Инваријанте, моноваријанте и бојења

Милош Милосављевић

20. октобар 2014.

Инваријанте и моноваријанте

1.1 Увод

Налажење инваријанте је једна од стратегија решавања проблема, који су махом алгоритамске природе, попут трансформација и игара. Заснива се на проналажењу својства које се не мења при одређеној трансформацији, континуалној промени или примени неког алгоритамског поступка, који посматрамо. Ради илустрације, претпоставимо да имамо новчанице од 10, 20 и 50 динара и да требамо платити тачно 187 динара. Ово је наравно, немогуће, јер уочавамо да сваки износ који можемо платити овим новчаницама завршава цифром 0. Другим речима, нашли смо једну једноставну инваријанту. Уопштено гледано, приликом решавања проблема који укључују низове, рекурзију или итеративни процес, у којима желимо да одговоримо на питања:

- Да ли из почетног стања I можемо доћи у завршно стање F?
- Која су сва могућа завршна стања у која можемо доћи из почетног стања I?
- Постоји ли нека тежња (конвергенција) ка неком завршном стању?

Користимо два приступа која нам помажу, приступ инваријанти и приступ моноваријанти. Приступ моноваријанти се састоји у уочавању својства чија вредност при одређеној трансформацији стално и строго опада или стално и строго расте.

Када пронађемо инваријанту, лако можемо да одговоримо да ли се из почетног стања I може доћи до завршног стања F, тако што извршимо једноставно поређење вредности уоченог својства за I и за F. За разлику од тога, када пронађемо моноваријанту, можемо видети да ли је вредност уоченог својства за I строго већа или строго мања од оне за F, те да ли можда постоји нека конвергенција ка истој.

Инваријанте и моноваријанте су корисне и за проналажење свих могућих стања и то системом елиминације немогућих стања и имплицитним указом на поступак којим се до одређеног стања може доћи из задатог почетног.

Покажимо једну компликованију моноваријанту и једноставну инваријанту на следећем примеру:

Пример 1. *n црвених и n плавих тачака је дато у равни, тако да никоје три тачке не припадају истој правој. Доказати да постоји n разних дужи које повезују црвене са плавим тачкама тако да се никоје две не секу.*

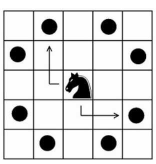
Први проблем на који наилазимо приликом решавања овог задатка је тај што немамо итеративни поступак. Због тога овај поступак морамо дефинисати сами. Уочимо прво да имамо укупно $n!$ начина да одаберемо n дужи са крајевима у разним бојама, таквих да се никоје две немају исту тачку као крај. Повежимо n црвених са n плавих тачака на произвољан начин. Дефинишимо следећи итеративни поступак, уколико се две дужи, назовимо их AC и BD, секу, уочимо четвороугао $ABCD$ и затим ове две дужи које су заправо дијагонале, заменимо одговарајућим парем страница, са разнобојним крајевима. Без умањења општости, претпоставимо да су тачке A и B црвене,а C и D плаве. Дијагонале AC и BD замењујемо парем страница AD и BC. Овиме смо дефинисали један итеративни поступак. Питање које постављамо је, може ли се овај процес бесконачно понављати? Ту у помоћ призивамо следећу моноваријанту: суму дужина свих повезаних дужи S. Приметимо да у сваком кораку у којем се дужи AC и BD секу, њиховом заменом дужима AD и BC, S се смањује, што је једноставна последица неједнакости троугла. Дакле, у сваком кораку, S се смањује, што значи да се након неколико корака не можемо вратити у пређашње стање, дакле нема бесконачних циклуса и понављања, па итеративни процес мора стати. Уочимо још и да је број дужи након сваке замене инваријанта-избацимо две дужи, а убацимо две нове, па ћемо на крају, кад итеративни процес стане, остати са n разних дужи које повезују црвене са плавим тачкама тако да се никоје две не секу. □

Један леп начин да се гледа на моноваријанте је тај да су оне инваријанте релације монотоности. То смо могли видети у претходном примеру, где смо опадање сума дужина дужи могли посматрати као инваријанту.

1.2 Неке примене инваријанти и моноваријанти

Као што смо већ истакли, инваријанте и моноваријанте нам могу помоћи при проналажењу адекватне стратегије у разним играма.

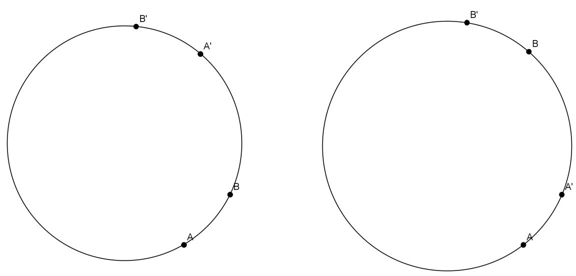
Пример 2. *Станислав и Радислав играју потезну игру на класичној шаховској табли. Станислав има 33 бела коња, а Радислав 33 црна. Свако од њих у свом потезу поставља једног коња на шаховску таблу. Игру губи онај играч, који постави свог коња на позицију коју напада коњ противничког играча, или онај који остане без иједне позиције на коју би могао да смести коња. Ако Станислав игра први, ко има победничку стратегију, бели или црни?*



Прва ствар коју треба да уочимо јесте начин на који коњ напада. Наиме, коњ на белом пољу може да напада само црна поља и обрнуто. Дакле, инваријанта ће овде бити боја поља која коњ може да напада, а која је увек супротна оној на којој се исти налази. Уочимо такође, да како је табла 8x8, Радислав ће сигурно победити уколико издржи до краја, тј. уколико успе да избегне сва поља које нападају бели коњи. Он то лако може да уради, користећи инваријанту и начин на који коњ напада. Само треба да игра симетрично Станиславу у односу на центар шаховске табле. Тиме ће постићи, да кад год Станислав постави коња на бело поље и напада црна, он одигра на бело поље где је безбедан и обратно. Дакле, Радислав има победничку стратегију. □

Комбинација ове методе са Дирихлеовим принципом је моћно математичко оружје.

Пример 3. *Марија је вођа фолклорног ансамбла и води своју трупу на фестивал народних игара, како би играли коло. Коло које играју се игра искључиво у затвореном облику (тј. образује се круг). Међутим, вече пре наступа у трупи је избила велика свађа. У трупи игра укупно $2n$ особа, а Марија је успела да сазна да је свака особа у свађи са највише $n-1$ других особа. Уколико Марија распореди две особе које су у свађи да играју коло једна до друге, наступ неће бити на жељеном нивоу. Може ли Марија да распореди своју трупу, тако да они одиграју најбоље што умеју?*



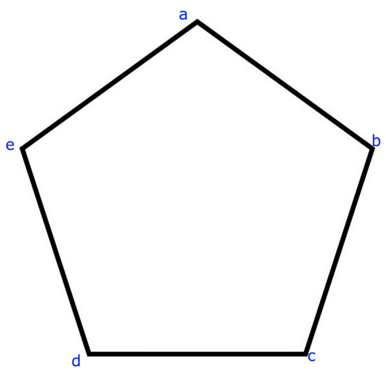
Поређајмо трупу у коло на произвољан начин. Нека је H број посвађаних парова који су један до другог у колу. Тражимо алгоритам који за моноваријанту има H и смањује је кад год је $H > 0$. Нека су A и B у свађи и један до другог у колу, тако да је B десно од A. Желимо да их раздвојимо, али да тиме не узрокујемо стварање нових посвађаних парова који су један до другог у колу.

Нека су A' и B' један до другог у колу, тако да A' је лево од B', A и A' нису у свађи и B и B' нису у свађи. Показаћемо користећи Дирихлеов принцип да овакав пар (A', B') мора да постоји. Кренимо из A у смеру супротном од казаљке на сату. По Дирихлиеу, како A има највише $n-1$ особа са којима је у свађи, идући у овом смеру, морамо наићи на n особа са којима није у свађи. Са њихове десне стране има n места, а B има највише $n-1$ особа са којима је у свађи. Опет по Дирихлеу, на једном од тих места мора бити особа која није у свађи са B. Дакле, уочени пар (A', B') мора да постоји.

Приметимо да у овој ситуацији, сео алгоритам који нам је потребан је обртање лука BA'. Овиме је H моноваријанта која се смањује сваким обртањем лука. Дакле, након коначно много корака H ће постати 0, па Марија сигурно може да распореди своју трупу, тако да они одиграју најбоље што умеју. □

Некада, инваријанту је тешко уочити.

Пример 4. *Сваком темену правилног петоугла додељен је цео број, тако да је сума свих пет бројева позитивна. Дозвољена је следећа трансформација: Ако су x, y и z три броја која су додељена узастопним теменима и ако је $y < 0$, заменимо (x, y, z) са $(x + y, -y, y + z)$. Овај процес се понавља док год има преосталих негативних бројева. Хоће ли овај процес икад стати, ако на почетку сигурно имамо бар један негативан број?*



Обележимо петоугао са a,b,c,d и e као на слици.

Дакле, потребна нам је нека инваријанта. Једина тривијална инваријанта јесте збир: $x + y + z = (x + y) + (-y) + (y + z)$. Међутим он нам ништа не говори о томе да ли процес стаје. Прецизније, потребно нам је нешто што опада, док збир остаје константан. Интуитивно, збир је уско повезан са аритметичком средином. Такође, ако су сви бројеви близу аритметичке средине и збир сви ће бити позитивни и процес ће стати. Желимо дакле нешто што ће расти, што су бројеви даље од аритметичке средине. Природно би онда било да користимо $|x - y|$, али је боља и лакша алтернатива у овом случају квадрат $(x - y)^2$.

