TRANSFORMACIJE

Kristina Boljevic 302 /2011
Tanja Vracar 141 /2011

Sadrzaj :

TRANSLACIJA

Translacija je pojava sa kojom se srećemo svakoga dana. Na primer:

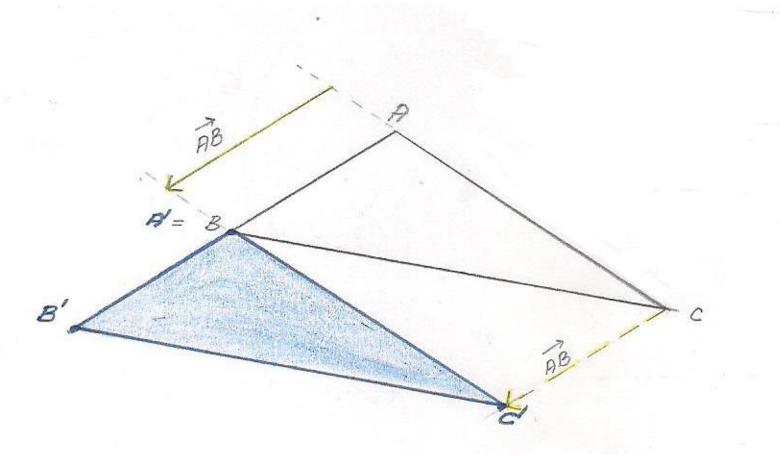
Kuća se nalazi na rastojanju 10m od drveta. U 12h oblak se nalazio iznad kuće. Ako se za dva sata oblak pomeri 5m u pravcu drveta, gde će se nalaziti u 16h?

Ako se za 2h pomeri 5m, za 4h će se pomeriti 10m.
Pri kretanju oblaka svaka njegova tačka će se paralelno sa zemljom pomerati za tačno tih 10m.
Paralelno pomeranje tačke za odredjeni vektor naziva se translacija.
U našem primeru vektor za koji se pomera biće upravo vektor dužine 10m, paralelan sa zemljom izmedju kuće i drveta.

Zadaci:

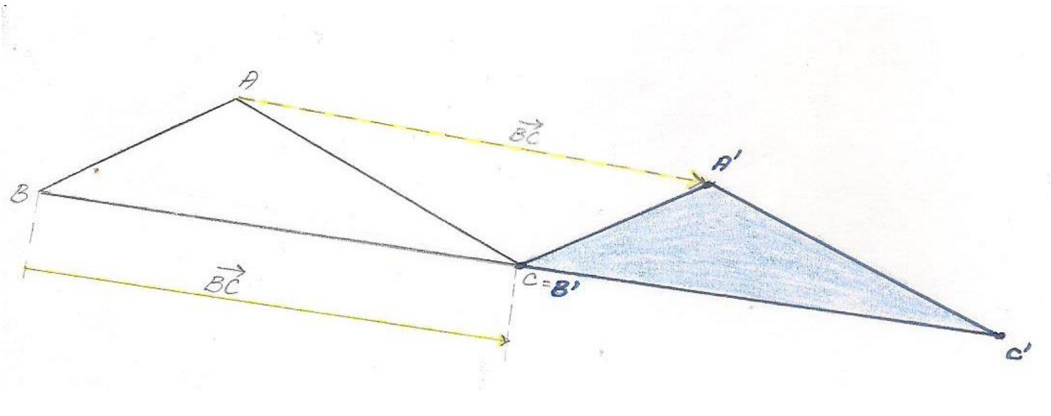
1. Dat je trougao ABC. Odrediti njegovu sliku nastalu translacijom pri kojoj se:
a) Teme A preslikava u teme B
b) Teme B preslikava u teme C
c) Teme A preslikava u težište trougla

a)



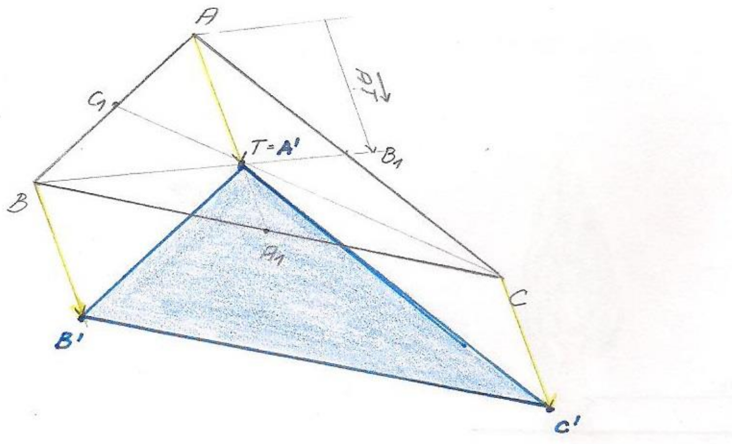
Vektor translacije je vektor *AB*.
Tačku A transliramo u B=A'
Tačku B paralelno vektoru *AB* za dužinu tog vektora transliramo u novu tačku B'
Tačku C paralelno vektoru *AB* za njegovu dužinu transliramo u novu tačku C'
Sada je ΔA'B'C' translirani trougao trougla ΔABC za vektor *AB*.

b)



Vektor translacije je vektor *BC*.
Tačku B transliramo u C=B'
Tačku A paralelno vektoru *BC* za dužinu tog vektora transliramo u novu tačku A'
Tačku C paralelno vektoru *BC* za njegovu dužinu transliramo u novu tačku C'
Sada je ΔA'B'C' translirani trougao trougla ΔABC za vektor *BC*.

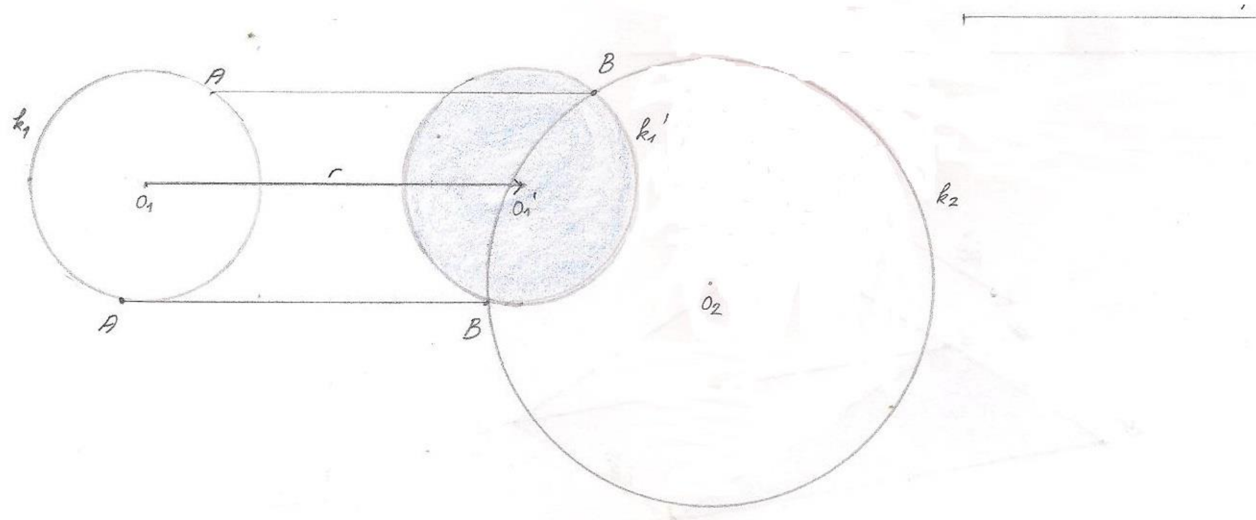
c)



Podsetnik: <u>težište T trougla ΔABC</u>:
Neka su:
A_1 središte stranice BC
B_1 središte stranice AC
C_1 središte stranice AB
Tada su CC_1, BB_1, AA_1 težišne duži. U njihovom preseku nalazi se težište T trougla ΔABC.

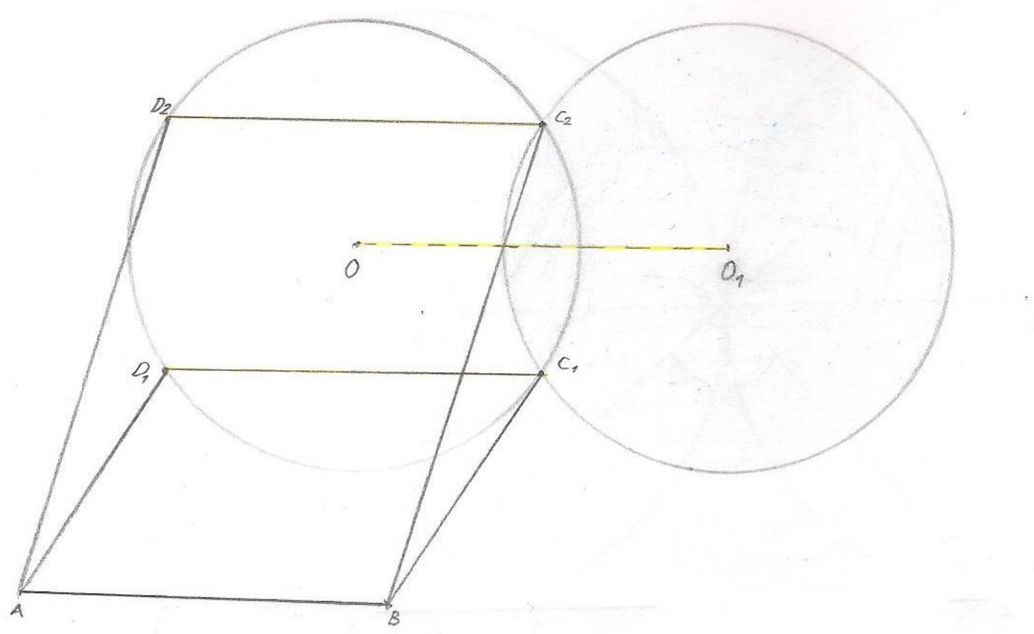
Vektor translacije je vektor *AT*.
Tačku A transliramo u T=A'
Tačku B paralelno vektoru *AT* za dužinu tog vektora transliramo u novu tačku B'
Tačku C paralelno vektoru *AT* za njegovu dužinu transliramo u novu tačku C'
Sada je ΔA'B'C' translirani trougao trougla ΔABC za vektor *AT*.

2. Dati su krugovi k_1 i k_2 i vektor *r*. Odrediti tačke A϶k_1 i B϶k_2 tako da važi vektor *AB*=*r*.



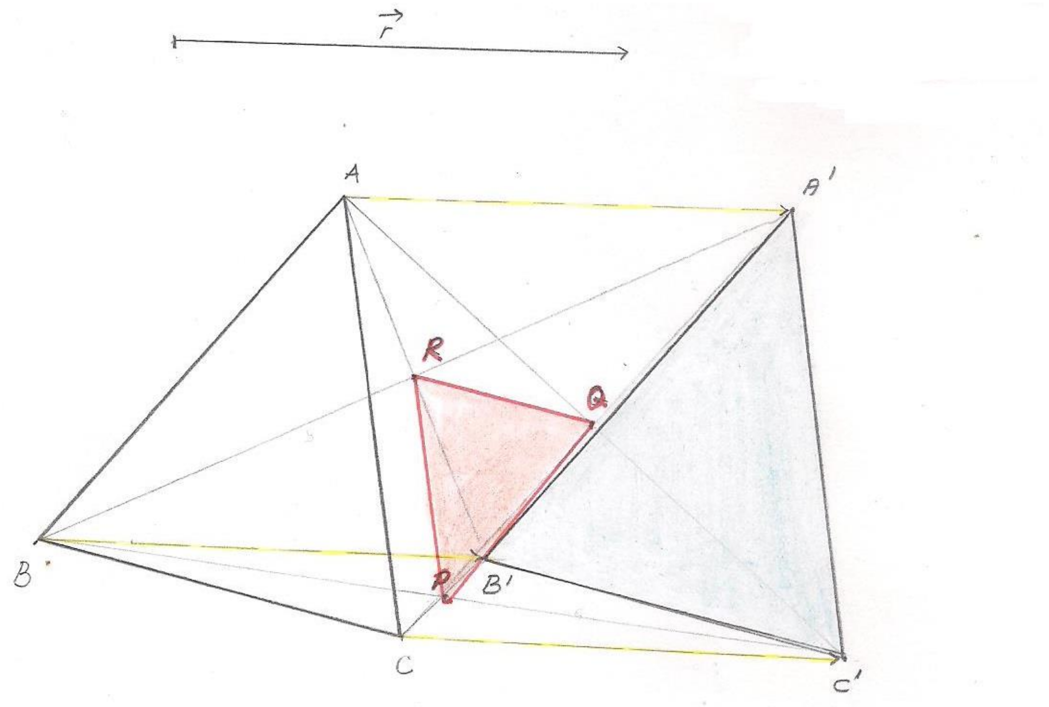
Imamo krugove k_1 i k_2 i vektor *r*.
Krug k_1 transliramo za vektor *r* u krug k_1'
Tada u preseku kruga k_1' i k_2 dobijamo tačku B
Translacijom tačke B za vektor –*r* dobijamo tačku A na krugu k_1.
U preseku može biti 1 tačka kada se krugovi k_1' i k_2 dodiruju
2 tačke kada se krugovi k_1' i k_2 seku
ni jedna tačka kada se niti seku niti dodiruju
beskonačno mnogo tačaka kada je k_1'=k_2

