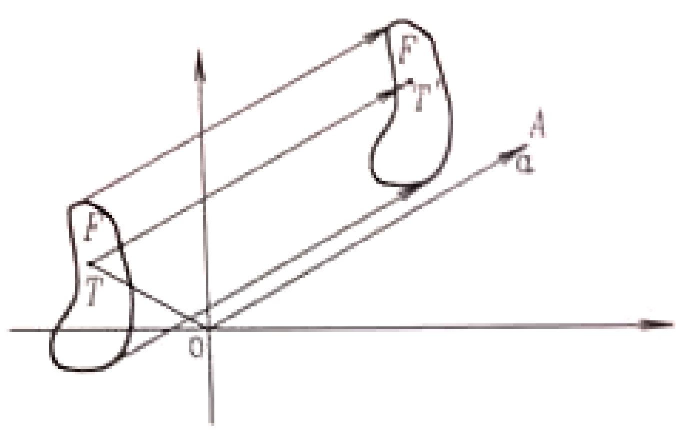
Neka je dat kompleksan broj $a = p + iq$. Ma kakav da je kompleksan broj $= x + iy$, zbir $z^{'} = z + a = x + p + i(y + q)$ je kompleksan broj čiji je vektor položaja u kompleksnoj ravni jednak zbiru vektora položaja brojeva z i a. Stoga će tačka $T(x, y)$, koja odgovara broju z, tim sabiranjem biti trasnlirana za vektor $\underset{OA}{\rightarrow}$, gde je $A(p, q)$, sl.9.
Ako je F neka figura u z-ravni, svaka tačka te figure će preslikavanjem

$$z \overset{'}{\to} z + a = z^{'}$$

biti trasnlirana za isti vektor, pa će figura F biti preslikana na njoj podudarnu figuru F', dobijenu translacijom za vektor $\underset{OA}{\rightarrow}$ figure F, sl.2. To preslikavanje je bijekcija.



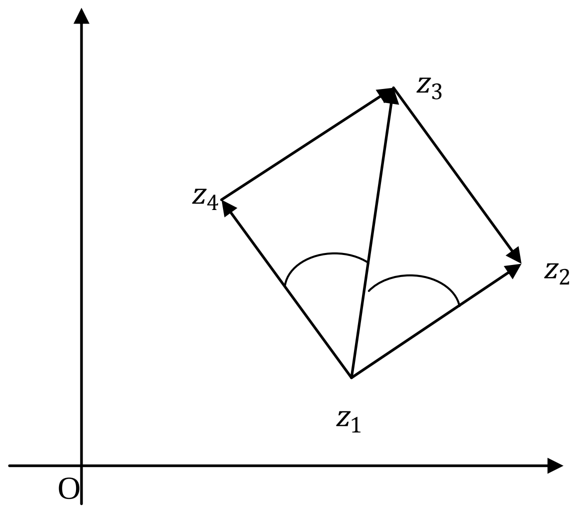
Sl.1



Sl.2

6. Ako su z_1 i z_3 dva naspramna temena jednog kvadrata u $\mathbb{C}$, odrediti položaj ostalih temena.

Rešenje:



Neka je $a \in \mathbb{C}$ proizvoljan kompleksan broj.
Tada je $a \to ae^{i\theta}$ rotacija za ugao θ oko koordinatnog početka

$$z_2 - z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_3 - z_1)e^{i(-\frac{\pi}{4})} \quad \leftarrow$$

$$z_4 - z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_3 - z_1)e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\boldsymbol{z_2 = z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(z_3 - z_1)e^{i(-\frac{\pi}{4})}}$$
$$\boldsymbol{z_4 = z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(z_3 - z_1)e^{i(-\frac{\pi}{4})}}$$

prvo smo translirali kvadrat t.d. teme z_1 dođe u koordinatni početak (translacija za -z_1), zatim rotirali za $-\frac{\pi}{4}$ i izvršili homotetiju jer je dijagonala $\sqrt{2}$ puta duža od stranice, a onda ponovo translirali za z_1.