У складу са нотацијом коју смо увели, посматрајмо следећу функцију:
$f(a, b, c, d, e) = (a - c)^2 + (b - d)^2 + (c - e)^2 + (d - a)^2 + (e - b)^2$
Очигледно $f(a, b, c, d, e) \geq 0$. Без губитка општости, претпоставимо $c < 0$. Посматрајмо како трансформација утиче на f:
$f(a, (b+c), -c, (d+c), e) = (a+c)^2+(b-d)^2+(-c-e)^2+(d+c-a)^2+(e-b-c)^2$

Сређивањем овог израза, лако се добија $f(a, (b + c), -c, (d + c), e) = f(a, b, c, d, e)+2c(a+b+c+d+e)$. Како је $c < 0$ и $a+b+c+d+e > 0$, видимо да је f моноваријанта и да опада у сваком кораку. Како је и $f(a, b, c, d, e) \geq 0$, а a, b, c, d, e цели бројеви, закључујемо да процес мора стати. У супротном, бисмо имали опадајући пребројив низ $f_1, f_2, ..., f_n, ...$, целих бројева који су већи од 0, а такав низ не постоји. □

1.3 Бојења

Проблеми бојења, у ствари представљају проблеме партиционисања скупа у коначан скуп подскупова. Име су добили, јер можемо рећи да сваки елемент почетног скупа бојимо неком бојом, која је у ствари боја оног подскупа у партиционисању, којем тај елеменат припада. 1961. године, Британац Фишер, је решио јако тежак проблем, доказавши да се стандардна шаховска табла може попунити црно-белим плочицама 2x1 на 2^4x901^2 начина. Сада исецимо нека два дијагонално супротна поља, нпр, ћошкове. Делује да смо добили тежи проблем од почетног. Међутим, овај проблем је малтене тривијалан и урадићемо га као уводни пример.

Пример 5. *Доказати да се шаховска табла којој су исечена два дијагонално супротна ћошка, не може поплочати црно-белим 2x1 плочицама.*

Уочимо да су та два одсечена ћошка исте боје, нпр беле. То значи да нам је на табли остало 30 белих и 32 црних поља. Када би успели да поплочамо плочицама, утрошили би 31 плочицу, чиме би имали 31 црно и 31 бело поље покривено. Дакле, није могуће остварити наведено поплочавање. □

Пример 6. *Позитивни цели бројеви су обојени белом и црном бојом. Збир два броја разних боја је црне боје, а њихов производ је беле боје. Која је боја збира два бела броја? Наћи сва бојења позитивних целих бројева који задовољавају ове услове.*

Нека су a и b бели бројеви. Нека је k неки црни број. Тада је $a + k$ црни број. Одавде је $(a + k)b$ бели. Како је $(a + k)b = ab + kb$ и kb је бели, закључујемо да ab мора бити црни. У супротном је број $(a + k)b = ab + kb$ и црни и бели.

Претпоставимо да је k најмањи бели број. Закључујемо да и сви умношци броја k морају бити бели. Докажимо да нема других белих бројева. Претпоставимо да је n неки други бели број. Тада $n = kq + r$, где је $0 \leq r \leq k$. Ако $r \neq 0$, онда је r црни број, јер је мањи од k, а k је најмањи бели. Међутим, показали смо да је kq увек бели. Одавде закључујемо да је $n = kq + r$ црни. Контрадикција! Овим смо доказали да су сви бели бројеви умношци неког позитивног, целог броја $k > 0$.

Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

TEORIJA BROJEVA

- Seminarski rad iz Metodike nastave matematike i računarstva -

Studenti:

Anica Kostić 64/2011
Ivana Rogić 71/2011
Jasna Glavonjić 78/2011
Jelena Rogić 115/2011
Jovana Vulović 33/2011
Katarina Jeremić 143/2011
Marija Zdolšek 105/2011
Marijana Avalić 38/2011
Mila Vukmirović 39/2011
Milan Radovanović 213/2011
Milica Ivezić 159/2011
Mirko Palčić 166/2010
Nikola Mitrinović 68/2011
Predrag Tošić 137/2010
Sandra Belić 168/2011

Profesor:

Nebojša Ikodinović

Asistent:

Tanja Stojadinović

Novembar 2014.

Sadržaj

Teorijski uvod

1. Ako je $b = aq$ za neko $q \in \mathbb{Z}$ onda kažemo da a deli b, u oznaci $a|b$.

2. **Osobine deljivosti**

- $a|b, b|c \Longrightarrow a|c$
- $d|a, d|b \Longrightarrow d|ax + by$. Posebno $d|a + b, d|a - b$.
- Neka je $a + b = c$. Ako d deli neka dva od brojeva a, b i c onda d deli i treći broj.

3. **Deljenje sa ostatkom.** Svaki ceo broj a se može, za dati ceo broj b, na jedinstven način predstaviti u obliku:

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < |b|$$

gde q zovemo količnik, a r ostatak dobijen pri deljenju broja a brojem b.

4. **NZD i Euklidov algoritam**. Neka su a i b nenegativni celi brojevi i neka je bar jedan različit od 0. Njihov najveći zajednički delilac i najmanji zajednički sadržalac se obeležavaju sa NZD(a,b) i sa NZS(a,b) redom. Važi:

$\mathrm{NZD}(a,1)$=1, NZD (a,a)= a, NZD $(a, 0)$= a, NZD (a, b)= NZD (b, a).

Za brojeve a i b kažemo da su *uzajamno prosti* ako je NZD (a, b)=1.

Na osnovu osobine NZD (a,b)= NZD $(b, a - b)$ gde je a>b (analogno za a<b) možemo računati NZD (a,b) uzastopnim oduzimanjem manjeg broja od većeg. Primer:

NZD (48,30)= NZD (30,18)= NZD (18,12)= NZD (12,6)= NZD (6,6)=6.

Euklidov algoritam se bazira na prethodnom algoritmu:

$a = bq + r \Longrightarrow \mathrm{NZD}(a, b) = \mathrm{NZD}(b, r) = \mathrm{NZD}(b, a - bq)$

Teorema: NZD (a, b) se može prikazati kao NZD (a, b)= $ax + by$, gde su x i y celi brojevi.

5. $\mathrm{NZD}(a, b) \cdot \mathrm{NZS}(a, b) = ab$

6. Prirodni broj nazivamo prostim brojem ako je deljiv sa tačno dva prirodna broja (sa jedinicom i samim sobom).

7. **Euklidova lema.** Neka je p prost broj, tada važi $p|ab \Longrightarrow p|a \vee p|b$.

8. Neka je p prost broj. Tada važi $p|\binom{p}{i}, 1 \leq i \leq p-1$.

Binomni koeficijent $\binom{p}{i} = \frac{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-i+1)}{i!}$ je prirodan broj. Pošto su p i $i!$ uzajamno prosti, onda $i!$ mora deliti $(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-i+1)$, pa se $\binom{p}{i}$ može zapisati u obliku $p\cdot q,\ q \in \mathbb{N}$.

9. **Osnovna teorema aritmetike.** Svaki prirodan broj se može prikazati kao proizvod prostih brojeva pri čemu je ta faktorizacija jedinstvena do na poredak faktora.

10. Brojevi $n!+2, n!+3, \ldots, n!+n$ čine niz od $n-1$ uzastopnih složenih brojeva.

11. Najmanji prost faktor složenog broja n je manji ili jednak broju $\sqrt{n}$.

12. Svi prosti brojevi p>3 imaju oblik $6n \pm 1$.

13. **Kongruencije.** $a \equiv b\ (mod\ m) \Leftrightarrow m|a-b \Leftrightarrow a-b=qm \Leftrightarrow a=b+qm \Leftrightarrow a$ i b imaju jednake ostatke pri deljenju sa m.

Neka je $a \equiv b\ (mod\ m),\ c \equiv d\ (mod\ m)$.

Tada važi:

$a \pm c \equiv b \pm d\ (mod\ m), ac \equiv bd\ (mod\ m)$

Odatle sledi:

$a \equiv b\ (mod\ m) \Rightarrow a^k \equiv b^k\ (mod\ m)$ i $a \equiv b\ (mod\ m) \Rightarrow f(a) \equiv f(b)\ (mod\ m)$,

gde je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\quad a_i \in \mathbb{Z}$.

Važi i pravilo "skraćivanja": $\mathrm{NZD}(c,m)=1,\ ca \equiv cb\ (mod\ m) \Rightarrow a \equiv b\ (mod\ m)$.

14. **Mala Fermaova teorema.** Neka je a prirodan i p prost broj. Tada važi:

$$a^p \equiv a\ (mod\ p)$$

U slučaju da su a i p uzajamno prosti brojevi, prema pravilu iz prethodne stavke, važi:

$$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$$

15. Dokazi Male Fermaove teoreme:

1) Dokaz indukcijom.

Tvrđenje važi za $a = 1$, pošto $p|1^p - 1$ za svaki prost broj p.

Neka tvrđenje važi za a, tj. $p|a^p - a$ za svaki prost broj p.