3. Konstruisati paralelogram ABCD ako su data temena A i B, a temena C i D pripadaju datom krugu k.



Imamo krug k i duž AB.
Transliramo krug k sa centrom u O za vektor translacije *AB* u krug k_1 sa centrom O_1
U preseku kruga k_1 i k_2 biće dve tačke, osim ako je presek kruga bas AB, tada će biti jedna tačka.
Ako je prečnik kruga k manji od AB onda neće biti tačka preseka i takav slučaj ne uzimamo u obzir.
Jednu od tačaka preseka ta dva kruga k_1 i k uzmemo za tačku C
Tačka D se nalazi na k tako da važi DC=AB i DC||AB.

4. Neka je ΔA’B’C’ dobijen translacijom trougla ABC. Neka je AB’∩A’B={R}, BC’∩B’C={P} i CA’∩C’A={Q}. Dokazati da je ΔPQR podudaran trouglu čija su temena središta stranica trougla ABC.



Transliramo ΔABC za vektor r u ΔA’B’C’.
AB’∩A’B={R}
BC’∩B’C={P}
CA’∩C’A={Q}

Dokazujemo: ΔPQR~ΔABC

- Vektor AC=A’C’ po definiciji translacije, odakle sledi da je cetvorougao ACC’A’ paralelogram. Odatle je Q presek dijagonala A’C i C’A, onda je Q=S(A’C)=S(C’A)
- Vektor AB=A’B’ po definiciji translacije, odakle sledi da je ABB’A’ paralelogram. Odatle je R presek dijagonala A’B i B’A, onda je R=S(A’B)=S(B’A)
- Vektor BC=B’C’ po definiciji translacije, odakle sledi da je BCC’B’ paralelogram. Odatle je P presek dijagonala B’C i C’B, onda je P=S(B’C)=S(C’B)

Posmatramo ΔA’BC:
Q=S(A’C)
R=S(A’B)

- ⇨ QR je srednja linija ΔA’BC
- ⇨ QR || BC I QR=1/2BC (1)

Posmatramo ΔBC’A:
Q=S(AC’)
P=S(C’B)

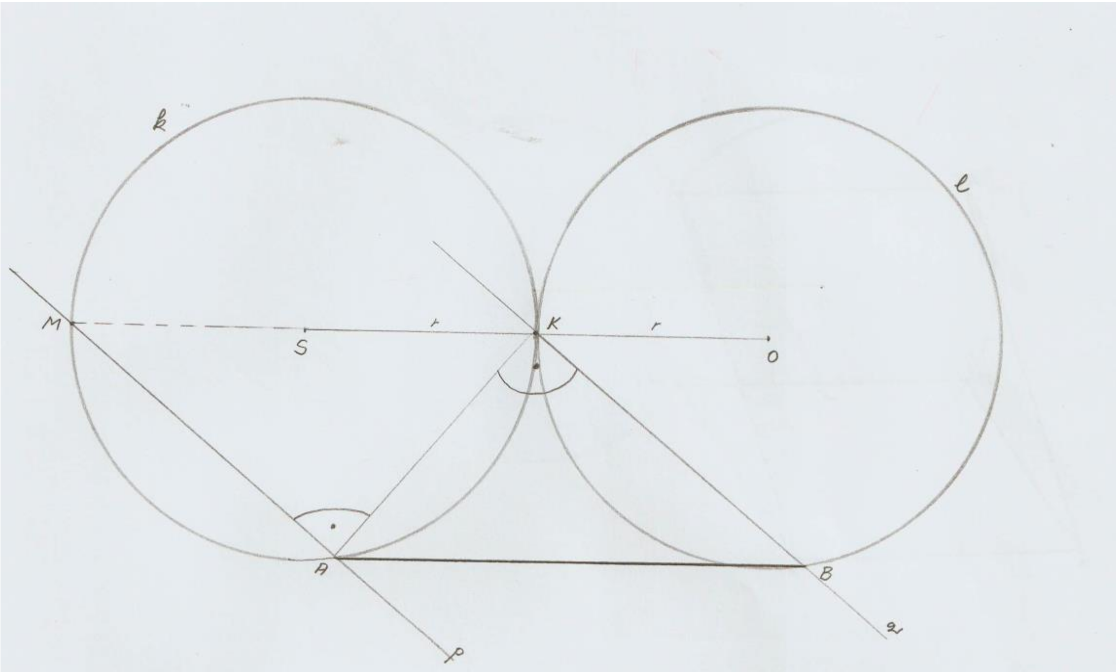
- ⇨ PQ je srednja linija ΔBC’A
- ⇨ PQ || AB I PQ=1/2AB (2)

Posmatramo ΔCAB’:
P=S(B’C)
R=S(AB’)

- ⇨ PR je srednja linija ΔCAB’
- ⇨ PR || AC I PR=1/2AC (3)

Iz (1), (2) i (3) prema stavu SSS sledi da je ΔPQR~ΔABC.

5. Dva kruga poluprečnika r dodiruju se u tački K. Na jednom je data tačka A, a ne drugom tačka B tako da važi i <AKB=90°. Dokazati da je AB=2r.

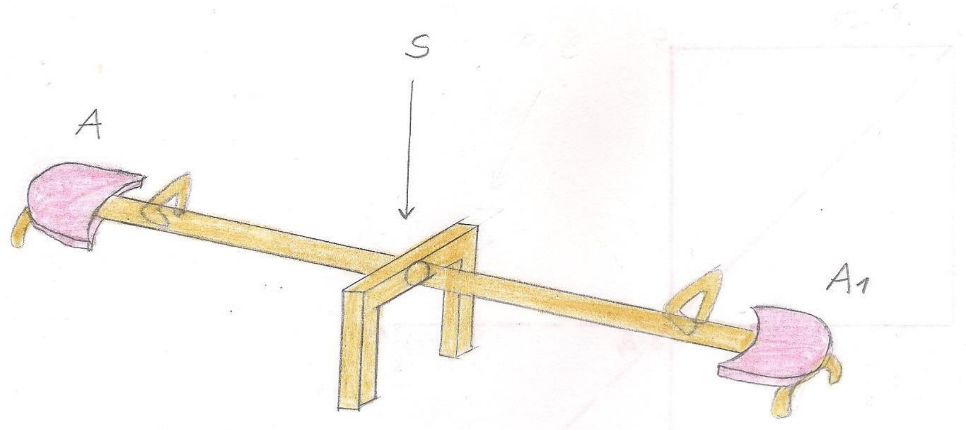


Neka se krugovi k(S,r) i l(O,r) dodiruju u tački K.
Neka je M϶k tačka dijametralno suprotna sa K
p i q su prave odredjene sa tačkama M, A i K, B redom i p||q, jer su obe prave normalne na AK.
MA⊥AK i KB⊥AK
M se translacijom za vektor *SO* slika u K,a kako M pripada p i K pripada q , a p||q onda se p translacijom ya vector SO slika u q.
Ista translacija slika k u l, pa kako {A}=k∩p i {B}=l∩q sledi *AB*=*SO*=2*r*.

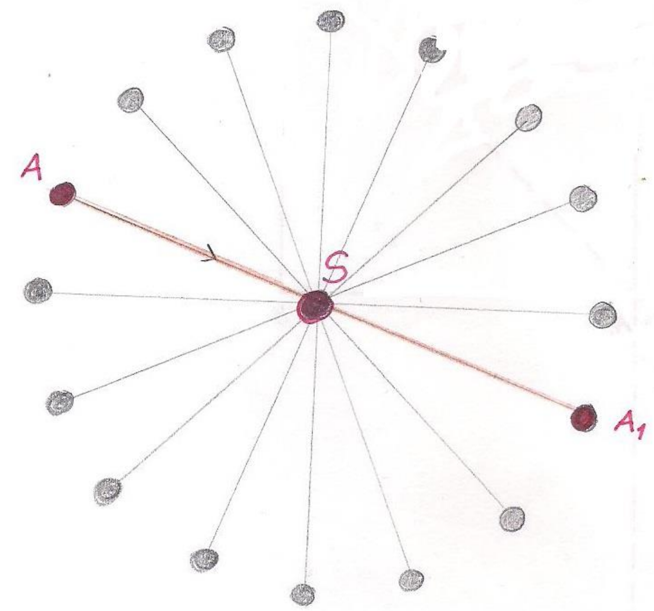
CENTRALNA SIMETRIJA

Centralna simetrija je pojava koju srećemo svakodnevno. Na primer:

- Klackalica: deca koja se klackaju su centralno simetrična jedno drugom u odnosu na sredinu klackalice.



- Vrteška: svako dete koje se vrti na vrtešci je centralno simetrično detetu koje sedi na vrtešci dijametralno suprotno od njega u odnosu na centar vrteske , odakle mozemo da primetimo da se svaka tacka na krugu centralnom simetrijom slika u tacku koja je dijametralno suprotna u odnosu na centar kruga i pripada istom krugu.



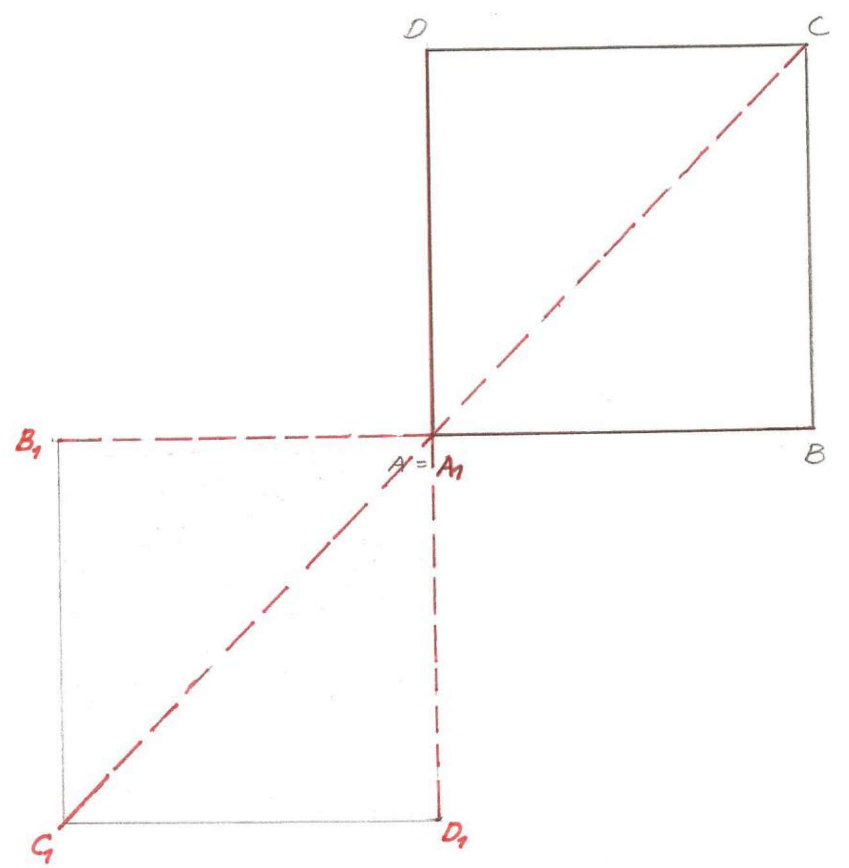
- Centralna simetrija preslikava tačku A u odnosu na tačku S u tačku A’, tako da je tačka S središte duži AA’.

