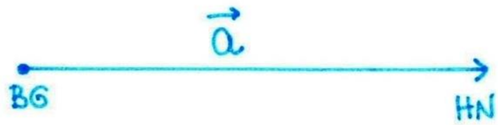
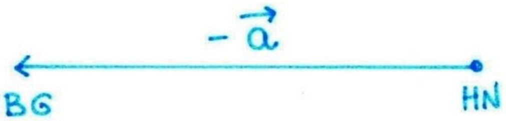
Vektori

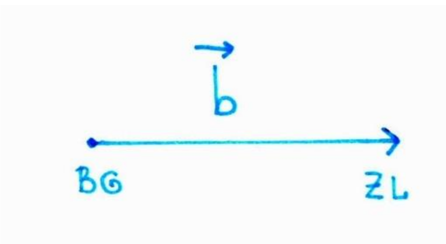
Zamislite da živite u Beogradu I da želite da odete avionom u Herceg Novi na more. Ukoliko biste povezali trenutno nalazište i željenu destinaciju, obrazovali biste vektor:
#slika:



Pošto biste putovali iz Beograda ka Heceg Novom, označena strelica predstavljala bi smer vektora. Razdaljina između Beograda i Herceg Novog je 550km i predstavlja intenzitet vektora. Kada biste se nakon završenog letovanja vraćali iz Herceg Novog za Beograd, vaš put obrazovao bi vektor istog pravca i intenziteta ali suprotnog smera u odnosu na početni vektor a koji se obeležava sa -a.
#slika:



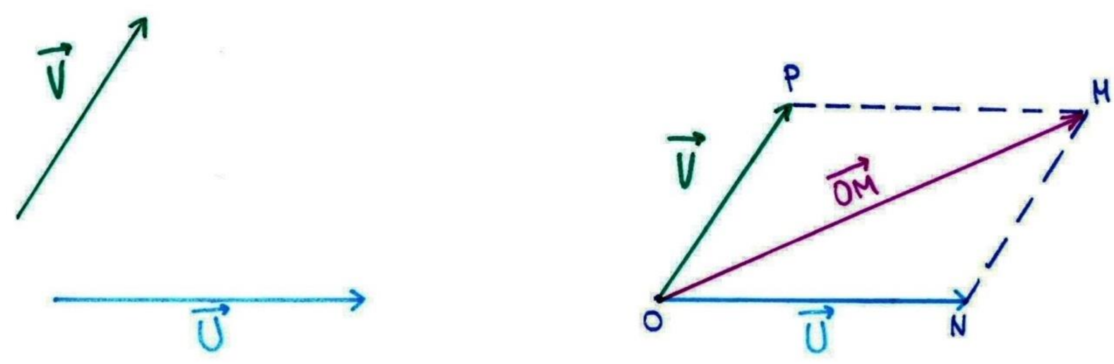
Ukoliko biste kasnije te godine poželeli da odete iz Beograda na Zlatar, vaš put bi obrazovao vektor b:
#slika:



Vektori a I b su, kao što vidimo sa slike, istog pravca i smera ali različitog intenziteta jer je razdaljina između Beograda I Zlatara manja I iznosi 230 km.

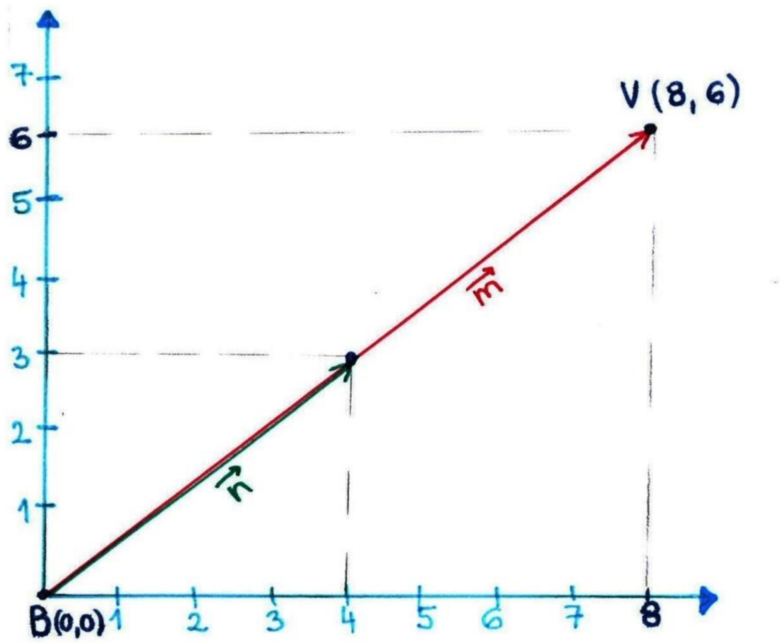
1. Neka vektor u predstavlja rastojanje između Niša i Leskovca i neka je vektor v rastojanje između Leskovca i Prištine. Odrediti vektor u + v , odnosno rastojanje između Niša i Prištine.

#slika:



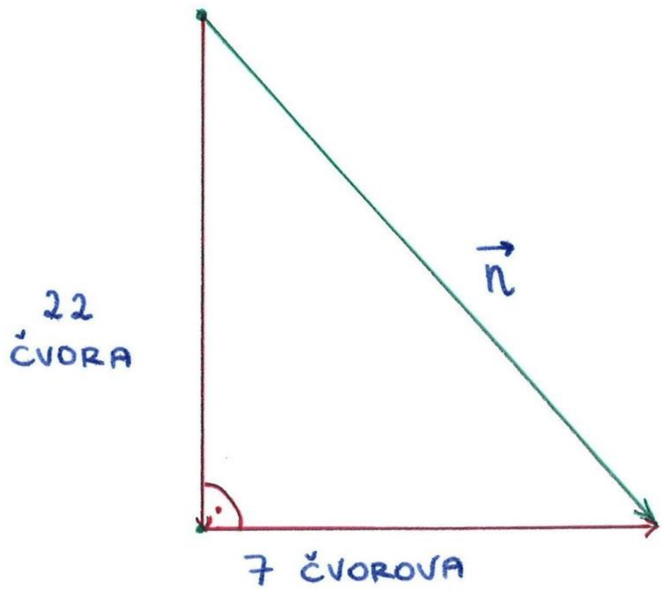
Objašnjenje: Nacrtmo sa strane vektore u i v . Dovedemo ih na zajednički početak i obeležimo taj početak slovom O. Docrtamo paralelogram koji obrazuju naši vektori i njima paralelne naspramne stranice. Obeležimo temena paralelograma sa O, N, M i P redom. Vektor OM, odnosno duža dijagonala paralelograma sa slike, biće traženi vektor i rastojanje između gradova Niša i Prištine.