Pokazaćemo da važi $p|(a+1)^p - (a+1)$. Zaista,

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^{p-i} + 1 - (a+1)$$

$$= a^p - a + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^{p-i}$$

Znamo da $p|\binom{p}{i}, 1 \leq i \leq p-1,$ na osnovu stavke 8. Takođe, na osnovu induktivne pretpostavke važi $p|a^p - a,$ pa dobijamo $p|(a+1)^p - (a+1)$.

2) Dokaz korišćenjem kongruencije.
Iz $c_i \equiv d_i\ (mod\ p),\ i = 1, \dots, n$ sledi $c_1 c_2 \dots c_n \equiv d_1 d_2 \dots d_n\ (mod\ p)$, što predstavlja uopštenje svojstva kongruencije iz stavke 13.

Neka je $\mathrm{NZD}\ (a, p)$=1. Formiramo niz:

$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a.$

Nikoja dva člana ovog niza nisu međusobno kongruentna po modulu p zato što za proizvoljne $1 \leq i, k \leq p-1$ važi

$ia \equiv ka\ (mod\ p) \Rightarrow i \equiv k\ (mod\ p)\ \Rightarrow\ i = k.$

Ima $p-1$ članova formiranog niza i svi daju različite ostatke pri deljenju sa p. Pritom, svi ti brojevi su uzajamno prosti sa p, zato što $\mathrm{NZD}\ (a, p)$=1 i $\mathrm{NZD}\ (i, p)$=1 za svako $1 \leq i \leq p-1$. Odatle zaključujemo da je svaki od brojeva iz formiranog niza kongruentan sa tačno jednim brojem iz niza 1,2,3,...,p-1. Kada primenimo svojstvo navedeno na početku ovog dokaza, dobija se:

$a^{p-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1)\ (mod\ p),$

a pošto je $\mathrm{NZD}\big((p-1)!\,, p\big) = 1$, primenimo pravilo “skraćivanja” iz stavke 13 i dobija se

$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p).$

3) Kombinatorni dokaz.
   Neka su date perle obojene jednom od a različitih boja. Pravi se ogrlica od tačno p ovakvih perli. Prvo pravimo niz od p perli, pa postoji a^p različitih nizova. Ako izuzmemo jednobojne nizove ostaje nam $a^p - a$ nizova. Spajamo krajeve da bismo dobili ogrlicu. Niz perli koji predstavlja cikličnu permutaciju nekog drugog niza daje identičnu ogrlicu kao taj niz. Postoji p cikličnih permutacija p perli u nizu, pa je broj različitih ogrlica $(a^p - a)/p$. Odatle zaključujemo da mora biti $p|a^p - a$.

16. Obrnut smer Male Fermaove teoreme ne važi. Na primer, za brojeve $a = 2$, $p = 341$ važi $341|\ 2^{341} - 2$, a $341 = 31 \cdot 11$ nije prost. Zaista:

$2^{341} - 2 = 2(2^{340} - 1) = 2((2^{10})^{34} - 1^{34}) = 2(2^{10} - 1)(\dots)= 2 \cdot 3 \cdot 341 \cdot (\dots)$

17. **Ojler-Fermaova teorema**. Ojlerova ϕ–funkcija je definisana sa:

$\phi(m) = broj\ elemenata\ iz\ skupa\ \{1, \dots, m\}\ koji\ su\ uzajamno\ prosti\ sa\ m$.

NZD $(a, m) = 1 \Rightarrow a^{\phi(m)} \equiv 1\ (mod\ m)$.

18. **Funkcija „ceo deo“**

Neka $x \in \mathbb{R}$. Ceo deo broja x u oznaci $\lfloor x \rfloor$ je najveći ceo broj manji ili jednak broju x. Broj $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ zovemo frakcijom (razlomljenim delom) broja x.

Neke osobine:

1) $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Jednakost važi ako $x\ (mod\ 1) + y\ (mod\ 1) < 1$
2) $\lfloor \lfloor x \rfloor / n \rfloor = \lfloor x/n \rfloor$. Ovo je specijalni slučaj jednakosti $\lfloor (\lfloor x \rfloor + m)/n \rfloor = \lfloor (x + m)/n \rfloor$ koja važi za cele brojeve m i $n \neq 0$.
3) $\lfloor x + 1/2 \rfloor$ je jednak celom broju koji je najbliži broju x. Ovo važi jer možemo da nađemo ceo broj n takav da važi jedan od dva slučaja:

$$n \leq x < n + \frac{1}{2} \Longrightarrow \lfloor x + 1/2 \rfloor = n$$
$$n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1 \Longrightarrow \lfloor x + 1/2 \rfloor = n + 1$$

4) Neka je n prirodan broj i $p < n$ prost broj. Tada je broj m, najveći stepen broja p takav da $p^m | n!$, jednak $m = \lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \lfloor n/p^3 \rfloor + \cdots$.

Kongruencije

1. Naći ostatak pri deljenju broja: a) 2^{100} sa 7; b) 5^{20} sa 24.

   Rešenje:

   a) Kako je $2^3 \equiv 1 \ (mod\ 7)$ to je i $(2^3)^{33} \equiv 1 \ (mod\ 7)$, pa je $2^{100} \equiv 2 \ (mod\ 7\ )$

   b) Iz $5^2 \equiv 1 \ (mod\ 24)$ sledi $5^{20} \equiv 1 \ (mod\ 24)$.

2. Dokazati da za sve prirodne brojeve n važi: a) $10^{3n} - 1 \equiv 0 \ (mod\ 37)$; b) $2^{5n} - 1 \equiv 0 \ (mod\ 31)$; c) $12^n - 1 \equiv 0 \ (mod\ 11)$.

   Rešenje:

   a) Kako je $10^3 - 1 = 999 = 37 \cdot 27$ to je $10^3 \equiv 1 \ (mod\ 37)$, pa je i $10^{3n} \equiv 1 \ (mod\ 37)$.

   b) Kako je $2^5 \equiv 1 \ (mod\ 31)$ to je i $2^{5n} \equiv 1 \ (mod\ 31)$.

   c) Kako je $12 \equiv 1 \ (mod\ 11)$ to je i $12^n \equiv 1 \ (mod\ 11)$.

3. Dokazati da je broj $9^{44} + 4^{99}$ deljiv sa 5.

   Rešenje:

   Kako je $9 \equiv -1 \ (mod\ 5)$, to je $9^{44} \equiv 1 \ (mod\ 5)$. Iz $4 \equiv -1 \ (mod\ 5)$ sledi $4^{99} \equiv -1 \ (mod\ 5)$. Sabiranjem dobijamo $9^{44} + 4^{99} \equiv 0 \ (mod\ 5)$.

4. Broj $3^{105} + 4^{105}$ je deljiv sa 13, a nije deljiv sa 11. Dokazati.

   Rešenje:

   Kako je $3^3 \equiv 1 \ (mod\ 13)$ i $4^3 \equiv -1 \ (mod\ 13)$, to je $3^{3 \cdot 35} \equiv 1 \ (mod\ 13)$ i $4^{3 \cdot 35} \equiv -1 \ (mod\ 13)$, tj. $3^{105} + 4^{105} \equiv 0 \ (mod\ 13)$. Iz $3^5 \equiv 1 \ (mod\ 11)$ i $4^5 \equiv 1 \ (mod\ 11)$, sledi $3^{5 \cdot 21} \equiv 1 \ (mod\ 11)$ i $4^{5 \cdot 21} \equiv 1 \ (mod\ 11)$, pa je $3^{105} + 4^{105} \equiv 2 \ (mod\ 11)$.

5. Izvesti pravilo za deljivost celog broja sa: a) 9; b) 11.

   Rešenje:

   a) Prirodan broj M napisan u decimalnom sistemu ima oblik:

$$M = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n$$

gde su $a_0, a_{1,\ldots,}a_n$ cifre. Sabiranjem relacija

$$a_0 \equiv a_0\ (mod\ 9),\ \ 10a_1 \equiv a_1\ (mod\ 9), \ldots, 10^n a_n \equiv a_n\ (mod\ 9)$$

dobijamo $M \equiv (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(mod\ 9)$. Znači, broj je deljiv sa 9 ako i samo ako je zbir cifara tog broja deljiv sa 9.

b) Kako je $10 \equiv -1\ (mod\ 11)$, imamo da je:

$$10^2 \equiv 1\ (mod\ 11),\ 10^3 \equiv -1\ (mod\ 11),\ \ldots,\ 10^n \equiv (-1)^n\ (mod\ 11)$$

Broj M je predstavljen u obliku:

$$M = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n$$

Neka je

$$Q = a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n$$

Tada je

$$M - Q = (10{+}1)a_1 + \cdots + (10^{n-1} - (-1)^{n-1})a_{n-1} + (10^n - (-1)^n)a_n$$

S obzirom da je $10^k - (-1)^k \equiv 0\ (mod\ 11)$, zaključujemo da je $M - Q\ \equiv 0\ (mod\ 11)$, što znači da je broj M deljiv sa 11 ako i samo ako je i broj Q deljiv sa 11. Dakle, pravilo glasi ovako: ako je dat prirodan broj M, izračunati zbir njegovih cifara, sa naizmeničnim znacima +, -, i to polazeći od cifre jedinica ka cifri najveće težine. Ako je tako dobijen broj deljiv sa 11, onda je i M deljiv sa 11.