  Centralnom simetrijom se svaka prava slika u sebi paralelnu pravu.

Zadaci:

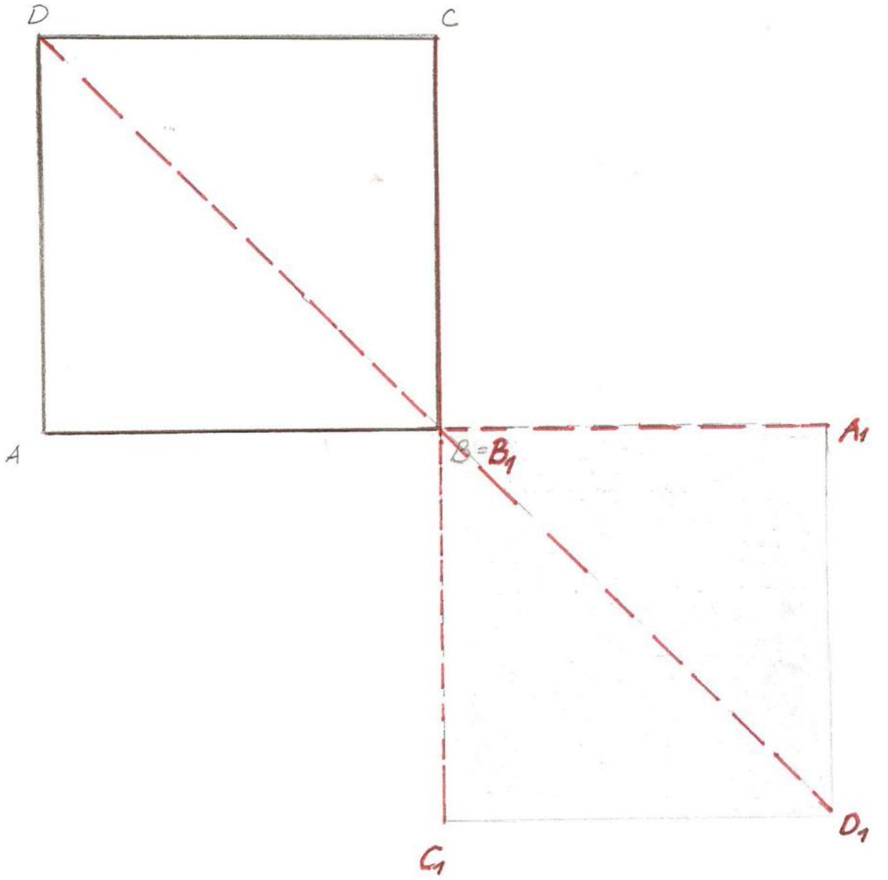
1. Dat je kvadrat ABCD i tačka O van kvadrata u njegovoj ravni. Odrediti sliku kvadrata nastalu centralnom simetrijom sa centrom u tački:
a)A
b)B
c)O

a)



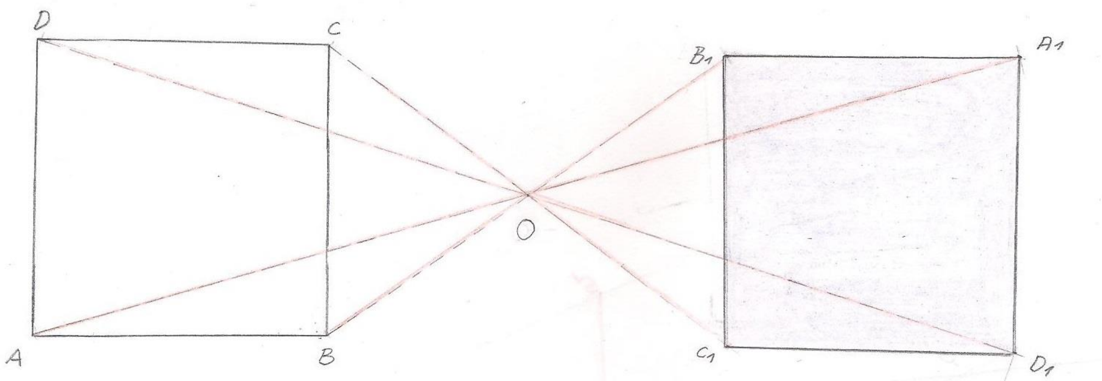
Centralnom simetrijom u odnosu na tačku A, se
tačka A preslikava u samu sebe, $A=A_1$,
tačka B preslikava u B_1, koja se nalazi dijametralno suprotno od tačke B
tačka C preslikava u C_1, koja se nalazi dijametralno suprotno od tačke C
tačka D preslikava u D_1 koja se nalazi dijametalno suprotno od tačke D

b)



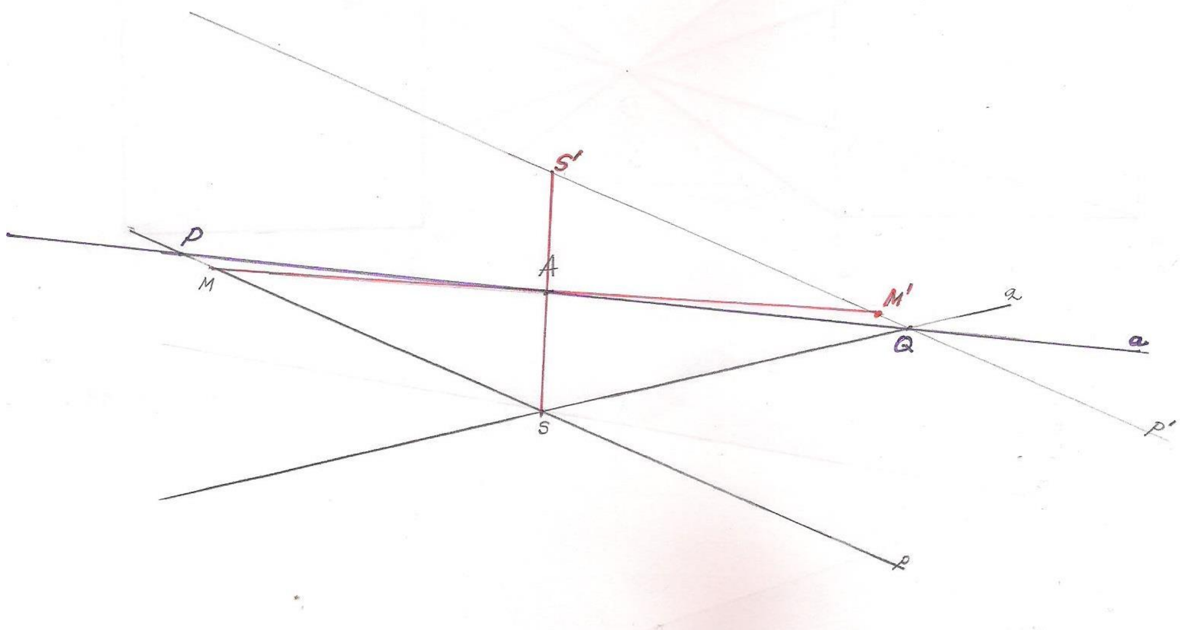
Centralnom simetrijom u odnosu na tačku B, se
tačka B preslikava u samu sebe, $B=B_1$,
tačka A preslikava u A_1, koja se nalazi dijametralno suprotno od tačke A
tačka C preslikava u C_1, koja se nalazi dijametralno suprotno od tačke C
tačka D preslikava u D_1 koja se nalazi dijametalno suprotno od tačke D

c)



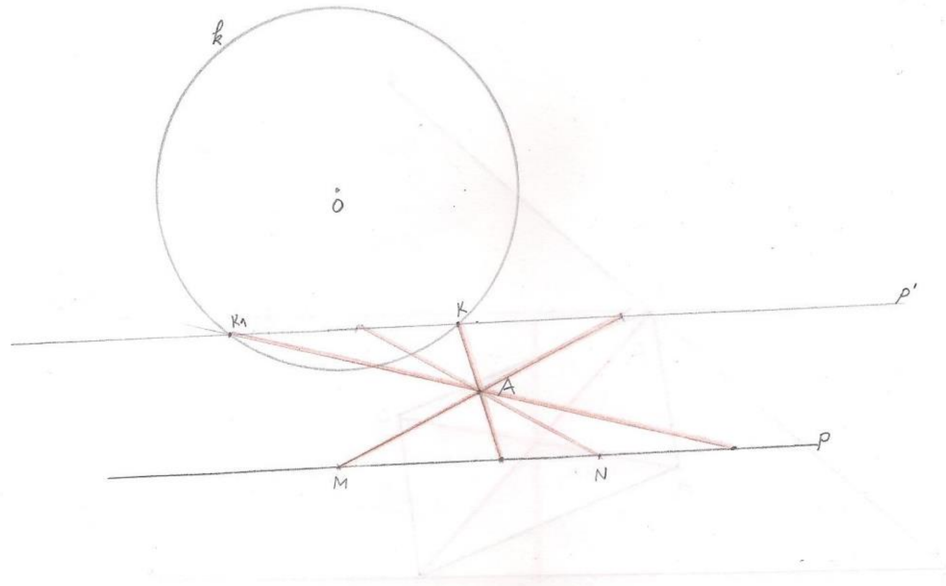
Centralnom simetrijom u odnosu na tačku O, se
tačka A preslikava u A_1, koja se nalazi dijametralno suprotno od tačke A
tačka B preslikava u B_1, koja se nalazi dijametralno suprotno od tačke B
tačka C preslikava u C_1, koja se nalazi dijametralno suprotno od tačke C
tačka D presliakva u D_1 koja se nalazi dijametalno suprotno od tačke D

2. Date su prave p i q koje se seku i tačka A van njih. Kroz tačku A konstruisati pravu a tako da važi $a \cap p = \{P\}$, $a \cap q = \{Q\}$ i PA=AQ.



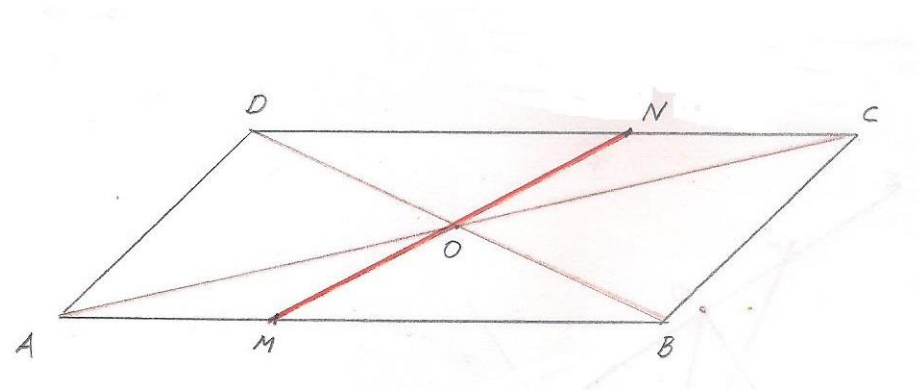
Neka je tačka S presek prava p i q.
Preslikamo centralnom simetrijom pravu p u pravu p' (preslikamo centralnom simetrijom u odnosu na tačku A proizvoljnu tačku $M \in p$ u tačku M' i tačku S u S', nakon čega povučemo pravu kroz te dve tačke i to će biti upravo prava p', koja je paralelna pravoj p)
$p' \cap q = \{Q\}$
Tačka P će se dobiti kao tačka na pravoj p koja je centralno simetrična tački Q, u odnosu na tačku A.
Prava koja prolazi kroz tačke P i Q biće upravo prava a.

3. Dat je krug k i prava p koji se ne seku, i tačka A van njih. Konstruisati tačke Kϵk i Pϵp tako da A bude središte duži KP.