7.Razmotriti primer homotetije.

Rešenje:

Neka je dat kompleksan broj z u trigonometrijskom obliku $z = r(cos\theta + isin\theta)$ i broj $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Posmatramo šta će se desiti u kompleksnoj ravni ako pomnožimo a i z.

$z' = az$ je takođe kompleksan broj. Videćemo da homotetijom slikamo tačku T ,koja predstavlja broj z u ravni, u tačku T' koja predstavlja broj z' u ravni.

Slučajevi koje posmatramo su:

1) $a > 0$

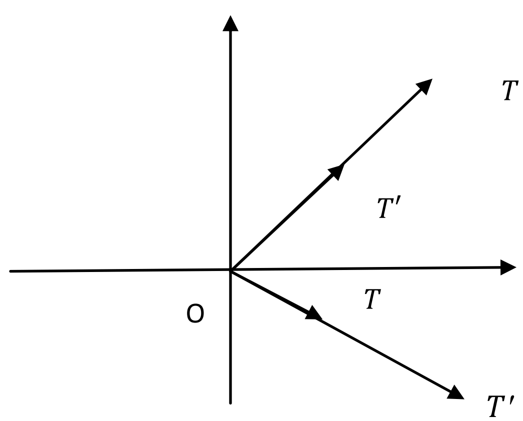
Ako važi da je $a > 0$ onda je $|z'| = ar$

pa sledi da će naša slika T' pripadati polupravoj OT (jer ostaje isti ugao).

a)Ako je $a > 1$ tada je T između O i T' , tj. važi raspored $\mathcal{B}(O, T, T')$.

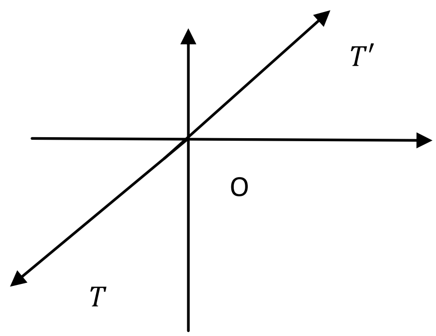
b)Ako je $0 < a < 1$ važi raspored $\mathcal{B}(O, T', T)$.

c)Ako je $a = 1$ onda je $T' \equiv T$.



2) $a < 0$

Ako je $a < 0$ onda znamo da važi da je $|a| = -a$, pa sledi da je $z' = ar(cos\theta + isin\theta) = |a|r(-cos\theta - isin\theta) = |a|r\big(\cos(\theta + \pi) + isin(\theta + \pi)\big)$, iz čega sledi da je $|z'| = |a|r$ i $\theta' = \theta + \pi$. Znači da je T' pripada pravoj OT, ali je raspored $\mathcal{B}(T, O, T')$. U ovom izrazu smo predstavili $-|a| = a$ da bismo dobili korektan zapis novog kompleksnog broja, jer je radijus broj koji je veći od nule i sredili smo uglove.



8.U kompleksnoj ravni dat je trougao POQ sa temenima P(2,0),O(0,0),Q(0,-4/3). Naći sliku tog trougla pri preslikavanju $\boldsymbol{z' = (1+i)z + i}$.

Rešenje:

Tražimo slike tačaka P,Q i O.

Prvo ćemo predstaviti $1+i$ u trigonometrijskom zapisu, to možemo da pročitamo i iz koordinatne ravni: $1+i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$. Sada posmatramo preslikavanje u ovom obliku: $z' = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)z + i$.

Posmatrajući primere rotacije, translacije i homotetije, možemo prvo da rotiramo tačku oko tačke O u koordinatnom sistemu za ugao $\pi/4$ zbog dela $\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)z$, zatim tu novu rotiranu tačku da preslikamo homotetijom sa koeficijentom $\sqrt{2}$, i na kraju da transliramo tu tačku zbog dela $+i$. (broj i ima koordinate(0,1) pa će se samo promeniti y koordinata za +1).