6. Dokazati da važi: $n \equiv 1\ (mod\ 2) \Longrightarrow n^2 \equiv 1\ (mod\ 8) \Leftrightarrow 8 \mid n^2 - 1$.

Rešenje:

Kako je ostatak pri deljenu broja n sa 2 jednak 1, to znači da je on neparan, pa se može zapisati u obliku $n = 2q + 1$. Dalje je

$$n^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4q(q + 1) + 1$$

Pošto je tačno jedan od brojeva q i $q + 1$ deljiv sa 2, to znači da je

$$n^2\ = 8r + 1$$

Odatle je kvadrat bilo kog neparnog broja kongruentan sa 1 po modulu 8.

Ova činjenica se često koristi u zadacima.

7. Neka su $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ i b celi brojevi takvi da je $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2$. Dokazati da je bar jedan od ovih brojeva paran.

Rešenje:

Neka je $2k+1$ proizvoljan neparan broj, tada je $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1)+1$, pa je $(2k+1)^2 \equiv 1 \ (mod\ 8)$ .Pretpostavimo suprotno, da su svi brojevi $a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4, \ a_5$ i b neparni. Tada je $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \equiv 5 \ (mod\ 8)$, a $b^2 \equiv 1 \ (mod\ 8)$ pa je jednakost $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2$ nemoguća.

8. Ako je $n \in N$, dokazati da je broj $7^{2n} - 4^{2n}$ deljiv sa 33.

   Rešenje:

   Kako je $7 \equiv 4 \ (mod\ 3)$, to je $7^{2n} \equiv 4^{2n} \ (mod\ 3)$, a pošto je $7 \equiv -4 \ (mod\ 11)$, to je $7^{2n} \equiv 4^{2n}$ $(mod\ 11)$. Brojevi 3 i 11 su prosti, pa je $7^{2n} \equiv 4^{2n}$ $(mod\ 33)$.

9. Dokazati da je 13 $|2^{70} + 3^{70}$

   Rešenje:

   Po maloj Fermaovoj teoremi je $2^{12} \equiv 1 \ (mod\ 13)$, pa je i $2^{60} \equiv 1 \ (mod\ 13)$.
   $2^{10} = 1024$, a $1024 \equiv -3 \ (mod\ 13)$, pa je $2^{70} \equiv -3 \ (mod\ 13)$ (1).
   Pošto je $3^3 \equiv 1 \ (mod\ 13)$, to je i $3^{69} \equiv 1 \ (mod\ 13)$, pa je $3^{70} \equiv 3 \ (mod\ 13)$ (2).
   Na osnovu (1) i (2) sledi da je $2^{70} + 3^{70} \equiv 0$ $(mod\ 13)$.

10. Dokazati: a) Ako je a ceo broj koji nije deljiv sa 7, tada je $a^{12} \equiv 1 \ (mod\ 7)$.

    b) Neka su a i b celi brojevi koji nisu deljivi ni sa 5 ni sa 13. Pokazati da tada važi $a^{12} - b^{12} \equiv 0 \ (mod\ 65)$

    Rešenje:

    a) Po maloj Fermaovoj teoremi $a^6 \equiv 1 \ (mod\ 7)$, to je i $a^{12} \equiv 1 \ (mod\ 7)$.
    b) Kako je $a^{12} \equiv b^{12} \equiv 1 \ (mod\ 13)$ i $a^4 \equiv b^4 \equiv 1 \ (mod\ 5)$, to je i $a^{12} \equiv b^{12} \equiv 1 \ (mod\ 5)$. Pošto su 5 i 13 uzajamno prosti, to je $a^{12} \equiv b^{12} \equiv 1 \ (mod\ 65)$, tj. $a^{12} - b^{12} \equiv 0 \ (mod\ 65)$.

11. Neka je (x, y, z) rešenje jednačine $x^2 + y^2 = z^2$. Pokazati da je jedan od ova tri broja deljiv sa 3.

    Rešenje:

Pretpostavimo da nijedan od brojeva x, y, z nije deljiv sa 3. To znači da se oni mogu zapisati u obliku:

$$x = 3q + 1 \text{ (ili } x = 3q + 2)$$
$$y = 3q + 1 \text{ (ili } y = 3q + 2)$$
$$z = 3q + 1 \text{ (ili } z = 3q + 2)$$

pa je $x^2 = 9q^2 + 6q + 1$ (odnosno $x^2 = 9q^2 + 12q + 3 + 1$) i slično i za y, z. To znači da je $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 1 \ (mod\ 3)$. Iz polazne jednačine dobijamo da je $1 + 1 \equiv 1 \ (mod\ 3)$, što nije tačno. Dakle, pretpostavka ne važi pa je bar jedan od brojeva x, y, z deljiv sa 3.

12. Naći sve pozitivne cele brojeve n takve da važi $3 \mid n2^n - 1$.

Rešenje:

Ako je n paran, $n = 2q, q \in \mathbb{N}_0$. $2^n = 2^{2q} = 4^q \equiv 1^q \equiv 1 \ (mod\ 3)$, pa je $n2^n - 1 \equiv n - 1 \ (mod\ 3)$. Kako tražimo n tako da je $n2^n - 1 \equiv 0 \ (mod\ 3)$ onda je i $n - 1 \equiv 0 \ (mod\ 3)$ tj. $n \equiv 1 \ (mod\ 3)$. Dakle, $n = 6q + 4 \ (q \in \mathbb{N}_0)$.

Slično, ako je n neparan, $n = 2q + 1, q \in \mathbb{N}_0$. $2^n = 2^{2q+1} = 4^q \cdot 2 \equiv 2 \equiv -1 \ (mod\ 3)$, pa je $n2^n - 1 \equiv -n - 1 \ (mod\ 3)$, tj. treba da važi $-n - 1 \equiv 0 \ (mod\ 3)$. Dakle, $n = 6q + 5 \ (q \in \mathbb{N}_0)$.

Svi brojevi koji zadovoljavaju uslov zadatka su ili oblika $n = 6q + 4 \ (q \in \mathbb{N}_0)$ ili $n = 6q + 5 \ (q \in \mathbb{N}_0)$

13. Ako je $x^2 + 2y^2$ prost neparan broj onda je on oblika $8n + 1$ ili $8n + 3$. Dokazati.

Rešenje:

Kako je $x^2 + 2y^2$ neparan, onda x mora biti neparan pa je $x^2 \equiv 1 \ (mod\ 8)$, na osnovu 6. zadatka. Ukoliko je y paran, sledi da je $y = 2q,\ 2(2q)^2 = 8q^2$ tj. $2y^2 \equiv 0 \ (mod\ 8)$. Dakle $x^2 + 2y^2 \equiv 1 \ (mod\ 8)$. Slično, ako je y neparan $2y^2 \equiv 2 \ (mod\ 8)$, pa je onda $x^2 + 2y^2 \equiv 3 \ (mod\ 8)$.

14. Naći poslednjih 8 cifara u binarnom zapisu broja 27^{1986}.

Rešenje:

Najpre zapišemo 27^{1986} kao $27^{128\cdot 15+66}$. $\varphi(256) = 128$ pa je prema Ojler-Fermaovoj teoremi $27^{\varphi(256)} \equiv 1\ (mod\ 256)$, tj $27^{128} \equiv 1\ (mod\ 256)$. Sada je $27^{1986} \equiv 27^{66}(mod\ 256)$. Kako je $27^{64} \equiv (-39)^{32} \equiv (-15)^{16} \equiv (-31)^{8} \equiv (-63)^{4} \equiv 129^{2} \equiv 1\ (mod\ 256)$, sledi da je $27^{66} \equiv 27^{2} \equiv (-39) \equiv 217\ (mod\ 256)$.
Dakle, dobili smo $27^{1986} \equiv 217(mod\ 256)$. Preostalo je još da napišemo 217 u binarnom zapisu. $(217) = (11011001)_2$.

15. Dokazati $2730|\ n^{13} - n$ za svaki prirodan broj n.

Rešenje:

$n^{12} = n^{\varphi(13)} = n^{2\varphi(7)} = n^{3\varphi(5)} = n^{6\varphi(3)} = n^{12\varphi(2)}$. Dakle, $p|\ n$ ili $p|\ n^{12} - 1$ za $p = 2, 3, 5, 7, 13$. Ova činjenica sledi iz Ojler-Fermaove teoreme ($a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (mod\ m)$ gde su a i m uzajamno prosti).

Prosti brojevi

1. Dokazati da je svaki prost broj veći od 3 oblika $6k+1$ ili $6k+5$, gde je k nenegativan ceo broj.

   Rešenje:

   Dovoljno je pokazati da sledeći brojevi nisu prosti: $6k, 6k+2, 6k+4$ nisu prosti zato što su deljivi sa 2; $6k+3$ nije prost jer je deljiv sa 3. Dakle, prosti brojevi veći od 3 jedino mogu biti oblika $6k+1$ ili $6k+5$.

2. Naći p ako su:

   a) $p, 2p+1, 4p+1$ prosti brojevi.

   b) p i $8p^2+1$ su prosti brojevi.