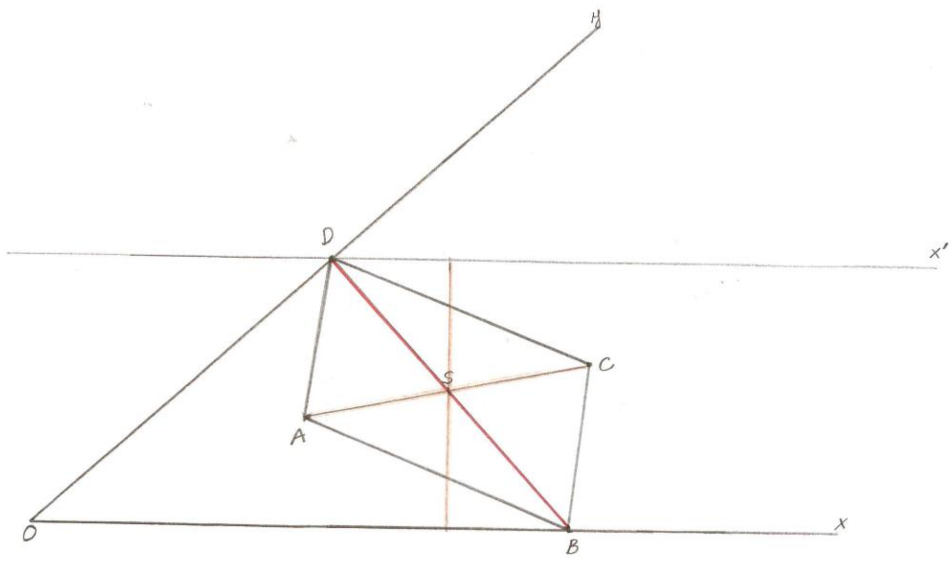
Ako je tačka A središte duži KP, to znači da se tačke K i P slikaju jedna u drugu centralnom simetrijom u odnosu na tačku A. Iz razloga što se tačka P nalazi na pravoj p, tačka K će morati da se nalazi na pravoj koja je centralno simetrična pravoj p.
Zato se centralnom simetrijom u odnosu na tačku A prava p slika u pravu p'.
Dobićemo u preseku prave p i kruga k dve tačke. Od njih biramo jednu i nazovemo je K.
p'∩k= {K}
Tacka P je tacka na pravoj p koja je centralno simetricna tacki K u odnosu na tacku A.
Na taj način smo dobili duz KP čije je srediste tacka A.

4. Neka su M i N tačke na stranicama AB i CD paralelograma ABCD takve da važi AM=CN. Dokazati da duž MN sadrži centar paralelograma.



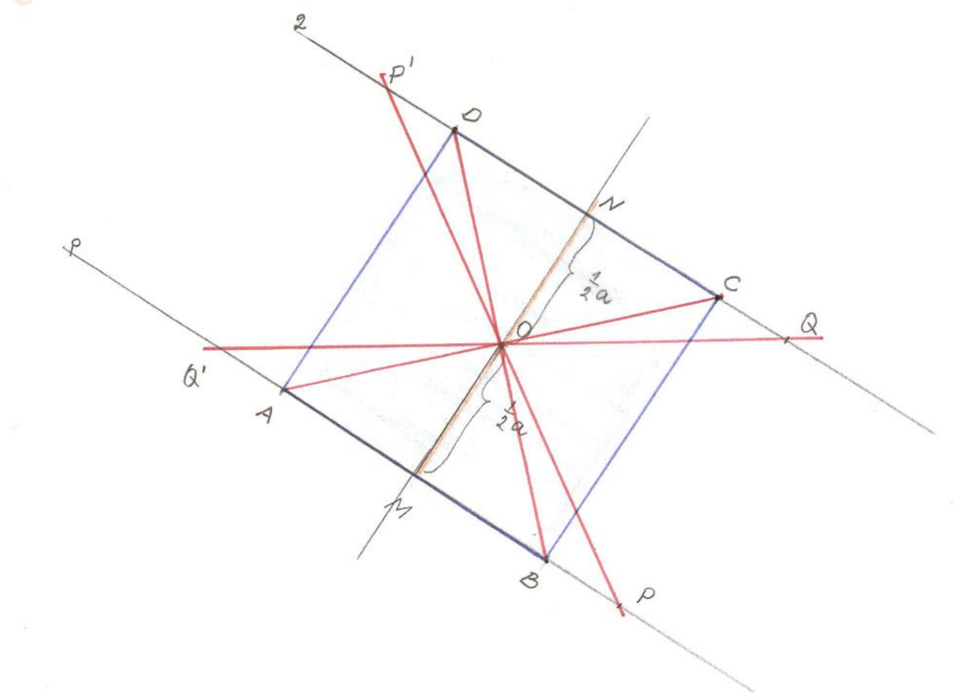
Neka je tačka O centar paralelograma.
Tačka C je centralno simetrična tački A u odnosu na tačku O.
Tačka D je centralno simetrična tački B u odnosu na tačku O.
Odatle sledi da je i duž CD centralno simetrična duži AB u odnosu na tačku O. (1)
Iz uslova zadatka znamo da je AM=CN (2)
Iz (1) i (2) dobijamo da je tačka N centralno simetrična tački M u odnosu na tačku O.

5. Dat je ugao xOy i tačke A i C u njemu. Konstruisati paralelogram ABCD tako da temena B i D pripadaju kracima Ox i Oy.



Neka je tačka S središte duži AC, a samim tim i centar paralelograma, jer je AC dijagonala paralelograma.
Ako tačka B pripada polupravoj Ox, onda će tačka D morati da pripada pravoj koja joj je centralno simetrična u odnosu na tačku S, jer su tačke B i D centralno simetrične u odnosu na sredinu paralelograma.
Centralnom simetrijom u odnosu na tačku S prava x se slika u pravu x'
x'∩Oy= {D}
Centralnom simetrijom tačke D u odnosu na tačku S ćemo dobiti tačku B.

6. Konstruisati kvadrat ABCD ako je dat njegov centar O, jedna tačka P na pravoj AB i jedna tačka Q na pravoj CD.

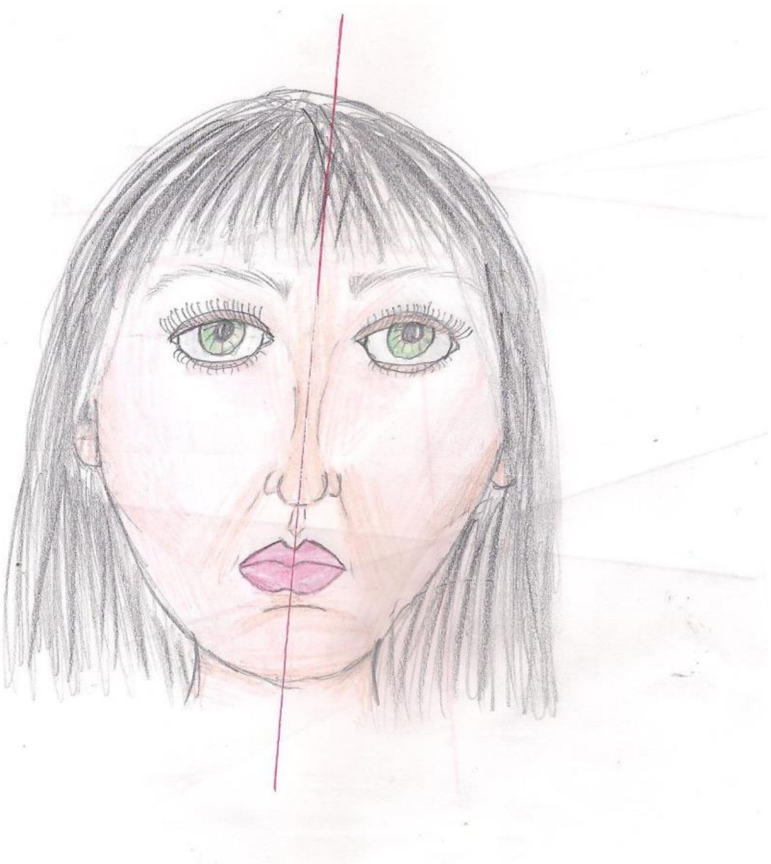


Neka je O centar kvadrata ABCD.
Neka je tačka P’ tačka nastala centralnom simetrijom tačke P u odnosu na tačku O.
Neka je tačka Q’ tačka nastala centralnom simetrijom tačke Q u odnosu na tačku O.
Tačke P i Q’ će pripadati pravoj p.
Tačke P’ i Q će pripadati pravoj q.

- Ako je P’=Q, onda ima beskonačno mnogo rešenja
- Ako je P’ različita od tačke Q, pri čemu tačka O pripada duži P’Q, onda nema rešenja
- Ako je P’ različita od tačke Q, pri čemu tačka O ne pripada duži P’Q, onda će nam prava q biti upravo prava CD. Rastojanje tačke O od prave q biće polovina stranice našeg kvadrata. Nacrtajmo tačku N tako da se nalazi na pravoj q i da je ON normalno na pravu q. Zatim nacrtajmo Tačku C koja pripada pravoj q, tako da je NC=ON. Tačka D je centralno simetrična tački C u odnosu na tačku N. Tačka A je centralno simetrična tački C u odnosu na tačku O. Tačka B je centralno simetrična tački D u odnosu na tačku O.

OSNA SIMETRIJA

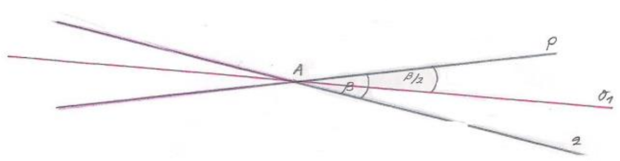
Kada stanemo ispred ogledala, ako zamislimo da je i odraz u ogledalu u tri dimenzije, onda će naš odraz u ogledalu biti osno simetričan nama. Ovo je jedan od najčešćih primera za osnu simetriju u prostoru, pri čemu se ogledalo ponaša kao ravan, a mi i naš odraz kao trodimenzione figure.
Medjutim, mi ćemo raditi samo osnu simetriju u ravni. Najčešći primer za to bi bio ako uzmemo fotografiju lica, isečemo fotogragiju po sredini lica krenuvši od sredine čela, preko sredine nosa, do sredine brade. Leva polovina fotografije koju dobijemo će biti osno simetrična desnoj polovini. Naravno, ni jedno lice u realnosti nije u potpunosti osno simetrično, već ovaj primer posmatramo pri idealnim uslovima.

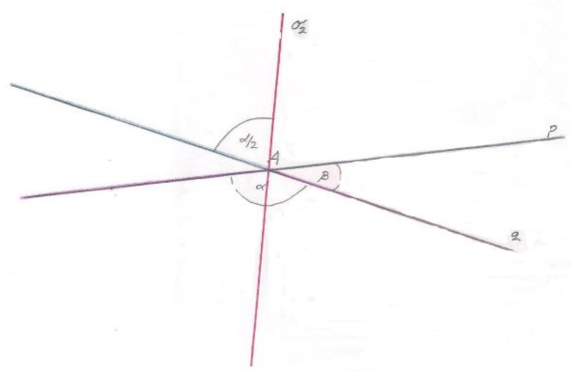


Zadaci:

1. Koliko osa simetrije imaju sledeće figure:
a)par pravih koje se seku
b)par paralelnih pravih
c)par tačaka
d)jednakostranični trougao
e)kvadrat
f)krug
g)krug i tačka
h)krug i prava
i)dva kruga

a)

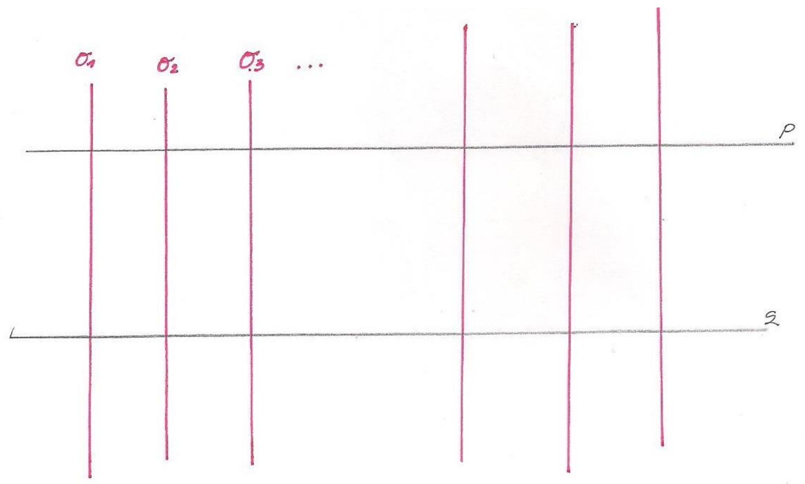




Ose simetrije moraju prolaziti kroz tačku A i moraju biti normalne jedna na drugu, zbog čega će jedna osa biti simetrala ugla α, a druga ugla β. Zbog toga u ovom slučaju imamo dve ose simetrije.