Rotacija:

-Tačka O ostaje fiksna

-Tačka P se slika u tačku P1 ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)

-Tačka Q se slika u tačku Q1($2\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}$)

Sve slike tačaka računamo geometrijski sa slike Pitagorinom teoremom i posmatrajući jednakokrake pravougle trouglove čija su dva ugla po $\pi/4$.

Homotetija(koeficijent je $\sqrt{2}$):

-Tačka O ostaje fiksna

-Tačka P1 se slika u tačku P2(2,2)

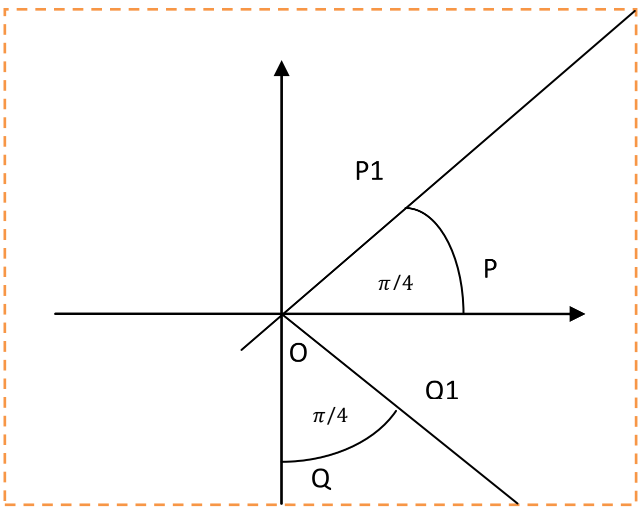
-Tačka Q1 se slika u tačku Q2(4/3,-4/3)

Translacija:

-Tačka O se slika u O3(0,1)

-Tačka P2 se slika u tačku P3(2,3)

-Tačka Q2 se slika u tačku Q3(4/3,-1/3)



9. Naći skup svih tačaka z u kompleksnoj ravni za koje je │ z -1│=│z+1│.

Rešenje:

Kako je z kompleksan broj, $z = x + iy$, Po definiciji modula imamo da je $|z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

i slično , $|z + 1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

Rešavamo jednačinu: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

Kvadriramo obe strane $(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2$

$x = 0$

Skup svih rešenja je imaginarna osa.

Isti zaključak smo mogli dobiti ukoliko shvatimo problem kao nalaženje tačaka kompleksne ravni koje su podjednako udaljene od tačaka 1 i -1.

10.Dokazati da su tačke z_1, z_2 *i* z_3 iz kompleksne ravni kolinearne akko je $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ realan.

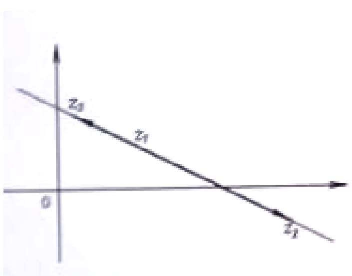
Rešenje:

Ako su tačke $\boldsymbol{z_1, z_2}$ ***i*** $\boldsymbol{z_3}$ kolinearne onda su vektori $\overrightarrow{\boldsymbol{z_1 z_2}}$ i $\overrightarrow{\boldsymbol{z_1 z_3}}$ istog ili suprotnog smera.

Stoga je ili $arg\ (\boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})= arg\ (\boldsymbol{z_3} - \boldsymbol{z_1})$

ili $arg\ (\boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})= arg\ (\boldsymbol{z_3} - \boldsymbol{z_1})+\pi$

ili $arg\ (\boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})= arg\ (\boldsymbol{z_3} - \boldsymbol{z_1})-\pi$.