2. Želimo da predstavimo dva grada, Beograd i Vršac, u Dekartovom koordinatnom sistemu. Neka je Beograd tačka B(0,0) i Vršac tačka V(8,6). Koje su koordinate grada koji se nalazi na pola puta između Beograda i Vršca?
#slika:



Objašnjenje: Vektor koji predstavlja razdaljinu između Beograda i Vršca biće označen sa m. Traženi vektor ćemo označiti sa n. Traženi grad će biti tačka u Dekartoovom koordinatnom sistemu koja će ležati na pola putu između Beograda i Vršca, odnosno tački B i V. To znači da će koeficijent pravca vektora n biti ½. Koordinate novog grada onda dobijamo jednostavno:
½ * (8,6)=(4,3) Novi grad ima koordinate (4,3) i ako pogledamo kartu-to je Banatsko Novo selo.

3. Zamislite da jedrite Boko Kotorskim zalivom. Vaš jedrenjak se kreće brzinom od 22 čvora i ide ka jugu. Duva zapadni vetar i to brzinom od 7 čvorova. Kojom brzinom će ići vaš jedrenjak?
veća slika:



#Objašnjenje: Ako traženu brzinu obeležimo sa n , onda mi zapravo tražimo intenzitet tog vektora. Sa slike vidimo da trenutna brzina jedrenjaka i brzina zapadnog vektora obrazuju pravougli trougao sa rezultujućim vektorom. Traženi intenzitet vektora n se dobija preko Pitagorine teoreme:

In*nI=7*7+22*22

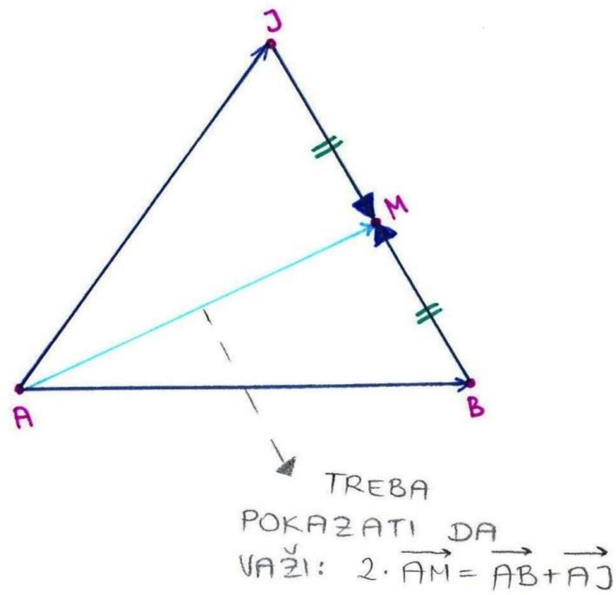
In*nI=533

InI= 23 čvora

Zbog relativno jakog zapadnog vetra, naš jedrenjak će ići brzinom od 23 čvora.

4. Ana, Bojan i Jovan žive u Kaluđerici. Njihove kuće su raspoređene na način prikazan na slici. Marija je Anina najbolja drugarica i živi na pola puta između Bojana i Jovana. Pokazati da će Ana preći istu razdaljinu kada ode do Bojana i kada ode do Jovana kao i kada dva puta poseti Mariju.

#slika:



#Objašnjenje: Anina, Bojanova i Jovanova kuća predstavljaju temena trougla obeleženog sa A, B i J. Marija kuća je središte stranice BJ jer se nalazi na pola puta između Bojanove i Jovanove kuće. Na osnovu slike, vidimo da vektor AM možemo da predstavimo na dva načina:

AM=AB+BM

AM=AC+CM

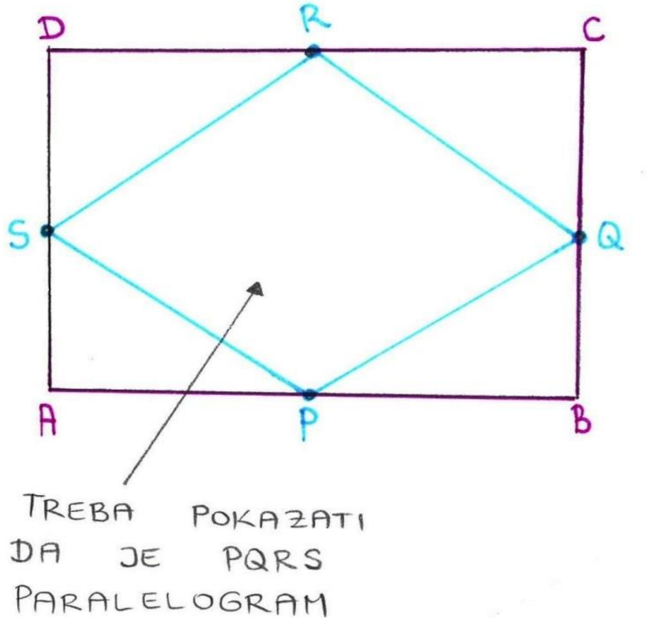
Ono što treba da pokažemo je: AB+AC=2*AM. Ukoliko saberemo ove dve relacije vezane za vektor AM, dobijamo:

2*AM=AB+BC+BM+CM=AB+BC+0=AB + BC

Kada povežemo početak i kraj, dobijamo: AB+AC=2*AM, što je trebalo dokazati. U ovom zadatku se po prvi put pojavljuje nula vektor. Dobijen je kao zbir kretanja dva vektora istog pravca i intenziteta a suprotnog smera, a to su vektori BM i CM, kao što sa slike i možemo da vidimo.