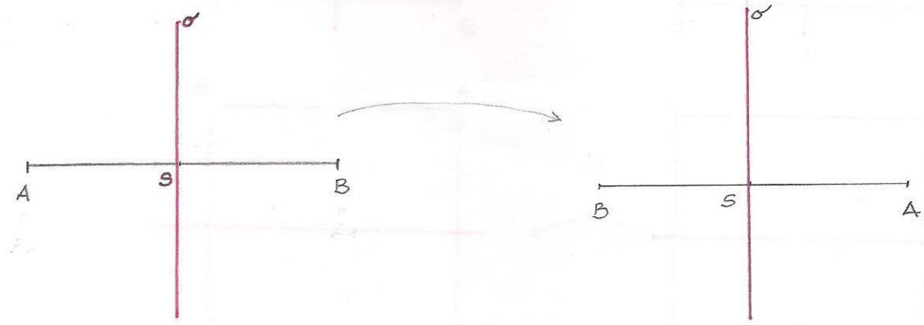
Ukoliko se prave seku pod pravim uglom, tj. normalne su jedna na drugu, imaće ukupno 4 ose simetrije, dve koje su simetrale dva susedna ugla (kao malo pre navedene), ali i one same će biti ose simetrije.

b)



Možemo izabrati bilo koju tačku tako da kroz nju prolazi osa simetrije, koja je normalna na prave p i q (koje su paralelne). S obzirom da takvih tačaka ima beskonačno mnogo, u ovom slučaju imamo beskonačno mnogo osa simetrije.

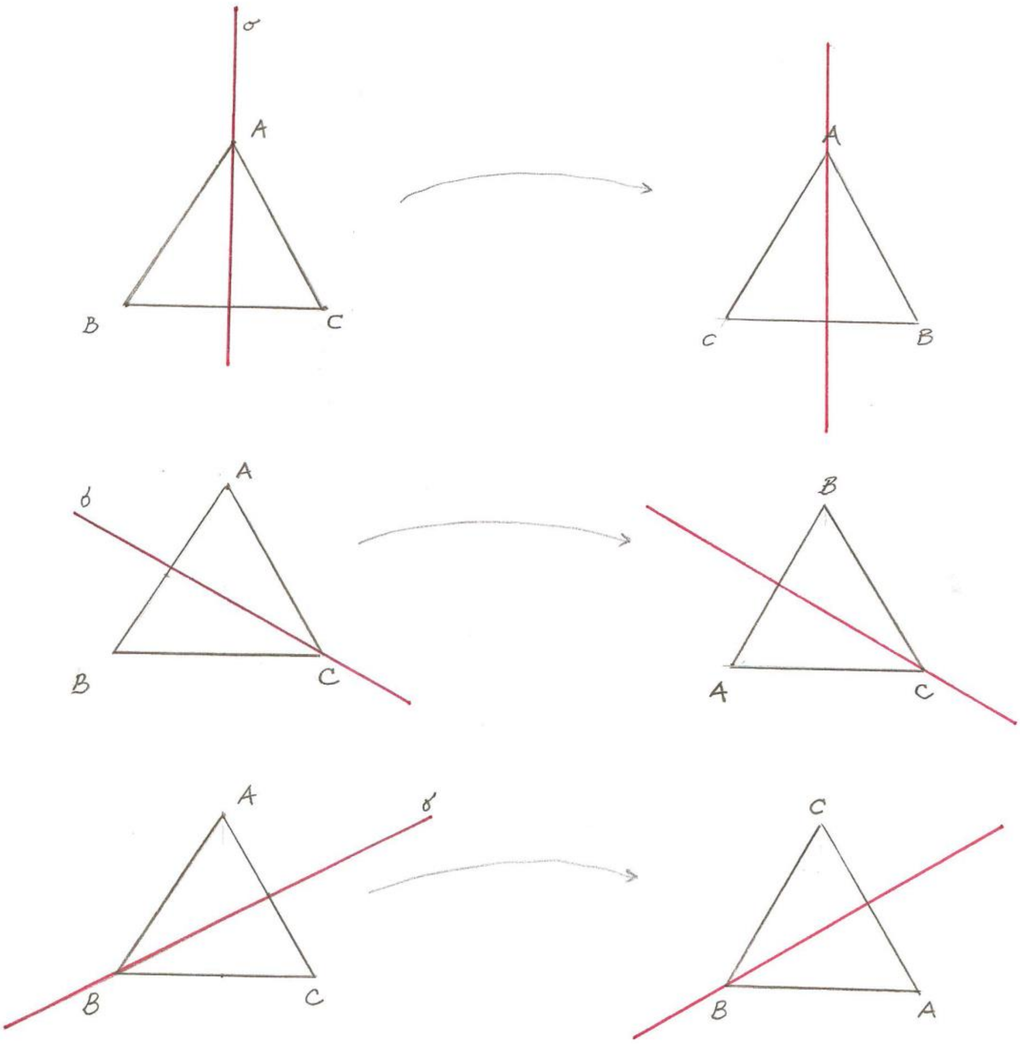
c)



U ovom slučaju imamo dve ose simetrije:

- Jedna bi bila prava koja sadrži tačke A i B, jer se one tada slikaju u same sebe.
- Druga bi bila prava koja sadrži središte duži AB, S, i normalna je na AB. Tada se tačke A i B slikaju jedna u drugu.

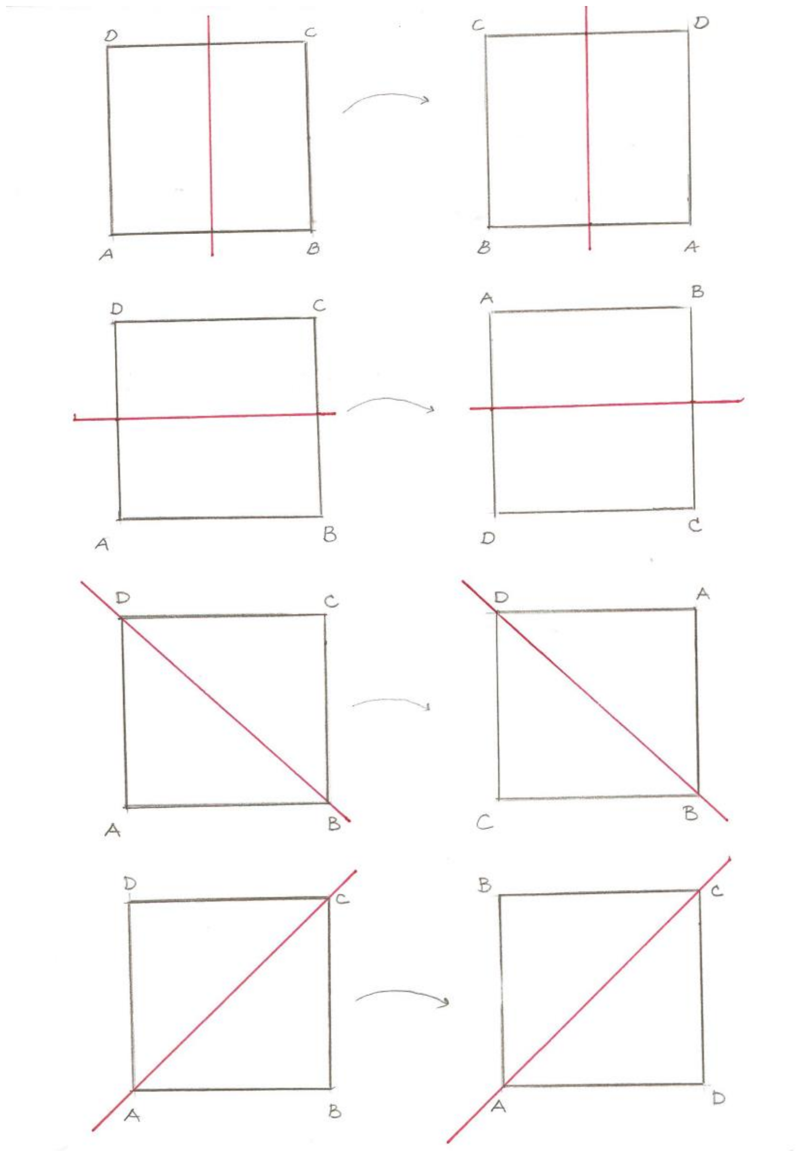
d)



Postojaće tri ose simetrije i to će biti upravo simetrale stranica.

- Kada je simetrala stranice AB osa simetrije, tačka C se slika sama u sebe, a tačke B i A jedna u drugu.
- Kada je simetrala stranice BC osa simetrije, tačka A se slika sama u sebe, a tačke B i C jedna u drugu.
- Kada je simetrala stranice AC osa simetrije, tačka B se slika sama u sebe, a tačke C i A jedna u drugu.

e) Kvadrat će imati četiri ose simetrije:



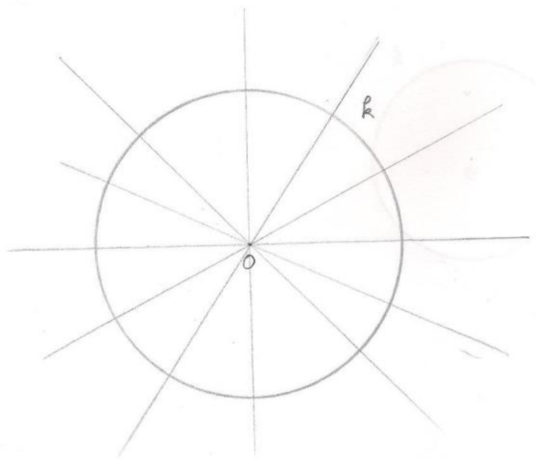
- Simetrala stranice AB odnosno CD: tada se tačke A i B slikaju jedna u drugu i C i D takodje.

- Simetrala stranice AD odnosno BC: tada se tačke A i D slikaju jedna u drugu i C i B takodje.

- Prava koja sadrži dijagonalu BD: tačke B i D se slikaju u same sebe, dok se tačke A i C slikaju jedna u drugu.

- Prava koja sadrži dijagonalu AC: tačke A i C se slikaju u same sebe, dok se tačke B i D slikaju jedna u drugu.

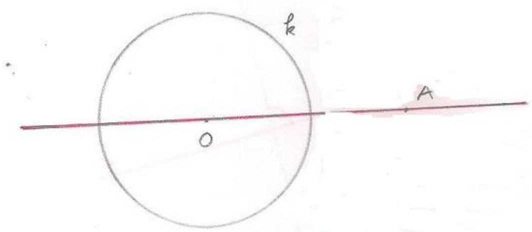
f)



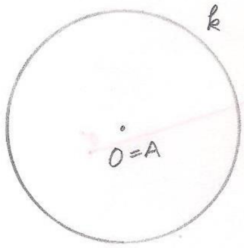
Osa simetrije kruga je bilo koja prava koja sadrži prečnik, a takvih pravih ima beskonačno mnogo.
Centar kruga se uvek slika u sebe samog.

g)

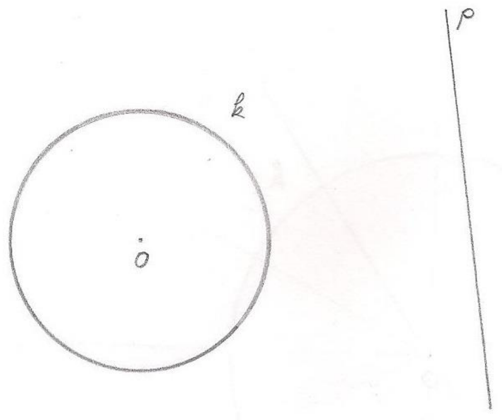
1. Tačke A i O nisu iste: osa simetrije će biti prava koja sadrži tačke O i A, samim tim u ovom slučaju postoji samo jedna osa simetrije.