Odatle sledi da je ili $arg\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}= arg\ (\boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})- arg\ (\boldsymbol{z_3} - \boldsymbol{z_1})= 0$

ili $arg\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}= arg\ (\boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})- arg\ (\boldsymbol{z_3} - \boldsymbol{z_1})= \pi$ (U trećem slučaju je razlika argumenata – π pa je argument količnika jednak π) što znači da je količnik $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ realan broj (pozitivan u prvom a negativan u drugom slučaju).

Važi i obrnuto; Svaki od koraka ovog dokaza može se obrnuti.

11. Odrediti GMT za koje je $\arg\bar{z}=\arg(-3+i\sqrt{3})$.

Rešenje:

$z=x+iy$ $\qquad$ $\bar{z}=x-iy$

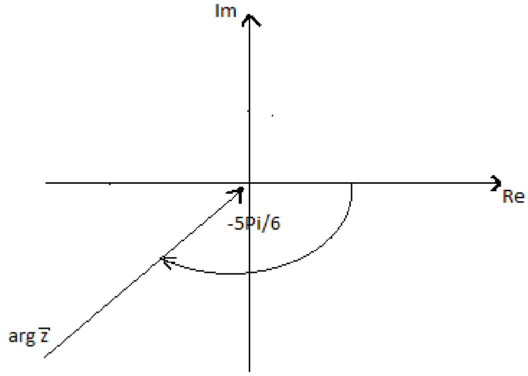
Ako je kompleksni broj predstavimo u trigonometrijskom obliku $z=r(\cos\Theta+i\sin\Theta)$, tada je:

$\bar{z}=r(\cos(-\Theta)+i\sin(-\Theta))$

arg $\bar{z}$=-Θ (jer je argument kompleksnog broja ugao koji prava Oz zaklapa sa realnom osom)

arg(-3+i$\sqrt{3}$)=arctg$\frac{\sqrt{3}}{-3} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$

Dakle sad imamo jednakost: -Θ = $\frac{5\pi}{6}$ odnosno Θ = a to znači da ćemo u kompleksnoj ravni imati polupravu arg $\bar{z}$ = - $\frac{5\pi}{6}$ koja sa realnom osom zaklapa ugao od - $\frac{5\pi}{6}$ i to bez početne tačke z=0 jer argz=0 nije definisan.



12. Neka su z_1 i z_2 kompleksni realni brojevi, koji nisu realni i zadovoljavaju $|z_1 - z_2|=2$ i $z_1 z_2 =1$. Dokazati da je četvorougao ABCD čija temena imaju kompleksne koordinate -1, z_1 ,1, z_2 jednakokraki trapez.

Rešenje:

Teorema: Neka su z_1 ,z_2 , z_3 i z_4 četiri različita kompleksna broja i njima odgovarajuće tačke u kompleksnoj ravni z_1 ,z_2 , z_3 i z_4 . Važi: ako z_1 ,z_2 , z_3 i z_4 pripadaju jednoj kružnoj liniji akko je broj $\frac{z1-z3}{z1-z4} = \frac{z2-z3}{z2-z4}$ realan.

Na osnovu teoreme: $\frac{1-z1}{1-z2} : \frac{-1-z1}{-1-z2} = \frac{1-z1}{1-z2} \frac{-(1+z1)}{-(1+z2)} = \frac{1+z2-z1-z1z2}{1+z1-z2-z1z2} = \frac{1+z2-z1-1}{1+z1-z2-1} = -1$ zaključujemo da tačke pripadaju krugu (u četvrtoj jednakosti smo iskoristili uslov $\mathbf{z_1 z_2 =1}$), dakle imamo tetivni četvorougao.

Primetimo da je rastojanje između 1 I -1 jednako 2 I iz uslova $|z_1 - z_2|$ **=2** znamo da su dijagonale jednake, pa tetivni četvorougao sa jednakim dijagonalama jeste jednakokraki trapez.