6. Pokazati da tačke P,Q, R, S koje su središta četvorougla ABCD obrazuju paralelogram.

#slika:



#Objašnjenje: Da se podsetimo: da bi četvorougao bio paralelogram, mora da ima međusobno paralelne naspramne stranice. Zbog načina na koji su zadate tačke P, Q, R, S znamo da važe relacije:

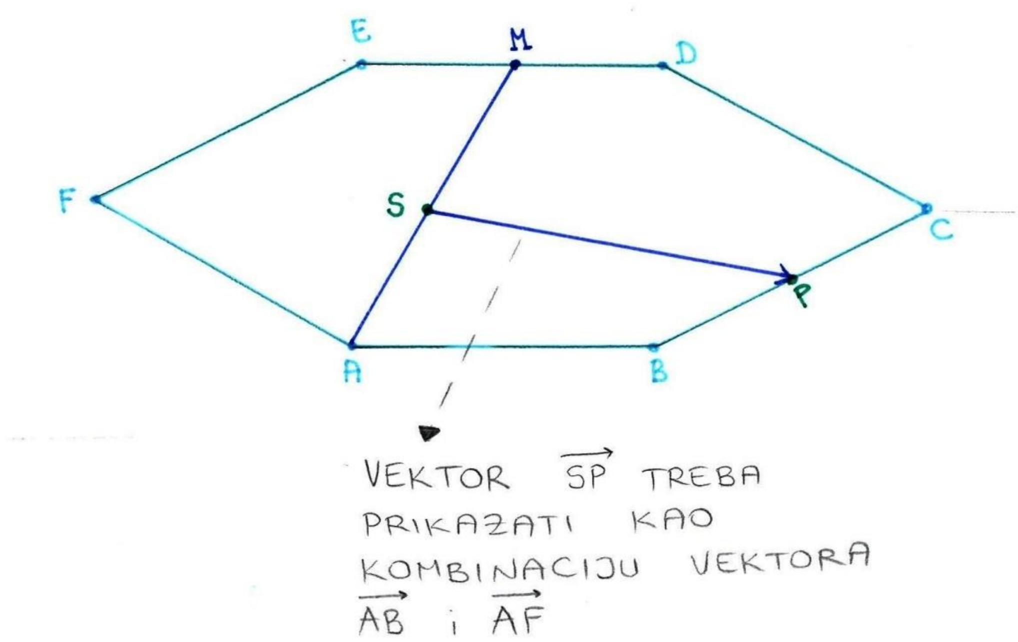
$P=(A+B)/2$ $R=(C+D)/2$ $P+R=(A+B+C+D)/2$

$Q=(B+C)/2$ $S=(A+D)/2$ $Q+S=(A+B+C+D)/2$

Pošto važi: $P+R=Q+S$ PQRS jeste paralelogram.

7. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Neka je M=S(DE), S=S(AM) i P=S(BC). Razložiti vektor SP po vektorima AB i AF.

#slika:



#Objašnjenje: Na osnovu slike i zadatka 1, vidimo da se vektor SP može razložiti kao:

SP= SM + MD + DC + CP (1)

Sa slike 1 vidimo da isti ovaj vektor možemo zapisati u obliku:

SP=SA + AB + BP (2)

Ukoliko saberemo relacije (1) i (2), vidimo da:

2*SP=MD + DC + AB=(3⁄2)*AB - AF (3)

Sređujući relaciju (3), odnosno množeći ceo izraz sa ½, konačno dobijamo:

SP=(3⁄4)*AB-(1⁄2)*AF (4)

Pošto je u relaciji (4) vektor SP predtavljen preko vektora AB i AF, to je njegovo traženo razlaganje.

MATEMATIČKI FAKULTET BEOGRAD

METODIKA NASTAVE

TROUGAO, ČETVOROUGAO, MNOGOUGAO, KRUG

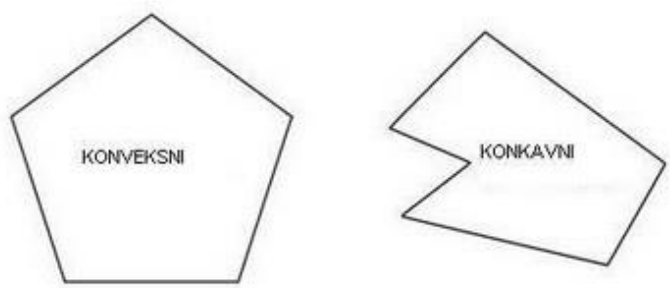
Student: Tamara Pavlović 196/2011

Trougao, četvorougao, mnogougao, krug

Oblasti trougao, četvorougao, mnogougao i krug su veoma važne oblasti matematike. Sa njihovim osobinama upoznajemo se još u osnovnoj školi, ali su one neophodne za dalje proučavanje geometrije naročito kroz srednju školu. U ovom radu prikazaćemo osnovne formule i osobine koje su potrebne za izradu zadataka za prvi razred srednje škole, kao i zanimljive primere kojima bi mogli da približimo osnovcima, neke od značajnih osobina ovih oblasti.

Mnogougaona (poligonalna) linija ili izlomljena linija je niz duži koje su nadovezane jedna na drugu. Te duži se zovu stranice. Tačka zajednička dvema uzastopnim stranicama zove se teme. Tačke na slobodnom kraju prve i poslednje stranice zovu se krajevi mnogougaone linije.