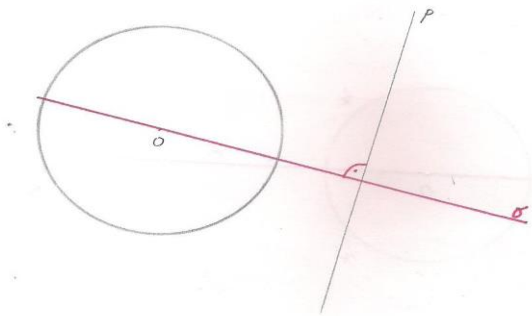
2. Tačka A=O: tada imamo samo krug i njegov centar, a taj slučaj smo već razmatrali i tada ima beskonačno mnogo osa simetrije.

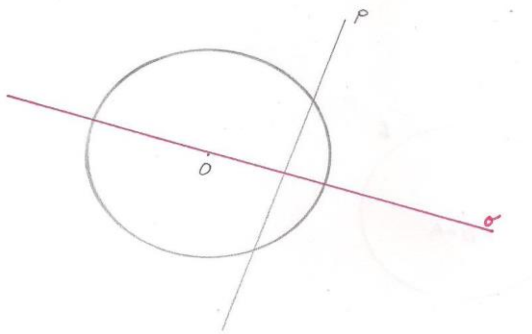


h)

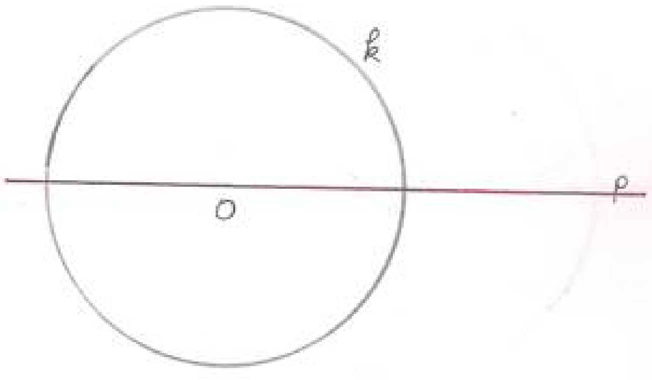


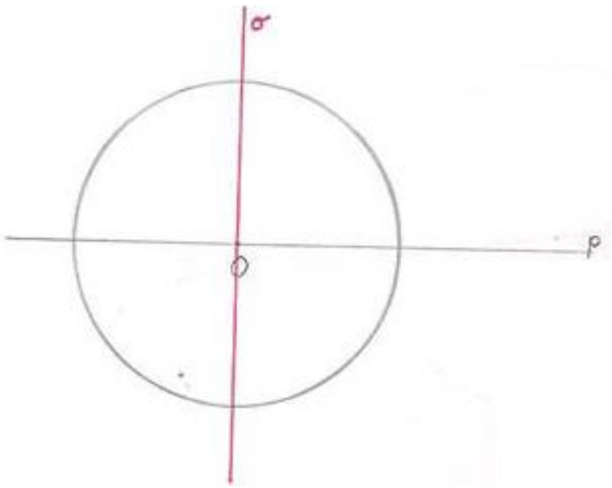
1. Tačka O ne pripada pravoj p: tada je osa simetrije prava koja je normalna na pravu p i sadrži centar O.





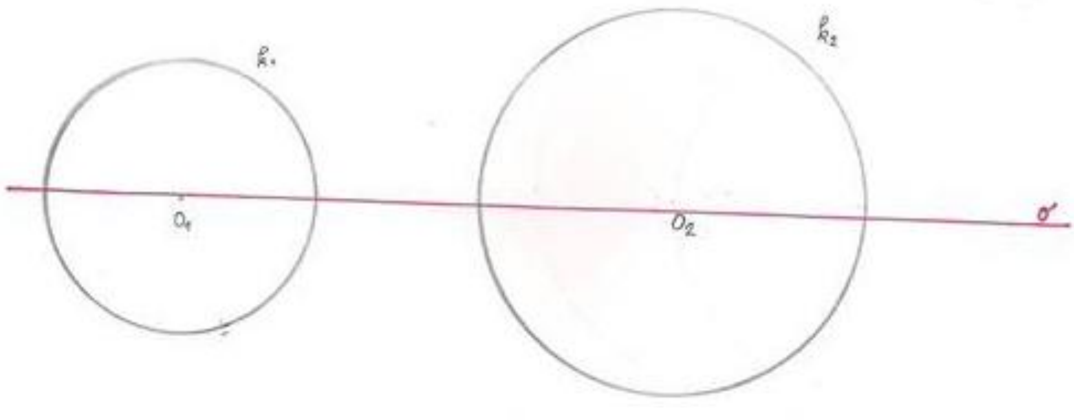
2. Tačka O pripada pravoj p: tada osa simetrije može da bude sama prava p ili prava koja je normalna na nju i sadrži tačku O

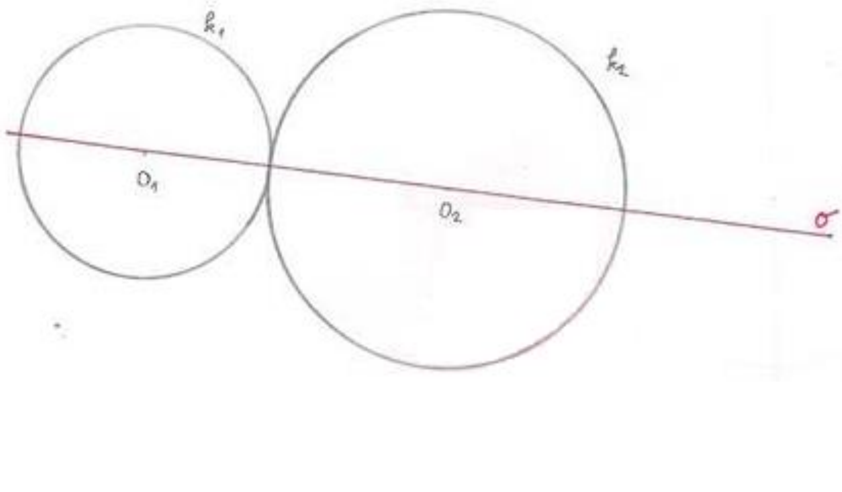


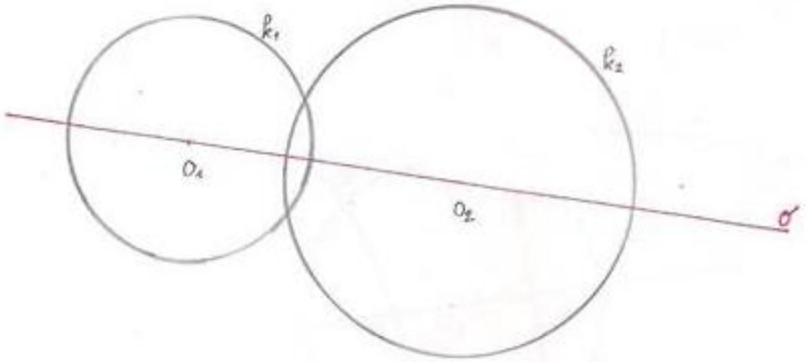


i)

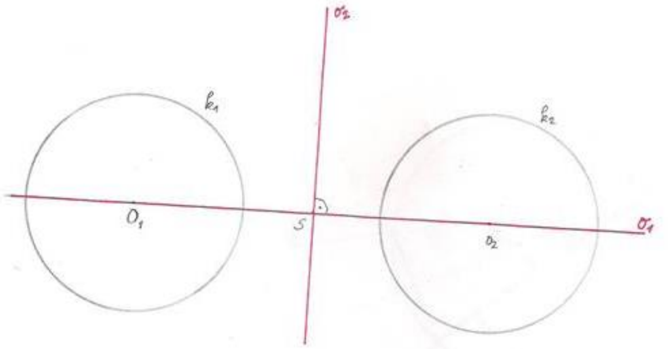
1. Ako imamo krugove $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$: tada je osa simetrije prava koja sadrži centre krugova O_1 i O_2.

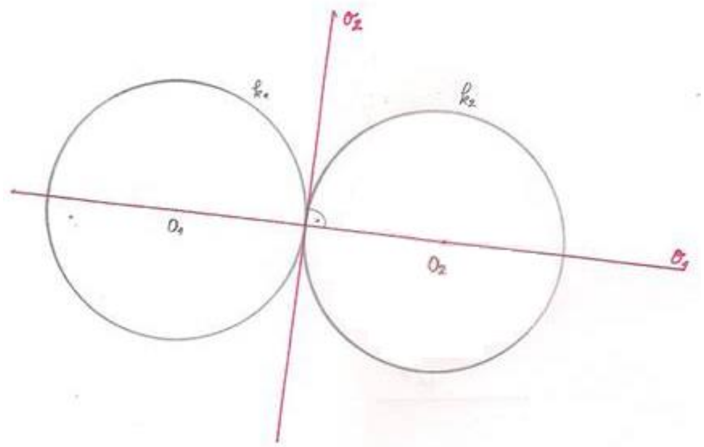


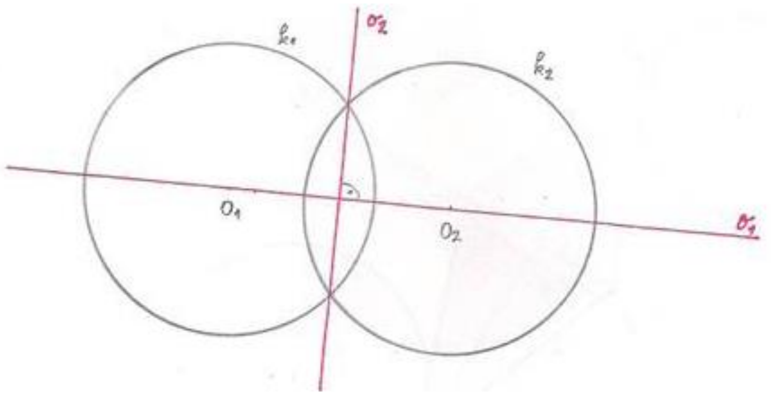




2. Ako imamo krugove $k_1(O_1,r)$ i $k_2(O_2,r)$: tada ćemo imati dve ose simetrije i to su: prava koja sadrži tačke O_1 i O_2 i prava koja sadrži središte duži O_1O_2 i normalna je na O_1O_2.