   Rešenje:

   a) Ako je $p=2$, imamo $2p+1=5$ i $4p+1=9$, pa s obzirom da 9 nije prost, $p=2$ ne zadovoljava uslov zadatka. Za $p=3$, imamo $2p+1=7$ i $4p+1=13$, tako da $p=3$ jeste rešenje. Za prost broj $p>3$,prema prethodnom zadatku znamo da postoje dve mogućnosti: ili je $p=6k+1$ ili $p=6k-1$. U prvom slučaju $2p+1=12k+3=3m$, a u drugom $4p+1=24k-3=3n$. To znači da je za svaki prost broj $p>3$ uvek jedan od brojeva $2p+1, 4p+1$ deljiv sa 3, pa samim tim nije prost i nijedno takvo p ne zadovoljava uslov zadatka. Broj 3 je jedino rešenje.

   b) Ako je $p=2$, imamo $8p^2+1=33$, pa 2 nije rešenje. Ukoliko je $p=3$, $8p^2+1=73$, pa 3 jeste rešenje. Dalje, nijedan prost broj $p>3$ nije rešenje zato što važi $8p^2+1 \equiv -(p^2-1) \equiv -(p-1)(p+1) \equiv 0 \ (mod\ 3)$. To sledi iz činjenice da je tačno jedan od tri uzastopna broja $p-1, p, p+1$ deljiv sa 3, pri čemu to sigurno nije p zato što je prost i veći od 3. Zaključujemo da je ponovo broj 3 jedino rešenje.

3. Odrediti prost broj p ako se zna da su $p+10$ i $p+14$ prosti brojevi.

   Rešenje:

Za $p = 2$ važi $p + 10 = 12, p + 14 = 16$, pa to nije rešenje. Ako je $p = 3$, onda su $p + 10 = 13$ i $p + 14 = 17$ prosti brojevi. Ako je $p > 3$ prost broj, onda je on ili oblika $p = 3k + 1$ ili oblika $p = 3k + 2$. U prvom slučaju je $p + 14 = 3(k + 5)$, a u drugom je $p + 10 = 3(k + 4)$ složen broj. Dakle, jedino takvo p je 3.

4. Odrediti sve proste brojeve p i q za koje je $p^2 - 2q^2 = 1$.

   Rešenje:

   Data jednačina se može zapisati u obliku $p^2 - 1 = 2q^2$, tj. $(p-1)(p+1) = 2q^2$. Za $p = 2$ ona očigledno nema rešenja. Ako je $p \geq 3$ prost, onda je $(p-1)(p+1)$ deljivo sa 8 jer su oba broja parna i pritom jedan od njih je deljiv sa 4, pa je q^2 deljivo sa 4, i q nije prost osim u slučaju kad je $q = 2$. Dakle, jedino rešenje je $p = 3$, $q = 2$.

5. Ako su $2n + 1$ i $3n + 1$ potpuni kvadrati, $n \in \mathbb{N}$, onda $5n + 3$ nije prost broj.

   Rešenje:

   Neka je $2n + 1 = a^2$, $3n + 1 = b^2$ za neke $a, b \in \mathbb{N}$. Tada $5n + 3 = 4(2n + 1) - (3n + 1) = 4a^2 - b^2 = (2a + b)(2a - b)$. Pretpostavimo da je $2a - b = 1$. Tada se prethodna jednakost svodi na $5n + 3 = 2a + b$. Zatim, $2b = 2a + b - (2a - b) = 5n + 3 - 1 = 5n + 2$. I konačno, $(b-1)^2 = b^2 - 2\mathrm{b} + 1 = (3n + 1) - (5n + 2) + 1 = -2n$. Dobija se $(b-1)^2 = -2n < 0$, što je kontradikcija, pa mora biti $2a - b \neq 1$. Iz jednakosti $5n + 3 = (2a + b)(2a - b)$ vidimo da je $2a - b$ prirodan broj veći od 1, zato što su $5n + 3$, $2a + b \in \mathbb{N}$. Prema tome, $5n + 3$ nije prost broj jer je deljiv sa $2a - b$.

6. Ako su p i q prosti brojevi veći od 3, tada važi sledeće: $24 | p^2 - q^2$.

   Rešenje:

   Ako su *p* i *q* prosti brojevi veći od 3, tada brojeve *p* i *q* možemo zapisati na sledeće načine: $p = 6m \pm 1$ i $q = 6n \pm 1$, što sledi iz prvog zadatka. Tada je $p^2 - q^2 = (6m \pm 1)^2 - (6n \pm 1)^2 = 36(m^2 - n^2) - 12((\pm m \pm n)$

$= 12(m \pm n)(3(m \pm n) \pm 1)$. U slučaju da su m i n iste parnosti $m \pm n$ je parno inače je $3(m \pm n) \pm 1$ parno, u oba slučaja važi $24|p^2 - q^2$.

7. Dokazati da ako je n prirodan broj veći od 1, onda $n^4 + 4^n$ nije prost.

   Rešenje:

   Ako je n parno, onda je i $n^4 + 4^n$ parno i veće od 2, pa to nije prost broj. Znači treba još pokazati da je tačna tvrdnja ukoliko je n neparno. Za $n = 2k + 1$, koristeći Sophie Germain identitet: $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$ pravimo sledeću transformaciju:

$$n^4 + 4^n = n^4 + 4 \cdot 4^{2k} = n^4 + 4 \cdot (2^k)^4$$

$$n + 4^n = (n^2 + 2 \cdot 2^{2k} + 2n \cdot 2^k)(a^2 + 2 \cdot 2^{2k} - 2n \cdot 2^k)$$

   odakle vidimo da $n^4 + 4^n$ nije prost.

8. Pokazati da $f(n) = n^5 + n^4 + 1$ nije prost, za $n > 1$.

   Rešenje:

   Pokazaćemo da se polinom $f(n)$ može predstaviti kao proizvod faktora nižeg stepena koji takođe imaju celobrojne koeficijente. S obzirom da je slobodan član jednak 1, ukoliko bi postojao linearni faktor, on bi morao da bude ili oblika $n + 1$ ili $n - 1$. Kako je $f(1) \neq 0$ i $f(-1) \neq 0$, zaključujemo da nema linearnog faktora. Tražimo kvadratne i kubne faktore. Postoje dve mogućnosti:

$$(1) \quad n^5 + n^4 + 1 = (n^2 + an + 1)(n^3 + bn^2 + cn + 1)$$

$$(2) \quad n^5 + n^4 + 1 = (n^2 + an - 1)(n^3 + bn^2 + cn - 1)$$

   Rešimo prvi slučaj. Kad izmnožimo i raspišemo desnu stranu, dobijamo $n^5 + n^4 + 1 = n^5 + (a + b)n^4 + (ab + c + 1)n^3 + (ac + b + 1)n^2 + (a + c)n + 1.$ Upoređujući koeficijente na levoj i desnoj strani, dobijamo sistem od četiri jednačine po a, b, c:

$$a + b = 1, \quad ab + c + 1 = 0, \quad ac + b + 1 = 0, \quad a + c = 0$$

   čija su rešenja $b = 0,\ a = 1,\ c = -1$.

   Stoga, $n^5 + n^4 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^3 - n + 1)$.

Drugi slučaj ni nema potrebe razmatrati zato što smo upravo našli jednu faktorizaciju polinoma $f(n)$, što znači da $f(n)$ nije prost.

9. Dokazati da $(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \mid n!$ ako $n + 1$ nije neparan prost broj, $n \in \mathbb{N}$.

   Rešenje:

   Izraz se može napisati kao $\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$. Ukoliko je $n = 1$, ovo trivijalno važi. Za $n \geq 2$ prethodni izraz ekvivalentan je sa $(n + 1) \mid 2(n - 1)!$. Ako je $n + 1$ složen broj (tj. ako nije neparan prost broj), može se predstaviti kao proizvod različitih faktora koji ulaze u $(n - 1)!$, pa relacija važi.

10. Neka je a ceo broj koji nije deljiv prostim brojem p. Dokazati da je tada broj $a^{p-1} + p - 1$ složen.

    Rešenje:

    Po Maloj Fermaovoj teoremi $a^{p-1} \equiv 1 (mod\ p)$, pa $a^{p-1} + p - 1 \equiv p \equiv 0\ (mod\ p)$. Dakle, broj $a^{p-1} + p - 1$ je deljiv sa p, pa je samim tim složen.

11. Ako za $m \geq 2$ važi $m \mid (m - 1)! + 1$, dokazati da je tada m prost broj.

    Rešenje:

    Pretpostavimo suprotno, da m nije prost broj. Neka je p njegov prost delilac. Pošto je $p < m$, onda je p jedan od faktora u $(m - 1)!$, pa sledi $p \mid (m - 1)!$. Odatle vidimo da ne važi $p \mid (m - 1)! + 1$, a kako $p|m$, onda neće važiti ni $m \mid (m - 1)! + 1$, što je kontradikcija. Dakle, m je prost broj.

12. Neka su p i q prosti brojevi za koje važi $q \mid p - 1$ i $p \mid q^3 - 1$. Dokazati da je tada $p = q^2 + q + 1$.

    Rešenje:

    Važi $p \mid q^3 - 1 = (q - 1)(q^2 + q + 1)$. S obzirom da je p prost, znači da važi $p| q - 1$ ili $p|q^2 + q + 1$. Iz uslova zadatka $q \mid p - 1$ sledi da je $q \leq p - 1$, pa je onda $p \geq q + 1 > q - 1$ i ne može biti $p| q - 1$. Dakle, mora biti $p|q^2 + q + 1$. Koristeći tako dobijenu relaciju $p|q^2 + q + 1$ i $q \mid p - 1$ dobija se da važi

$pq \mid (p-1)(q^2+q+1)$ tj. $pq \mid pq^2+pq+p-q^2-q-1$, a odatle dalje sledi $pq | q^2+q+1-p$. Znači da je ili $q^2+q+1-p=0$ ili $q^2+q+1-p \geq pq$. Ako bi važila druga nejednakost, onda bi $q^2+q+1 \geq p(q+1)$, a kako je $p \geq q+1$ onda bi $q^2+q+1 \geq (q+1)^2 = q^2+2q+1$, što je kontradikcija. Stoga, $q^2+q+1=p$, što je i trebalo dokazati.