Mnogougao je unija jedne mnogougaone linije i njene unutrašnje oblasti. Prema broju stranica razlikujemo trouglove (tri stranice), četvorouglove (četiri stranice), itd. Mnogougao može biti konveksan ili nekonveksan. Mnogougao je konveksan ako se ceo nalazi sa iste strane prave na kojoj leži bilo koja njegova stranica (trougao je uvek konveksan). Mnogougao koji nije konveksan je nekonveksan ili konavan. Takav mnogougao može sam sebe da seče.



Trougao

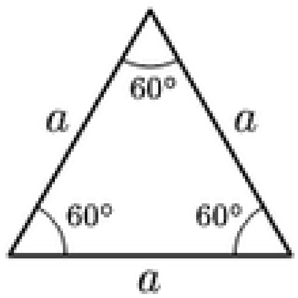
Uglovi trouglova:

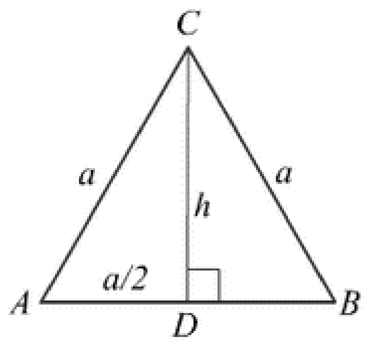
1. Zbir unutrašnjih uglova trougla jednak je opruženom uglu.
2. Uglovi suplementni unutrašnjim uglovima trougla zovu se spoljašnji uglovi trougla. Zbir spoljašnjih uglova trougla jednak je punom uglu.
3. Spoljašnji ugao trougla jednak je zbiru dva nesusedna unutrašnja ugla.

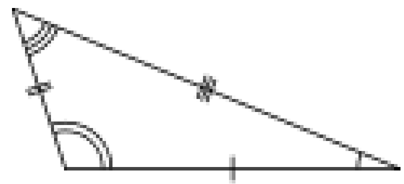
Trouglove delimo prema stranicama i uglovima.

Prema stranicama ih delimo na :

1. Jednakostranične
2. Jednakokrake
3. Nejednakostranične

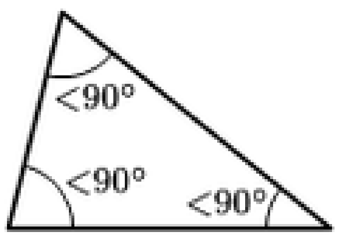


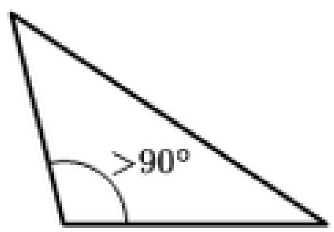


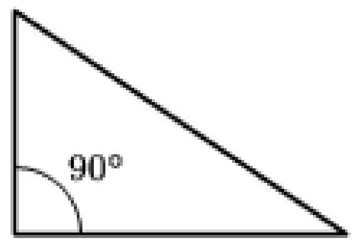


Prema uglovima ih delimo na:

1. Oštrougle
2. Tupougle
3. Pravougle





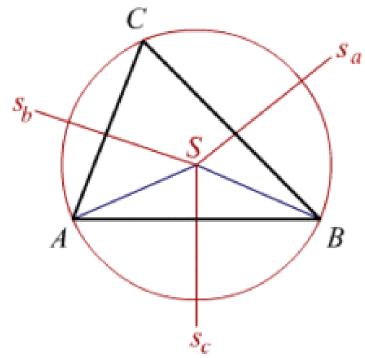


Odnos stranica i uglova u trouglu:

1. Ma koja stranica trougla manja je od zbira, a veća od razlike ostale dve stranice.
2. Naspram jednakih stranica nalaze se jednaki uglovi i obrnuto.
3. Naspram veće stranice nalazi se veći ugao i obrnuto.
4. Naspram manje stranice trougla leži oštar ugao trougla.
5. Najduža stranica tupouglog trougla je naspram tupog ugla.

Značajne tačke trougla:

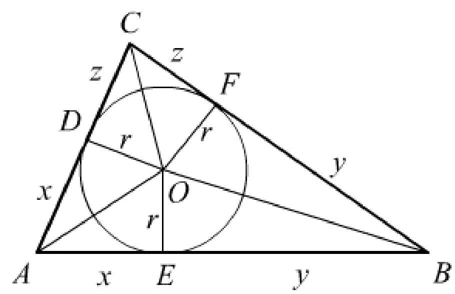
1. Oko svakog trougla postoji kružnica koja sadrži njegova temena. To se zasniva na činjenici da se simetrale stranica svakog trougla seku u jednoj tački koja predstavlja centar opisanog kruga oko trougla.



Primer 1:

U osmišljavanju plana naselja koje se sastoji od tri solitera (nekolinearna), potrebno je odrediti gde treba izgraditi igralište tako da bude na istoj razdaljini od sve tri zgrade. Igralište bi trebalo izgraditi u tački centra opisanog kruga oko tri solitera.

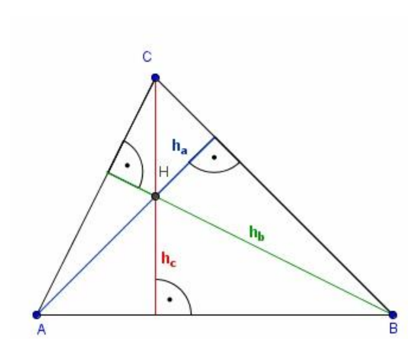
2. Simetrale unutrašnjih uglova trougla seku se u jednoj tački. Ta tačka je jednako udaljena od stranica trougla, te je centar kružnice koja ih dodiruje, odnosno centar upisanog kruga u trouglu.