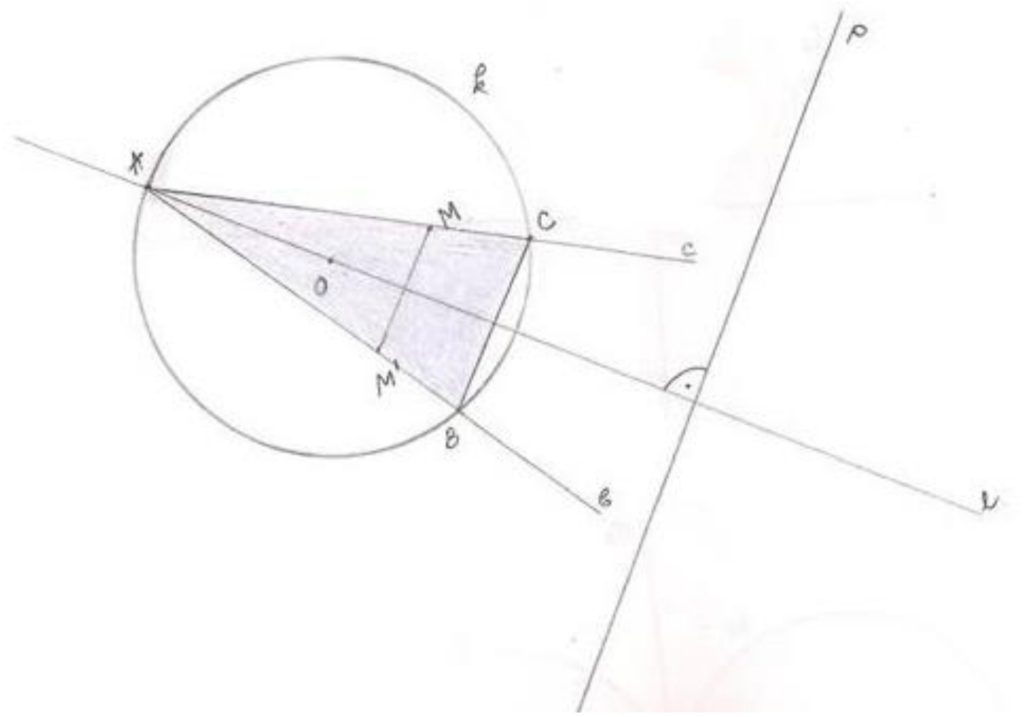






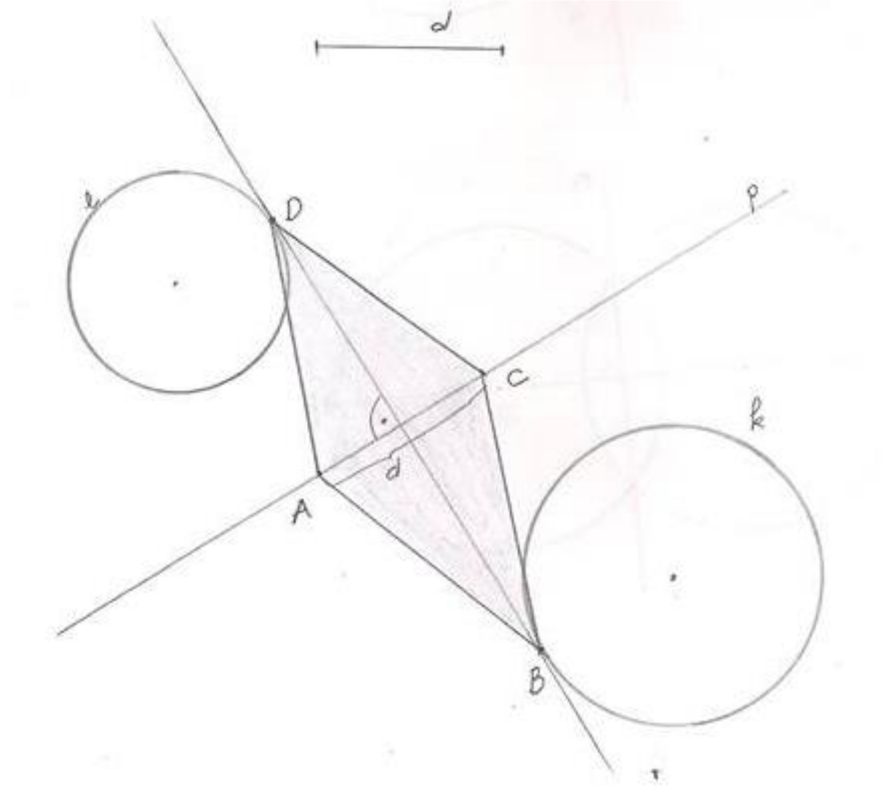
3. Ako su krugovi poklapaju $k_1(O,r)=k_2(O,r)$: tada imamo ponovo slučaj kada imamo samo jedan krug i beskonačno mnogo osa simetrije.

2. Data je tačka M u krugu k i prava p. Konstruisati jednakokraki trougao upisan u k tako da mu osnovica bude paralelna sa p, a da M pripada jednom kraku.



Posmatramo pravu l: $O \in l$ i $l \perp p$
M preslikamo u odnosu na osu simetrije l u tačku M'.
Uzmemo jednu tačku preseka prave l sa krugom k, npr tačku A.
Iz tačke A povučemo prave c i b tako da $M \in c$ i $M' \in b$ i $c \cap k=\{C\}$ i $b \cap k=\{B\}$, tada je C osno simetrična tački B u odnosu na pravu l odnosno $BC \perp l$ a onda znamo da je $BC \parallel p$.
Tada je ΔABC jednakokraki jer je $AB=AC$ (A pripada l u odnosu na koju su B i C osno simetrične).

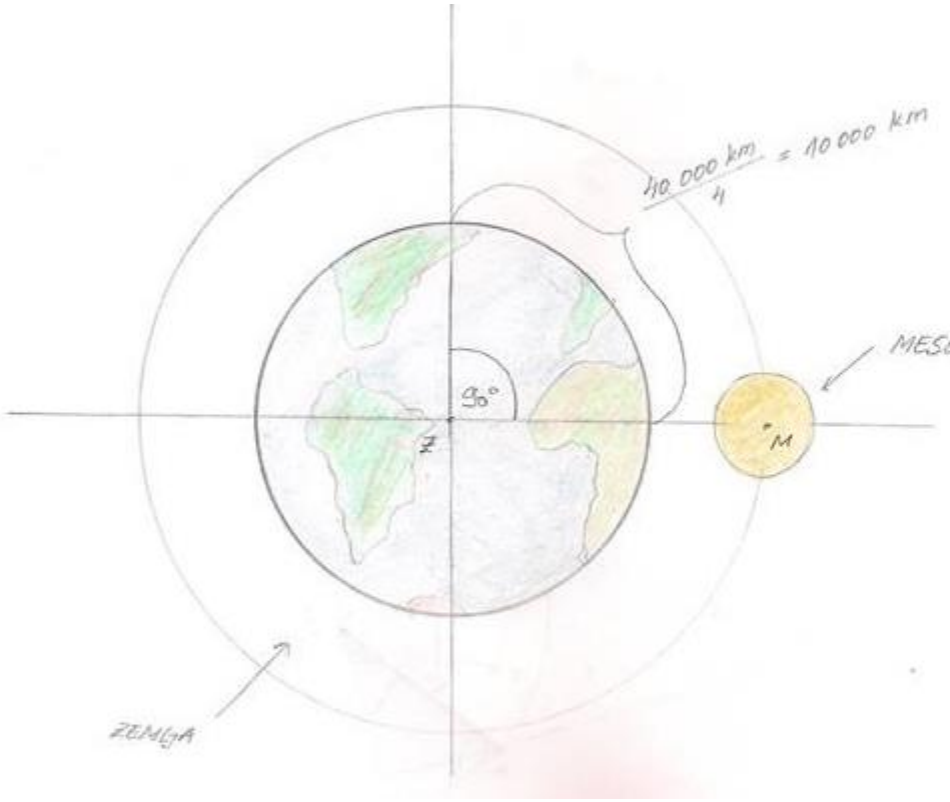
3. Data je prava p, kugovi k i l i duž d. Konstruisati romb čija jedna dijagonala pripada pravoj p i ima dužinu d, a preostala dva temena pripadaju krugovima k i l.



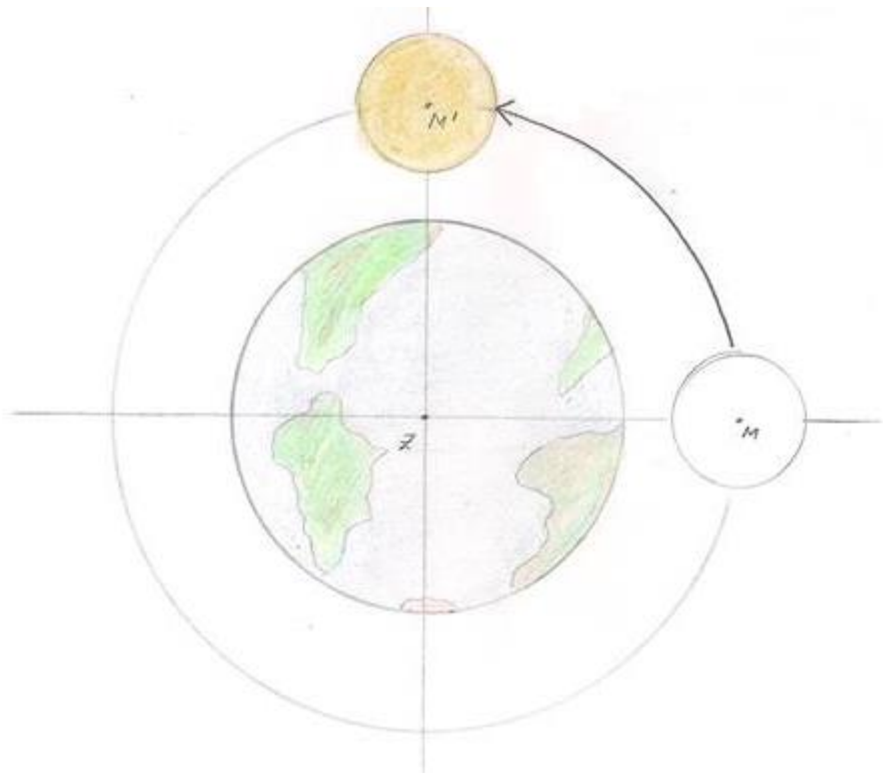
Uzmimo za tu poznatu dijagonalu romba duz AC.
Imamo krugove k i l i duz AC duzine d koja pripada pravoj p i nalazi se van tih krugova.
Neka je S srediste duzi AC.
Konstruisemo normalu kroz tacku S na pravu p.
Tada dobijamo temena B i D u preseku normale sa krugovima l i k,tako da B pripada krugu k a C pripada krugu l.
Tacke B i C su osno simetricne u odnosu na pravu p.
Dijagonale cetvorugla ABCD seku se pod pravim uglom i polove se pa znamo da je cetvorougao ABCD romb.

ROTACIJA

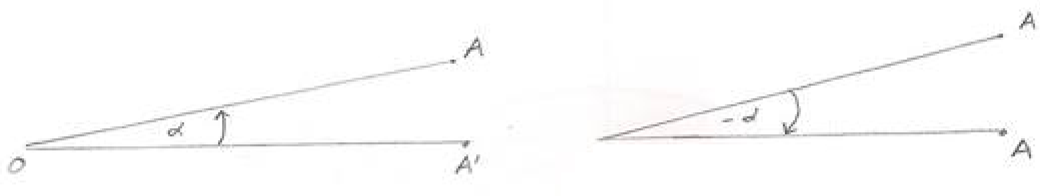
Ako je obim Zemlje 40 000km, za koliko stepeni rotira Mesec oko Zemlje kada predje četvrtinu Zemljinog obima?



Pri rotaciji Meseca, pretpostavimo da se rastojanje izmedju centra Zemlje i centra Meseca ne menja.
Obeležimo početnu poziciju centra Meseca sa M i krajnju sa M', a centar Zemlje sa Z. Ugao za koji rotira Mesec oko Zemlje je ugao MZM'. Taj ugao iznosi četvrtinu punog kruga, što je 90°.
Rotacija se vršila u pozitivnom smeru, odnosno suprotnom od smera kretanja kazaljki na satu.



Da je rotacija bila negativna, pisali bi da se rotira za ugao -90°.
Dakle, za svaku tačku O u ravni i svaki ugao α definisana je rotacija, koja proizvoljnu tačku A ravni preslikava u tačku A’, tako da je OA=OA’ i ugao AOA’=α.



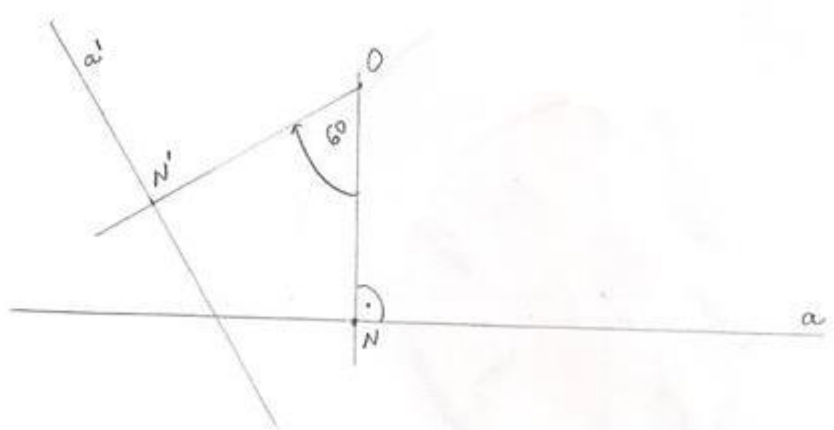
Rotacija za ugao od 180° je centralna simetrija.