13. Ako su $p_1, p_2, \dots, p_n$ međusobno različiti prosti brojevi, dokazati da $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_n}$ nije ceo broj.

Rešenje:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_n}=\frac{p_2p_3\dots p_n+p_1\,p_3\dots p_n+\dots+p_1\,p_2\,\dots p_{n-1}}{p_1\,p_2\,p_3\dots p_n}$$

Neka je p_i proizvoljan element skupa $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Ne umanjujući opštost, neka je $p_i = p_1$ (analogno za ostale elemente). Tada su svi sabirci u brojiocu, osim prvog, deljivi sa p_1. Pošto su $p_2, \dots, p_n$ prosti brojevi različiti od p_1, prvi sabirak nije deljiv sa p_1 pa ni ceo brojilac nije deljiv sa p_1. Tada on ne može biti deljiv ni sa imeniocem $p_1p_2p_3 \dots p_n$, pa razlomak nije ceo broj.

14. Neka su rešenja jednačine $x^2+ax+b+1=0$ celi brojevi, gde su $a, b \in \mathbb{Z}$. Dokazati da je a^2+b^2 složen broj.

Rešenje:

Neka su x_1 i x_2 rešenja jednačine. Na osnovu Vijetovih formula:

$$x_1x_2=b+1, \quad x_1+x_2=-a.$$

Tada je:

$$a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1=(x_1^2+1)(x_2^2+1).$$

Sledi da je a^2+b^2 složen broj.

15. Dva igrača igraju sledeću igru: prvi igrač zapisuje jednu cifru; zatim drugi igrač dopisuje sa leve ili desne strane neku cifru; zatim prvi dopisuje sa leve ili desne strane neku cifru; zatim drugi ponovo dopisuje sa leve ili desne strane neku cifru itd. Pokazati da prvi igrač može igrati tako da posle svakog poteza drugog igrača zapisani broj nije potpuni kvadrat.

Rešenje:

Prva cifra koju prvi igrač treba da zapiše mora biti 7 jer je to jedina cifra takva da ne postoji dvocifren kvadrat koji počinje ili završava se sa 7. Zatim pretpostavimo da je u nekom trenutku, nakon poteza drugog igrača, zapisan broj $c_1c_2c_3\ldots c_{2k-1}c_{2k}$. Prvi igrač sada treba da dopiše 7 ili 8 sa desne strane. U tom slučaju, ukoliko drugi igrač dopiše bilo koju cifru sa leve strane, dobijeni broj neće biti potpun kvadrat jer se nijedan potpun kvadrat ne završava ciframa 7 ili 8. Ukoliko drugi igrač dopiše bilo koju cifru sa desne strane, dobiće se jedan od sledećih brojeva: $c_1c_2c_3\ldots c_{2k-1}c_{2k}70$, $c_1c_2c_3\ldots c_{2k-1}c_{2k}71$, ..., $c_1c_2c_3\ldots c_{2k-1}c_{2k}89$. Radi se o 20 uzastopnih brojeva većih od 1000 pa među njima ne mogu biti dva koja su potpuni kvadrati. U slučaju da među njima nema nijedan potpun kvadrat, prvi igrač može da dopiše bilo koju od cifara 7 ili 8. Ako je jedan od uočenih brojeva potpun kvadrat i ako je njegova pretposlednja cifra 7, prvi igrač treba da dopiše 8 a u suprotnom slučaju cifru 7. U bilo kom od pretpostavljenih slučajeva drugi igrač ne može formirati potpun kvadrat dopisivanjem bilo koje od cifara.

Deljivost

1. Dokazati da važi $a - c \mid ab + cd \Rightarrow a - c \mid ad + bc$.

   Rešenje:

   $ab + cd - (ad + bc) = a(b - d) - c(b - d) = (a - c)(b - d)$

   $a - c \mid ab + cd \ \wedge \ a - c \mid ab + cd - (ad + bc) \quad \Rightarrow \quad a - c \mid ad + bc.$

2. Neka je m ceo broj. Dokazati: a) $6 \mid m^3 - m$; b) $30 \mid m^5 - m$.

   Rešenje:

   a) $m^3 - m = m(m^2 - 1) = (m - 1)\, m\, (m + 1)$. Proizvod tri uzastopna cela broja deljiv je sa 2 i sa 3, pa prema tome i sa 6.

   b) $m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m^2 + 1)(m - 1)(m + 1)$. Ponovo iskoristimo činjenicu da je proizvod tri uzastopna broja deljiv sa 6, pa $6 \mid m^5 - m$. Zatim, ukoliko m daje ostatak $0, 1$ ili 4 pri deljenju sa 5, onda $5 \mid m(m - 1)(m + 1)$, a ukoliko daje ostatak 2 ili 3, onda $5 \mid m^2 + 1$. U svakom slučaju $5 \mid m^5 - m$. Tako da iz $6 \mid m^5 - m \ \wedge \ 5 \mid m^5 - m \quad \Rightarrow \quad 30 \mid m^5 - m$.

3. Dokazati da važi $641 \mid 2^{32} + 1$.

   Rešenje:

   S obzirom da se može zapisati $641 = 5^4 + 2^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$, zaključujemo:

   $$641 \mid \ (5^4 + 2^4) \cdot 2^{28} = 5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32}$$

   $$641 \mid \ (5 \cdot 2^7 + 1) \cdot (5 \cdot 2^7 - 1) \cdot (5^2 \cdot 2^{14} + 1) = 5^4 \cdot 2^{28} - 1$$

   Odatle sledi da 641 deli i razliku brojeva na desnim stranama, što je upravo broj $2^{32} + 1$.

4. Dokazati: a) $n > 2 \Rightarrow 2^n - 1$ nije stepen broja 3; b) $n > 3 \Rightarrow 2^n + 1$ nije stepen broja 3.

   Rešenje:

   a) Pretpostavimo suprotno, da važi $2^n - 1 = 3^m$. Za neparno m važi:

   $2^n = 3^m + 1 = (3 + 1)(3^{m-1} - 3^{m-2} + \cdots - 3 + 1)$

Drugi činilac na desnoj strani jednakosti je neparan zato što ima neparan broj neparnih sabiraka, tako da je sa desna strana jednakosti deljiva samo sa 2, ne i sa 4, dok je leva strana jednakosti deljiva barem sa 4 zbog toga što je $n > 2$. Kontradikcija.

Ukoliko je $m = 2s$, onda $2^n = 1 + 3^{2s} = 9^s + 1 = (8+1)^s + 1 = 8q + 2$. Kontradikcija, jer desna strana jednakosti ponovo nije deljiva sa 4, dok leva jeste.

b) Pretpostavimo suprotno, da važi $2^n + 1 = 3^m$. Za neparno m imamo da važi $2^n = 3^m - 1 = (3-1)(3^{m-1} + 3^{m-2} + \cdots + 1)$. Drugi činilac je neparan, slično kao u delu pod a). Desna strana nije deljiva sa 4, a leva jeste. Kontradikcija.

Ukoliko je $m = 2s$, onda $3^s = 2a + 1$. Kada to uvrstimo u $2^n + 1 = 3^{2s}$, dobija se $2^n = (2a+1)^2 - 1 = 4a(a+1)$. Znamo da je ili a ili $a + 1$ neparan. Pošto je sa leve strane jednakosti stepen dvojke, znači da $4a(a+1)$ takođe mora biti stepen dvojke, tj. ne sme imati nijedan neparan prost faktor, pa jedino preostaje da bude $a = 1$. Tada je $2^n = 8$. Kontradikcija, jer je prema uslovu zadatka $n > 3$.

5. Dokazati da važi $2^n \nmid n!$

Rešenje:

Prema osobini 4) iz stavke 18. u teorijskom delu ovog rada, najveći stepen prostog broja p takav da $p^m | n!$, jednak je $m = \lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \lfloor n/p^3 \rfloor + \cdots$. Specijalno, za $p = 2$, najveći stepen dvojke takav da $2^m | n!$ jednak je $m = \lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/4 \rfloor + \lfloor n/8 \rfloor + \cdots \le \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \cdots < n$, što znači da veći stepeni dvojke, a samim tim i 2^n, ne dele $n!$.

6. Naći najmanji prirodan broj n tako da važi $999999 \cdot n = 111 \cdots 11$.

Rešenje:

Data jednakost je ekvivalentna sa $(10^6-1)\cdot n = \frac{10^k-1}{9} \;\Rightarrow\; n = \frac{10^k-1}{9\cdot(10^6-1)}$. Pošto je n prirodan broj, mora da važi $10^6-1 \mid 10^k-1$, a to je ispunjeno jedino ukoliko je $k=6m$, za neko $m\in\mathbb{N}$. Naime, ukoliko bi bilo $k=6m+i$, $1\le i\le 5$, važilo bi

$$\begin{aligned}10^{6m+i}-1 &= 10^i\cdot(10^{6m}-1)+\ 10^i-1\\ &= \ 10^i\cdot(10^6-1)(10^{6m-6}+10^{6m-12}+\cdots+1)+\ 10^i-1\end{aligned}$$

S obzirom da 10^6-1 deli prvi sabirak na desnoj strani, ali ne i drugi, to znači da ne deli celu desnu stranu, a samim tim ni levu. Dakle, mora biti $k=6m$.