Primer 2:

Deo bašte ograđen je trougaonom ogradom. Treba zasaditi drvo tako da bude podjednako udaljeno od sve tri strane ograde. Drvo bi na osnovu prethodnog trebalo zasaditi u centru upisanog kruga trougaone ograde.

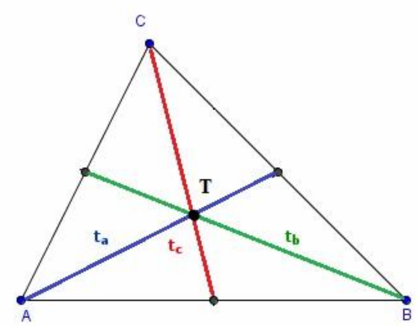
3. Ortocentar trougla je presečna tačka visina trougla.



Primer 3:

Nikola se takmiči na biciklističkoj trci kroz državu. Staza je trougaona (sa oštrim uglovima). Nikolina mama želi da vidi sina kako vozi bicikl na svakom pravom delu staze, pritom želi da pređe minimalnu moguću razdaljinu. Ona povezuje svako teme staze sa ortocentrom i gleda gde svaka linija susreće suprotan deo staze. Na ovaj način je pronašla tri tačke sa kojih može da posmatra sina tokom trke, a da pritom pređe najmanju moguću razdaljinu.

4. Težišne linije ili duži trougla su duži koje spajaju temena sa sredinama naspramnih stranica. Težište trougla je presečna tačka težišnih duži u trouglu (težišne duži trougla seku se u odnosu 2:1)



Težišne linije trougla dele trougao na šest trouglova jednakih površina.

Primer 4:

Potrebno je ofarbati trougaonu konstrukciju, a na raspolaganju imamo istu količinu šest različitih boja. Na koji način bi mogli da upotrebimo sve boje prilikom farbanja? Znamo da težišne linije trougla dele trougao na šest trouglova jednakih površina. Na osnovu toga, korišćenjem težišnih duži možemo ofarbati konstrukciju.

Četvorougao, mnogougao

Osnovne osobine četvorougla, mnogougla:

1. Zbir unutrašnjih uglova četvorougla jednak je punom uglu.
2. Zbir spoljašnjih uglova četvorougla jednak je punom uglu.
3. Četvorougao je paralelogram ako i samo ako važi bilo koji od navedenih uslova:
   - uglovi na svakoj stranici su suplementni

- oba para naspramnih uglova su parovi međusobno jednakih uglova
- oba para naspramnih stranica su parovi međusobno jednakih stranica
- dijagonale se uzajamno polove

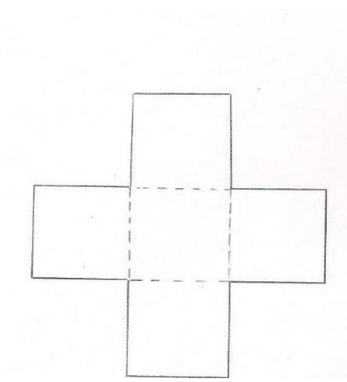
Mnogougao

Mnogougao je moguće predstaviti veoma lepo preko razlaganja nekog mnogougla na manje i poznatije mnogouglove. To se može čak povezati sa primenom u građevinarstvu, što je u poznatom okruženju za učenike, a to je postavljanje parketa u sobi ili učionici, zatim postavljanje pločica u kupatilo i to posebno ako se stavlja u neki neobičan položaj. Sledeći zadatak bi mogao da bude zanimljiv učenicima osnovne škole.

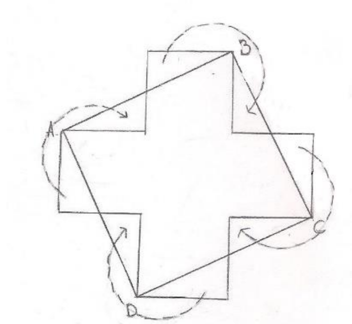
Grčki krst je figura sastavljena od pet podudarnih kvadrata, sledeći rebus potiče još iz drevne Indije.

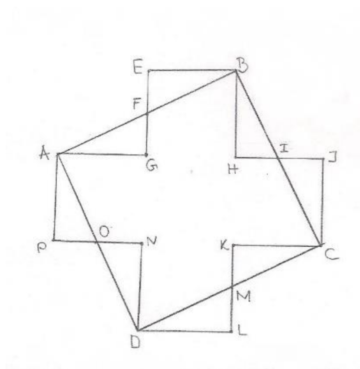
Zadatak 1:

Raseći grčki krst na delove od kojih se može sastaviti kvadrat (bez poklapanja unutrašnjih tačaka delova i bez praznina među delovima).



Rešenje je predstavljeno na slici, ali ćemo ipak dokazati da je četvorougao ABCD kvadrat i da se može sastaviti od pet delova na koje se grčki krst raspao pri povlačenju duži AB, BC, CD, DA.





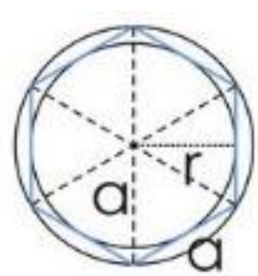
Dokaz:

Neka je $GH = a$. Tako je $AB^2 = (2a)^2 + a^2$, tj. $AB^2 = 5a^2$, a tako i $BC^2 = 5a^2$, $CD^2 = 5a^2$ i $DA^2 = 5a^2$. Odatle sledi da je $AB = BC = CD = DA = a\sqrt{5}$. Kako je AB dijagonala nekog pravougaonika čije su stranice 2a i a onda sledi da AB seče EG u F, pa je F središte duži EG i odatle je $EF = HI = KM = ON$. Kada posmatramo trouglove EFB i HIB uočavamo da je $EB = BH = a$, $\angle FEB = \angle BHI = 90°$, kao i $FE = HI = a/2$, pa iz podudarnosti trouglova sledi da su trouglovi EFB i HIB podudarni, kao i da su trouglovi CMK, LDM, OND, OPA, AGF svi između sebe podudarni. Iz te podudarnosti sledi da su $\angle EFB = \angle HBI$, a odatle opet sledi: $90° = \angle EBH = \angle EBF + \angle ABH = \angle HBI + \angle ABH = \angle ABI = \angle ABC$. Takođe su i ostali uglovi četvorougla jednaki 90°, pa je dokazano da je četvorougao ABCD kvadrat, kao i da se može sastaviti od tih pet delova na koje se grčki krst raspao povlačenjem duži AB, BC, CD, DA.