Zadaci:

1. Date su prave a i b i tačka S van njih. Konstruisati krug sa centrom S koji seče date prave u tačkama A, odnosno B, tako da je ugao ASB=60°.

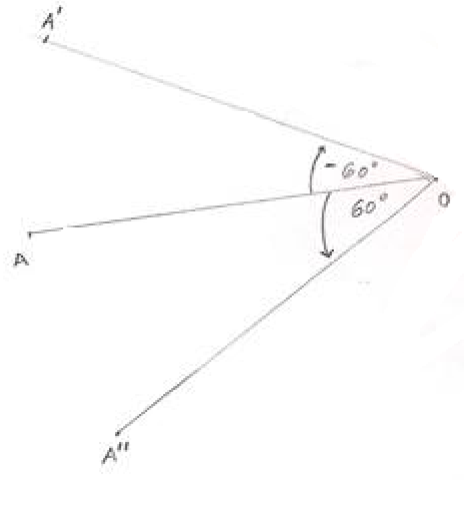
Podsetnik: <u>rotacija prave a oko tacke O za ugao -60°:</u>

Spustimo normalu iz tačke O na pravu a.
Normala preseca a u tački N.
Rotiramo tačku N za -60° oko tačke O i time dobijamo tačku N'.
Dovoljno je sada nacrtati pravu normalnu na ON' u tački N' i to će biti upravo naša prava a', tj prava a rotirana za -60° oko tačke O.

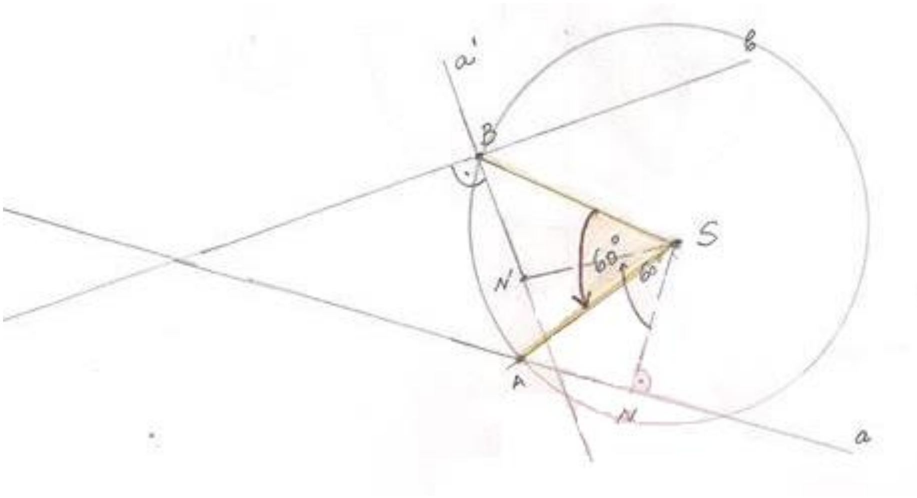


Podsetnik: <u>rotacija tačke A oko tacke O za ugao</u> α <u>:</u>

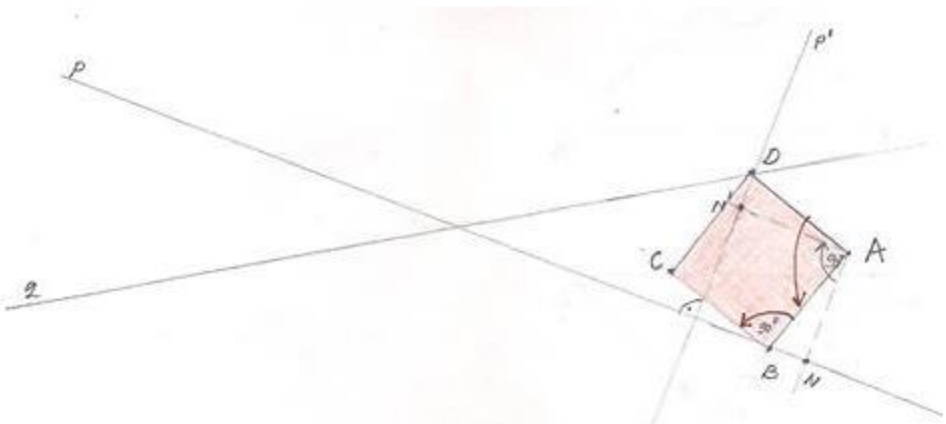
Kada tačku A rotiramo za ugao +α oko centra O, dobijamo tačku A'' koja se nalazi sa leve strane gledajući u odnosu na O tako da je ugao AOA''= α.
Kada tačku A rotiramo za ugao -α oko centra O, dobijamo tačku A' koja se nalazi sa desne strane gledajući u odnosu na O tako da je ugao AOA'= α.



Rotiramo pravu a oko tačke S za -60° i time dobijamo pravu a’.
a’∩b={B}
Zatim rotiramo tačku B za +60° oko tačke S i dobijamo tačku A na pravoj a.
Pa je onda SA=SB.
I konstruisemo krug k(S,SA).

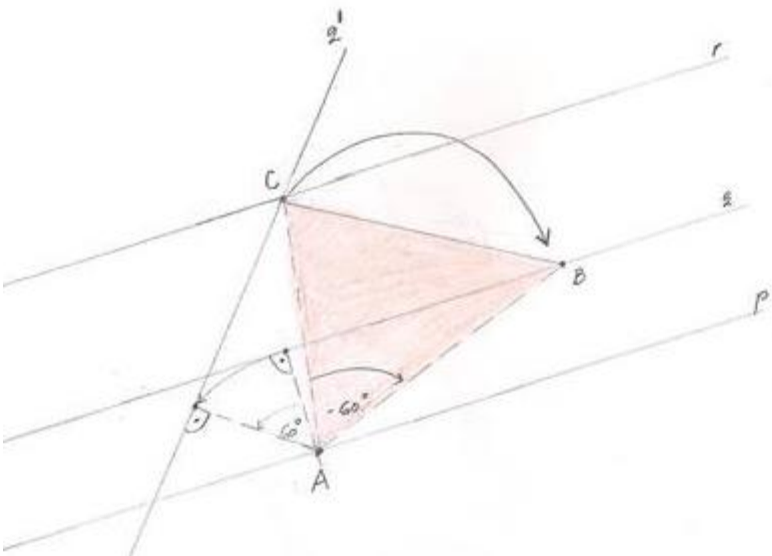


2. Date su prave p i q i tačka A van njih. Konstruisati kvadrat ABCD tako da Bєp i Dєq.



Rotacijom prave p oko tačke A za 90° dobićemo pravu p’
p’∩q={D}
Rotacijom tačke D oko tačke A za +90° dobićemo tačku B koja ce pripadati pravoj p.
Onda AD=AB.
Rotacijom tačke A oko tačke B za +90° dobićemo tačku C i bice AB=BC.
Odatle sledi AB=BC=AD, i posto su uglovi izmedju njih 90°,onda je CD jednaka njima.
Ovim smo dobili da je cetvorougao ABCD kvadrat.

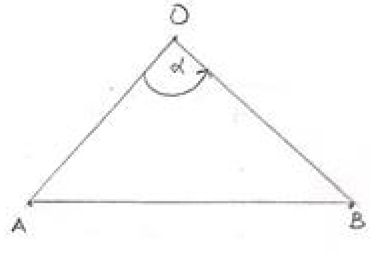
3. Date su paralelne prave p, q i r i na pravoj p tačka A. Konstruisati jednakostranični trougao ABC, tako da B϶q, a C϶r.



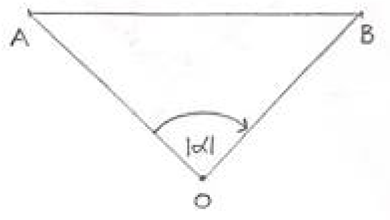
Rotacijom prave q oko tačke A za 60° dobićemo pravu q'.
q'∩r={C}
Rotacijom tačke C oko tačke A za -60° dobićemo tačku B koja ce biti na pravoj q.
Sledi AC=AB i izmedju njih je ugao od 60° pa ce biti AB=AC=BC i trougao ABC bice jednakostranicni.

4. Date su tačke A i B i ugao α. Dokazati da postoji samo jedna tačka O tako da važi da se rotacijom tačke A oko tačke O za ugao α dobija tačka B.

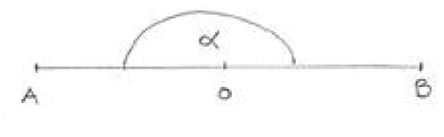
- 0°< α <180°: ΔOAB je jednakokraki sa osnovicom AB i uglom α kod temena C i uz to je pozitivno orijentisan, pa je tačka A jednoznačno odredjena.



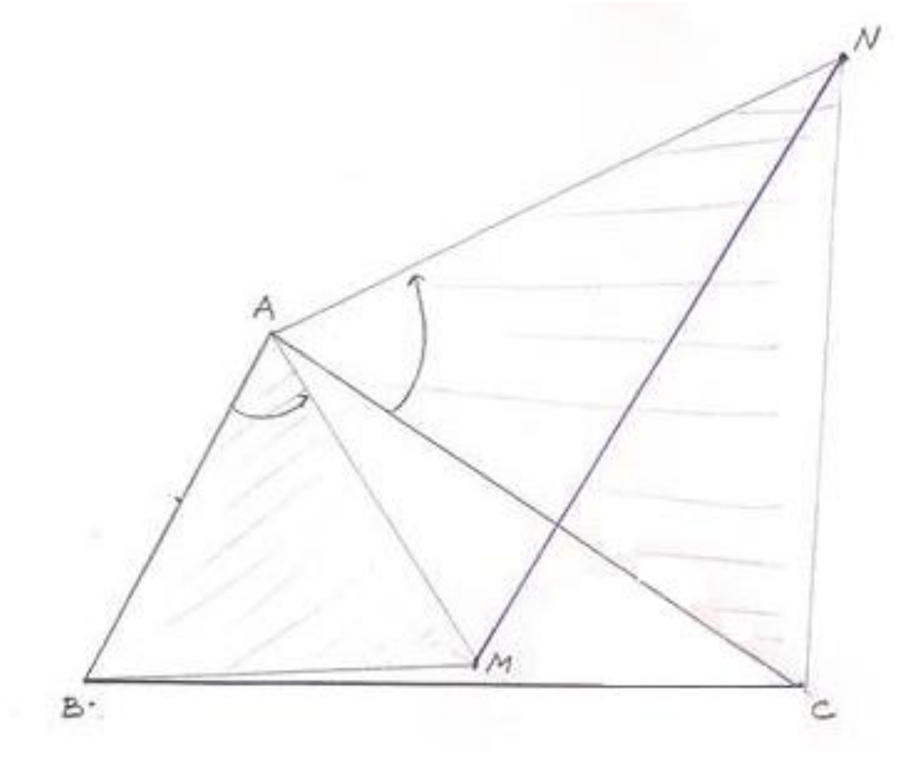
- -180°< α <0°: ΔOAB je jednakokraki sa osnovicom AB i uglom |α| kod temena C i uz to je negativno orijentisan, pa je ponovo tačka A jednoznačno odredjena.



- α =180°: O je središte duži AB



5. Nad stranicama AB i AC proizvoljnog trougla ABC konstruisani su jednakostranični trouglovi ABM i ACN. Pretpostavimo da su trouglovi ABC, ABM, ACN svi pozitivno orijentisani. Dokazati da je MN=BC.



Rotacijom tačke B oko tačke A za 60° dobićemo tačku M.
Rotacijom tačke C oko tačke A za 60° dobićemo tačku N.
Odatle sledi da ćemo rotacijom duži BC oko tačke A za 60° dobiti duž MN.
I odatle imamo traženu jednakost.

Literatura:

- Ž. Ivanović, S. Ognjanović – Zbirka zadataka i testova za I razred gimnazija i tehničkih škola