Dalje je

$$n=\frac{10^{6m-6}+10^{6m-12}+\cdots+10^6+1}{9}$$

Brojilac predstavlja zbir m brojeva od kojih svaki daje ostatak 1 pri deljenju sa 9, pa je najmanje m takvo da je brojilac deljiv sa 9 upravo $m=9$. Odatle sledi da je najmanje n:

$$n=\frac{10^{54}-1}{9(10^6-1)}$$

7. Naći četvorocifren broj $abcd$ tako da važi $4\cdot abcd \;=\; dcba$.

Rešenje:

$abcd\;\cdot 4 \;=\; dcba \;\Rightarrow\; a\;<\;3$, pošto $3000\cdot 4 \;=\; 12000$ ima pet cifara. Ali $dcba$ je deljiv sa 4, što znači da a mora biti paran (i ne može biti 0 jer je $abcd$ četvorocifren), pa je $a=2$. Iz $2bcd\cdot 4 = \; dcb2$, dobijamo da je $d\ge\; 8$ i proizvod $d\cdot 4$ završava se sa 2, pa mora biti $d=8$. Dakle, $2bc8\cdot 4 \;=\; 8cb2$, tj.

$$8000\;+\;400b\;+\;40c\;+\;32\;=\;8000\;+\;100c\;+\;10b\;+\;2$$

$$390b\;+\;30\;=\;60c$$

$$13b\;+\;1\;=\;2c$$

Desna strana je parna i $2c\;\le\;18$, zato što je c cifra. Dakle, b mora biti neparan i $b<2$, tačnije $b=1$. Onda je $c=7$. Traženi bro je $abcd\;=\;2178$.

8. Neka je n ceo broj i $n>11$. Dokazati da $n^2-19n+89$ nije potpun kvadrat.

Rešenje:

Ideja je pokazati da se $n^2 - 19n + 89$ nalazi između kvadrata dva uzastopna broja.

$n^2 - 19n + 89 = n^2 - 18n + 81 - (n-8) = (n-9)^2 - (n-8) < (n-9)^2$

$n^2 - 19n + 89 = n^2 - 20n + 100 + (n-11) = (n-10)^2 + (n-11) > (n-10)^2$

$$(n-10)^2 < n^2 - 19n + 89 < (n-9)^2$$

9. Ako je $n \in \mathbb{N}$, dokazati: $6 | 2n^3 - 3n^2 + n$.

   Rešenje:

   Primetimo da je $2n^3 - 3n^2 + n = n(n-1)(2n-1)$. Jedan od brojeva $n, n-1$ je paran. Ako brojevi n i $n-1$ nisu deljivi sa 3, onda je sa 3 deljiv broj $n+1$, pa i broj $2n - 1 = 2(n+1) - 3$. U svakom slučaju, $6 \mid n(n-1)(2n-1)$.

10. Ako je trocifren broj abc deljiv sa 37, dokazati da su i brojevi bca i cab takođe deljivi sa 37.

    Rešenje:

    $10 \cdot abc - bca = 999a = 37 \cdot 27a \quad \Rightarrow \quad 37 \mid bca$

    $10 \cdot bca - cab = 999b = 37 \cdot 27b \quad \Rightarrow \quad 37 \mid cab$

11. Ako su u trocifrenom broju deljivom sa 7 dve poslednje cifre jednake, dokazati da je zbir cifara tog broja deljiv sa 7.

    Rešenje:

    Neka je taj broj $xyy = 100x + 10y + y = 100x + 11y = 2(x+2y) + 7(14x+y)$.

    $7 \mid xyy - 7(14x + y) = 2(x+2y) \quad \Rightarrow \quad 7 \mid x + 2y$

    A zbir cifara broja xyy je upravo $x + 2y$.

12. Neka je A zbir cifara broja 4444^{4444} i B zbir cifara broja A. Naći zbir cifara broja B.

    Rešenje:

Neka je C traženi broj, zbir cifara broja B. Kako je $4444^{4444} < 10\,000^{4444}$, broj cifara broja 4444^{4444} je manji od $4 \cdot 4444 < 20\,000$. Zato se zbir cifara broja 4444^{4444}, tj. A, može ograničiti sa $A < 9 \cdot 20\,000 = 180\,000$. Maksimalni zbir

cifara broja A biće manji ili jednak $9 \cdot 5$ (zato što A ima najveći mogući zbir cifara ukoliko $A = 99999$), sledi $B \leq 45$. Pošto je C zbir cifara broja B, važi $C \leq 12$ (maksimalan zbir cifara ukoliko je $B = 39$).
Primenićemo osobinu da je ostatak pri deljenju nekog broja sa 9 isti kao ostatak pri deljenju zbira njegovih cifara sa 9. U tom slučaju, ako nađemo ostatak pri deljenju broja 4444^{4444} sa 9, naći ćemo i ostatak pri deljenju broja A sa 9, zatim i broja B, pa i traženog broja C.

Važi $4444 \equiv -2\ (mod\ 9)$ i

$$(-2)^{4444} = (-2)^{3\cdot 1481+1} = 2 \cdot 8^{1481} \equiv 2 \cdot (-1)^{1481} \equiv -2 \equiv 7\ (mod\ 9).$$

Iz ova dva sledi

$$4444^{4444} \equiv (-2)^{4444} \equiv 7\ (mod\ 9)$$

Prema gore navedenom objašnjenju traženi broj C daje ostatak 7 pri deljenju sa 9, a istovremeno je $C \leq 12$. Zaključujemo da je $C = 7$.

U ovom zadatku korišćene su sledeće osobine relacije kongruencije:
$a \equiv b\ (mod\ m) \Rightarrow\ a^k \equiv b^k\ (mod\ m)$ i $a \equiv b\ (mod\ m) \Rightarrow\ xa \equiv xb\ (mod\ m),\ \ x \in \mathbb{Z}$

13. Odrediti cifre x i y tako da broj $1993xy$ bude deljiv i sa 8 i sa 9.

Rešenje:

Kako je dati broj deljiv sa 9, to je i zbir njegovih cifara deljiv sa 9, tj. treba da važi $9|4 + x + y$. To je moguće samo u dva slučaja: ako je $x + y = 5$ ili $x + y = 14$.
Dati broj može se napisati u obliku

$$199300\ + 10x + y = 8\ \cdot 24912 + 4 + 8x + 2x + y$$

a je on deljiv sa 8 ako i samo ako je $8|2x + y + 4$. U prvom slučaju, kada je $x + y = 5$, da bi broj $2x + y + 4 = x + 9$ bio deljiv sa 8, mora biti $x = 7$, što je nemoguće jer $x + y = 7 + y = 5$, a y je cifra. Dakle, preostaje drugi slučaj, kada $x + y = 14$. Tada je $2x + y + 4 = x + 18$ deljivo sa 8 jedino ako je $x = 6$, a onda je $y = 8$. Traženi broj je 199368.

14. Odrediti najmanji prirodan broj koji pri deljenju sa $2, 3, 4, 5$ i 6 daje redom ostatke $1, 2, 3, 4$ i 5.

Rešenje:

Neka je n traženi broj. Tada je broj $n+1$ deljiv sa $2, 3, 4, 5$ i 6, a pošto je $NZS\ (2,3,4,5,6) = 60$, to je najmanji takav broj jednak $n+1 = 60$, tj. $n = 59$.

15. Broj $N = 10101\ldots0101$ definisan je tako da se naizmenično ređaju jedinice i nule. Odrediti najmanji broj N ovog oblika tako da je: a) deljiv sa 9; b) deljiv sa 99.

Rešenje:

a) Broj je deljiv sa 9 ako je zbir njegovih cifara deljiv sa 9, pa je najmanji broj ovog oblika koji je deljiv sa 9 jednak $N = 10101010101010101$.

b) Broj je deljiv sa 99 ako je deljiv sa 9 i 11, a na osnovu 5. zadatka iz odeljka Kongruencije u ovom radu, broj je deljiv sa 11 ako mu je razlika zbira cifara na parnim i neparnim mestima deljiva sa 11. Najmanji broj ovog oblika deljiv sa 99 ima $NZS(9,11) = 99$ jedinica i 98 nula.

Literatura

[1] Engel, Arthur: “Problem-Solving Strategies (Problem Books in Mathematics)”, Springer, 1999.

[2] Kadelburg, Zoran; Mićić, Vladimir: “Uvod u teoriju brojeva”, Materijali za mlade matematičare, sveska 15, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2001.

[3] Ognjanović, Srđan; Ivanović, Živorad: “Zbirka zadataka i testova za 3. razred gimnazija i tehničkih škola”, Krug, Beograd, 2004.

Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Matematička indukcija i nizovi

Predmet: Metodika nastave matematike i računarstva

Studenti:
Aleksandra Stamenković, 64/2010
Marija Stanojčić, 7/2011
Dušica Zečević, 161/2011
Sonja Jovanović, 122/2011
Sofija Čarkilović, 12/2011
Sandra Petakov, 51/2011
Marijana Katanić, 99/2011
Jovana Vučković, 4/2011
Petar Korović, 335/2011
Miloš Momirović, 22/2011
Bojana Todić, 58/2011
Dina Janković, 3/2011
Olja Latinović, 15/2011
Jelena Đurđević, 338/2013

Profesor:
Nebojša Ikodinović

Beograd, oktobar 2014.