Osnovne formule:

1. Broj svih dijagonala iz jednog temena mnogougla od n stranica je $d_n = n - 3$.
2. Broj svih dijagonala n-tougla je $D_n = n(n - 3)/2$ (Iz svakog temena mnogougla možemo povući $n - 3$ dijagonale, kako naš mnogougao ima n temena, ako iz svakog temena povučemo po $n - 3$ dijagonale dolazimo do formule $n(n - 3)$, ali kako su svake dve dijagonale iste broj svih dijagonala n-tougla je $n(n - 3)/2$.)
3. Zbir svih unutrašnjih uglova n-tougla je $S_n = (n - 2) * 180°$

   Mnogougao čije su sve stranice i svi uglovi jednaki naziva se pravilan mnogougao.



4. Centralni ugao pravilnog n-tougla je $\vartheta = 360°/n$
5. Unutrašnji ugao pravilnog n-tougla je $\alpha = ((n - 2) * 180°)/n$
6. Spoljašnji ugao pravilnog n-tougla je $\beta = 360°/n$

Kao što smo već rekli, mnogouglove je moguće veoma lepo predstaviti preko manjih i poznatijih mnogouglova. Pravilni mnogougao možemo predstaviti preko jednakostraničnih trouglova i na taj način lako dolazimo do navedenih formula.

Kružna linija (kružnica, krug)

Osnovne osobine:

Periferijski ugao. Ugao čije teme pripada kružnoj liniji k, a kraci su tetive tog kruga, zove se periferijski ugao kružne linije k.

Centralni ugao. Ugao čije je teme centar kružne linije zove se centralni ugao.

- centralni ugao je dva puta veći od odgovarajućeg periferijskog ugla
- svi periferijski uglovi nad istim lukom neke kružne linije jednaki su ili suplementni
- periferijski ugao nad prečnikom je prav
- trougao čija je jedna stranica prečnik opisanog kruga je pravougli

Tangentni ugao. Ugao između tetive AB i tangente t jednak je periferijskom uglu nad tetivom AB.

Tetivni četvorougao je četvorougao oko kojeg se može opisati krug.

- naspramni uglovi kod tetivnog četvorougla su suplementni

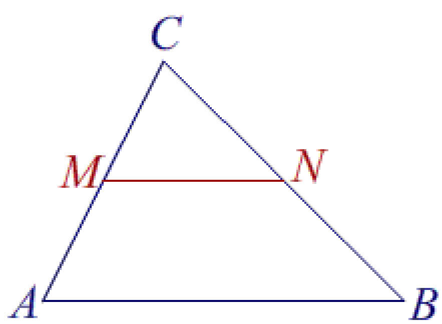
Tangentni četvorougao je četvorougao u koji se može upisati krug.

- kod tangentnog četvorougla zbir naspramnih stranica je jednak

Zadaci za prvi razred srednje škole iz trougla

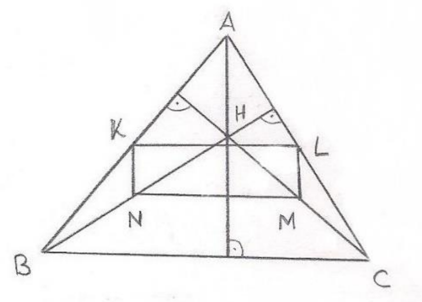
U zadacima ćemo koristiti sledeću činjenicu.

SREDNJA LINIJA TROUGLA. Ako su M i N središta duži CA i CB redom trougla ABC onda važi da je AB paralelno sa MN i MN = ½*AB.



Zadatak 1:

Neka je H ortocentar trougla ABC. Ako su K, L, M, N redom središta duži AB, AC,HC i HB dokazati da je četvorougao KLMN pravougaonik.

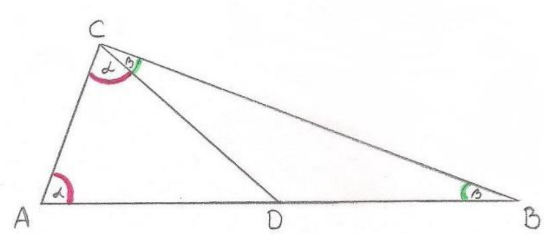


REŠENJE:

Duži KL i MN su srednje linije trouglova ABC i HBC i odgovaraju istoj ivici BC, pa su kao takve podudarne i paralelne (KL = MN = ½*BC i KL i MN su paralelene sa BC). Dakle, četvorougao KLMN je paralelogram. Dovoljno je dokazati još i da mu je jedan ugao prav. Duž KN je srednja linija trougla ABH, pa je paralelna sa AH tj. sa visinom trougla iz temena A. Dakle, KN je upravna na ivici BC, odnosno njoj paralelnoj duži KL, pa je paralelogram KLMN zaista pravougaonik.

Zadatak 2:

a) Ako je dužina medijane trougla jednaka polovini dužine odgovarajuće stranice, tada je trougao pravougli.
b) U pravouglom trouglu dužina medijane , koja odgovara hipotenuzi, jednaka je polovini dužine hipotenuze.



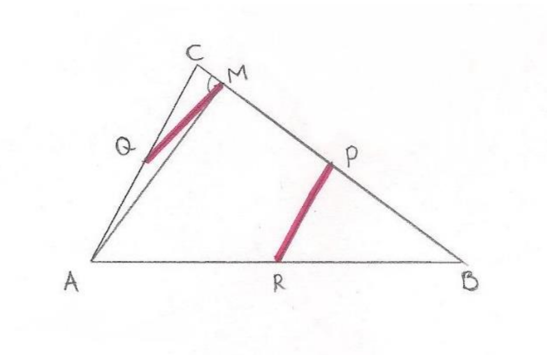
REŠENJE:

a) Označimo $\angle CAD = \alpha$ i $\angle CBD = \beta$. Znamo da je AD = DC = BD. Odatle vidimo da su trouglovi ADC i BCD jednakokraki, pa je $\angle CAD = \angle ACD = \alpha$ i $\angle DCB = \angle DBC = \beta$. Zbir uglova u trouglu ABC je $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 2(\alpha + \beta) = 180°$, pa je odatle $\alpha + \beta = 90°$. Odavde sledi da je trougao ABC pravougli.

b) Neka je u trouglu ABC, $\angle C = 90°$ i AD = DB. Neka je E tačka takva da je C – D – E i DE = CD. Tada je trougao ADE podudaran trouglu BDC (po dve jednake stranice i ugao između njih). Odavde je ugao $\angle DCB = \angle DEA$, pa je AE paralelno sa CB, pa kako je BC normalno na AC, to je EA normalno na AC. Pravougli trouglovi ABC i EAC su, tada, podudarni, pa su njihove hipotenuze AB i CE jednakih dužina. Odavde sledi da je CD = ½*AB.

Zadatak 3:

Neka su P, Q i R redom središta stranica BC, CA, AB trougla ABC i neka je M podnožje visine iz temena A. Dokazati da je MQ = PR.



REŠENJE:

MQ = AC/2 jer je trougao AMC pravougli, a PR = AC/2 kao srednja linija trougla ABC, odavde sledi da je MQ = PR.

Zadatak 4:

Dokazati da svaki oštrougli trougao ima dva ugla čija je razlika manja od 30°.

REŠENJE:

Pretpostavimo suprotno

$$\alpha - \beta \geq 30°$$
$$\beta - \gamma \geq 30°$$

Tada je $\alpha - \gamma \geq 60°$, pa je $180° = \alpha + \beta + \gamma \geq \beta + 2\gamma + 60°$ tj. $\beta + 2\gamma \leq 120°$. Odavde i iz $\beta - \gamma \geq 30°$ sledi $\gamma \leq 30°$, odnosno $\alpha + \beta \geq 150°$. Kako je $\alpha - \beta \geq 30°$, dobijamo da je $\alpha \geq 90°$, što protivreči uslovu da je trougao oštrougli.

Zadaci za prvi razred srednje škole iz četvorougla i mnogougla

Zadatak 1:

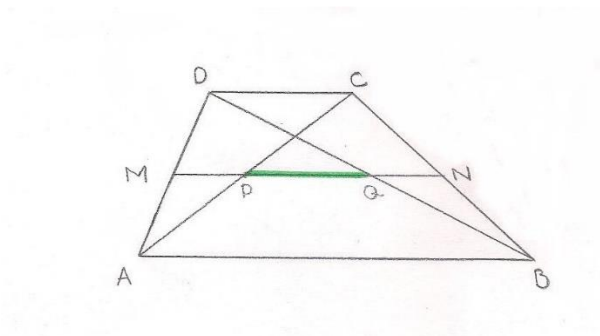
Koliko najviše oštrih uglova može imati konveksan mnogougao?

REŠENJE:

Zbir spoljašnjih uglova konveksnog mnogougla je 360°, pa takav mnogougao može imati najviše tri tupa spoljašnja ugla i prema tome najviše tri oštra unutrašnja ugla. Oštrougli trouglovi su, na primer, konveksni mnogouglovi sa tri oštra ugla.

Zadatak 2:

Ako su P i Q tačke u kojima srednja linija paralelna osnovicama seče dijagonale trapeza, dokazati da je duž PQ jednaka polurazlici osnovica.

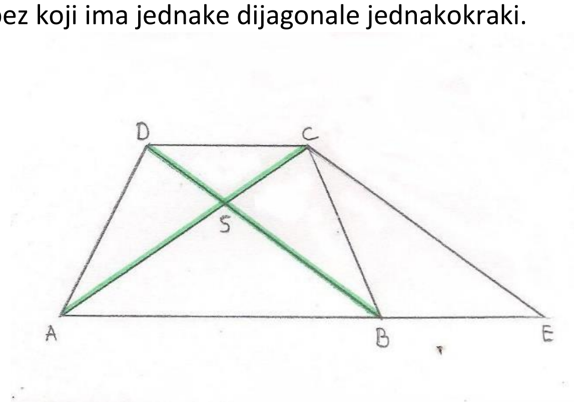


REŠENJE:

MP i MQ su srednje linija trouglova CDA i ABD, odatle je MP = ½*CD, a MQ = ½*AB. Kako je PQ = MQ - MP, to je PQ = MQ - MP = (AB - CD)/2.

Zadatak 3:

Dokazati da je trapez koji ima jednake dijagonale jednakokraki.

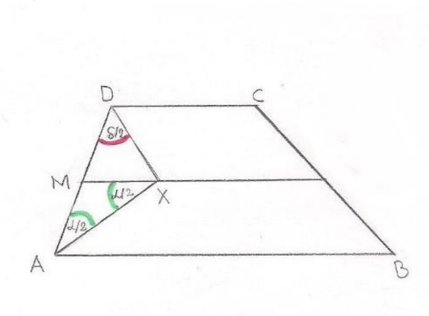


REŠENJE:

Docrtajmo tačku E tako da je BE = CD. Kako je BE = CD i BE paralelno sa CD, sledi da je BECD paralelogram. Kako je AC = CE, to je trougao ACE jednakokraki. Trouglovi ABS i CDS su takođe jednakokraki. Sad iz SA = SB i SC = SD sledi da je trougao ASD podudaran trouglu BSC, pa je AD = BC.

Zadatak 4:

Simetrale unutrašnjih uglova na jednoj od bočnih stranica trapeza seku se pod pravim uglom u tački koja pripada srednjoj duži tog trapeza. Dokazati.

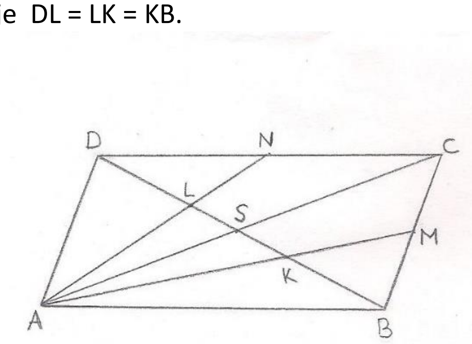


REŠENJE:

Da je $\angle X = 90°$ sledi neposredno iz činjenice da su $\angle A = \alpha$ i $\angle B = \beta$ suplementni.
$\angle X = 180° - (\alpha/2 + \delta/2) = 90°$
Neka je M je središte duži AD. Težišna duž MX pravouglog trougla AXD jednaka je polovini hipotenuze pa je MX = MA =MD, dakle trougao AXM je jednakokraki i $\angle AXM = \angle XAM$ odakle sledi da je MX paralelno sa AB (uglovi sa paralelnim kracima). Tačka X pripada srednjoj duži trapeza.

Zadatak 5:

Neka su M i N središta stranica BC i CD paralelograma ABCD. Prave AM i AN seku dijagonalu BD u tačkama K i L. Dokazati da je DL = LK = KB.



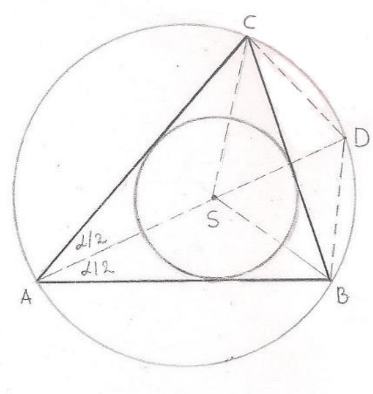
REŠENJE:

Docrtamo dijagonalu AC, S je presečna tačka dijagonala AC i BD. Dijagonale paralelograma se polove. Uočimo da je L težište trougla ACD, a K je težište trougla ABC, sledi da je DL = LK = KB.

Zadaci za prvi razred srednje škole iz kruga

Zadatak 1:

Neka je S središte upisanog kruga trougla ABC. Prava AS seče krug opisan oko trougla ABC, osim u A, još i u tački D. Dokazati da je CD = SD = BD.



REŠENJE:

Označimo sa $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

Jednakim kružnim lukovima odgovaraju jednaki periferijski uglovi pa je:

$\angle DCB = \angle DAB = \alpha/2$ (periferijski uglovi nad lukom DB)

$\angle DBC = \angle DAC = \alpha/2$ (periferijski uglovi nad lukom CD)

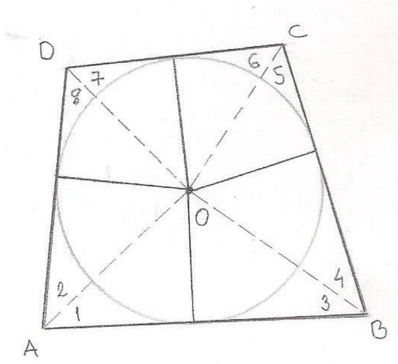
$\angle ADC = \angle ABC = \beta$ (periferijski uglovi nad lukom CA)

$\angle BDA = \angle BCA = \gamma$ (periferijski uglovi nad lukom AB)

Dalje imamo $\angle CSD = 180° - (\beta + (\alpha + \gamma)/2) = \alpha + \beta + \gamma - (\beta + (\alpha + \gamma)/2) = (\alpha + \gamma)/2 = \angle DCS$, pa je CD = SD. Trougao CDB je takođe jednakokraki, pa je CD = BD.

Zadatak 2:

Oko kruga sa centrom O opisan je četvorougao ABCD. Dokazati da je $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

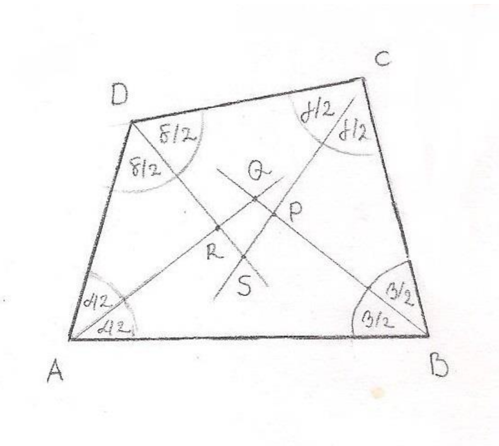


REŠENJE:

Ako iz tačke O konstruišemo normale na stranice četvorougla, dobićemo četiri para podudarnih trouglova, pri čemu je $\angle 1 = \angle 2,\ \angle 3 = \angle 4,\ \angle 5 = \angle 6,\ \angle 7 = \angle 8.$ Kako je $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$, a $\angle AOB + \angle COD = 360° - (\angle 1 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7) = \angle 2 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 8$ biće $\angle AOB + \angle COD = ½*360° = 180°$.

Zadatak 3:

Dokazati da tačke u kojima se seku simetrale unutrašnjih uglova konveksnog četvorougla predstavljaju temena tetivnog četvorougla (ili pripadaju jednoj pravoj).



REŠENJE:

Označimo sa α, β, γ i δ uglove konveksnog četvorougla ABCD. Tada je $\angle AQB = 180° - (\alpha + \beta)/2$ i $\angle DSC = 180° - (\delta + \gamma)/2$, pa je $\angle AQB + \angle DSC = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)/2 = 180°$.