Sadržaj

1 Matematička indukcija

1.1 Istorija matematičke indukcije

Istorija matematičke indukcije nema jasan početak. Neke tragove onog što podseća na indukciju nalazimo u delima Euklida u kojima on dokazuje beskonačnost pojavljivanja prostih brojeva među prirodnim (300. p.n.e.). Euklid je u svojim "Elementima"(knjiga X) dokazao da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

Forma dokaza matematičkom indukcijom se javlja u knjizi koju je napisao Al-Karadži oko 1000. godine. On ju je između ostalog koristio da dokaže binomnu teoremu i Paskalov trougao.

Nijedan od ovih starih matematičara nije eksplicitno dao induktivnu hipotezu. Prvo rigorozno izlaganje principa indukcije je dao Frančesko Mauroliko u svom delu "Arithmeticorum libri duo"(1575.), koji je koristio ovu tehniku da dokaže da je zbir prvih n neparnih celih brojeva jednak n^2.

Indukciju su takođe nezavisno otkrili Švajcarac Jakob Bernuli i Francuzi Paskal i Ferma.

Prvo formalno objašnjenje matematičke indukcije dao je Augustus DeMorgan 1838. godine. Tada je prvi put termin "indukcija"upotrebljen u tom kontekstu.

1.2 Princip matematičke indukcije

Gotovo sva tvrđenja, koja se odnose na prirodne brojeve, mogu se dokazati primenom metoda matematičke indukcije.

Definicija 1.1. *Neka je $P(n)$ tvrđenje koje se odnosi na promenljivu $n \in \mathbb{N}$. Da bi $P(n)$ bilo tačno za sve prirodne brojeve, dovoljno je da važi:*

1. *$P(1)$ tačno,*
2. *Za sve prirodne brojeve n je implikacija $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ tačna.*

$$P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})P(n)$$

Može se desiti da tvrđenje $P(n)$ nije tačno za svako $n \in \mathbb{N}$, već počev od nekog prirodnog broja $n_0 > 1$, tj. da je $P(n)$ tačno za $n = n_0,\ n_0 + 1,\ n_0 + 2, ...$

Tada se dokazivanje metodom matematičke indukcije radi na sledeći način:

1. proverimo tačnost tvrđenja $P(n_0)$,
2. dokazujemo da za bilo koje $n > n_0$ iz tačnosti tvrđenja $P(n)$ sledi tačnost tvrđenja $P(n+1)$.

Praktično, indukciju sprovodimo tako što:

- (**baza indukcije**) proverimo da li je tvrđenje tačno za $n = 1$
- (**indukcijska hipoteza**) pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $n = k$
- (**induktivni korak**) dokazujemo da je tvrđenje tačno za $n = k + 1$

1.3 Zadaci

Zadatak 1.1. *Koristeći matematičku indukciju dokazati da* $\forall n \geq 1$ *važi*
$P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

Rešenje: (BI) $P(1) : 1 = 1^2$ tačno
(IH) Pretpostavimo da je tačno $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$, treba da dokažemo da važi i $1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1) = (n + 1)^2$
(IK) $P(n + 1) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1) = (n + 1)^2$ potrebno dokazati
$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$
$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$
$n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1$ tačno
Dokazali smo da ako važi $P(n)$ važi i $P(n + 1)$, pa na osnovu matematičke indukcije sledi da $\forall n \geq 1$ važi $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Zadatak 1.2. *Za svaki prirodan broj* $n \in \mathbb{N}$ *dokazati da je izraz* $n(n^2+5)$ *deljiv sa 6.*

Rešenje: $P(n) : 6|n(n^2 + 5)$
(BI) $P(1) : 6|1(1^2 + 5) \Rightarrow 6|6$ tačno
(IH) Pretpostavimo da je tačno $6|n(n^2 + 5)$, treba da dokažemo da važi i $6|(n + 1)((n + 1)^2 + 5)$
(IK) $P(n + 1) : 6|(n + 1)((n + 1)^2 + 5)$
$(n + 1)((n + 1)^2 + 5) = (n + 1)(n^2 + 2n + 1 + 5) = (n + 1)(n^2 + 5 + 2n + 1) = n(n^2 + 5) + n(2n + 1) + n^2 + 5 + 2n + 1 = n(n^2 + 5) + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 6 = n(n^2 + 5) + 3n^2 + 3n + 6 = n(n^2 + 5) + 3n(n + 1) + 6$
$6|n(n^2 + 5)$ - na osnovu (IH)
$6|3n(n + 1)$ jer n i n + 1 su dva uzastopna prirodna broja, pa je jedan od njih paran, pa sledi da je 3n(n + 1) deljivo i sa 2 i sa 3, tj. deljivo je sa 6
$6|6$
6 deli sva tri sabirka, pa sledi da $6|n(n^2+5)+3n(n+1)+6 \Rightarrow 6|(n+1)((n+1)^2+5)$, tj. pokazali smo da važi $P(n + 1)$, pa na osnovu matematičke indukcije sledi da $6|n(n^2 + 5)$ za svaki prirodan broj n.

Zadatak 1.3. *Za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ dokazati da je izraz $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ deljiv sa 17.*

Rešenje: $P(n) : 17 | 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$
(BI) $P(1) : 3 \cdot 5^{2\cdot 1+1} + 2^{3\cdot 1+1} = 3 \cdot 125 + 16 = 391,\ 391 : 17 = 23$ tačno
(IH) Pretpostavimo da je tačno $17 | 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, treba da dokažemo da važi i $17 | 3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1}$
(IK)$P(n+1) : 17 | 3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1}$
$3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 3 \cdot 5^{2n+1+2} + 2^{3n+1+3} = 3 \cdot 5^{2n+1} \cdot 5^2 + 2^{3n+1} \cdot 2^3 =$
$3 \cdot 5^{2n+1} \cdot 25 + 2^{3n+1} \cdot 8 = 3 \cdot 5^{2n+1} \cdot (17+8) + 2^{3n+1} \cdot 8 =$
$3 \cdot 5^{2n+1} \cdot 17 + 8 \cdot (3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})$
$17 | 3 \cdot 5^{2n+1} \cdot 17$
$17 | 8 \cdot (3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})$, jer na osnovu (IH) $17 | 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$
17 deli oba sabirka, pa na osnovu matematičke indukcije sledi da
$17 | 3 \cdot 5^{2n+1} \cdot 17 + 8 \cdot (3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}) \Rightarrow 17 | 3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1}$, tj. pokazali smo da važi $P(n+1)$.

Zadatak 1.4. *Pokazati da $\forall n \geq 1$ važi $\frac{1}{2}\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.*

Rešenje: $P(n) : \frac{1}{2}\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$
(BI) $P(1) : \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{4}}$ tačno
(IH) Pretpostavimo da važi $\frac{1}{2}\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, treba dokazati da važi $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$.
(IK) $P(n+1) : \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$
$\frac{1}{2}\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}} \quad (*)$
$\frac{1}{2}\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2} \quad (**)$
Hoćemo da dokažemo da je desna strana nejednakosti označene sa (**) manja od desne strane nejednakosti označene sa (*).
Možemo ih kvadrirati, jer su oba razlomka pozitivna.

$\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2}$ $(\leq$ *ili* $\geq)$ $\frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$ $\quad /()^2$
$\frac{1}{3n+1}\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4}$ $(\leq$ *ili* $\geq)$ $\frac{1}{3n+4}$

Imamo da je:
$(4n^2+4n+1)(3n+4)$ $(\leq$ *ili* $\geq)$ $(3n+1)(4n^2+8n+4)$
$12n^3+28n^2+19n+4$ $(\leq$ *ili* $\geq)$ $12n^3+28n^2+20n+4$
$19n$ $(\leq$ *ili* $\geq)$ $20n$, a znamo da je $0 \leq n$, pošto je n prirodan broj.

Dokazali smo nejednakost $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$, pa na osnovu matematičke indukcije sledi da važi :
$\frac{1}{2}\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $\forall n \geq 1$.

Zadatak 1.5. *Dokazati da za svako* $n \geq 2$ *važi* $\frac{7}{9}\frac{26}{28}...\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}(1+\frac{1}{n(n+1)})$.

Rešenje: $P(n) : \frac{7}{9}\frac{26}{28}...\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}(1+\frac{1}{n(n+1)})$
(BI) $P(2) : \frac{2^3-1}{2^3+1} = \frac{2}{3}(1+\frac{1}{2(2+1)})$
$\frac{7}{9} = \frac{2}{3}(1+\frac{1}{6})$

$\frac{7}{9} = \frac{2}{3}\frac{7}{6}$

$\frac{7}{9} = \frac{7}{9}$ tačno

(IH) Pretpostavimo da je tačno $\frac{7}{9}\frac{26}{28}...\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}(1+\frac{1}{n(n+1)})$, treba da dokažemo da važi i $\frac{7}{9}\frac{26}{28}...\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} = \frac{2}{3}(1+\frac{1}{(n+1)((n+1)+1)})$.

(IK) $P(n+1) : \frac{7}{9}\frac{26}{28}...\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} = \frac{2}{3}(1+\frac{1}{(n+1)(n+2)})$

$\frac{7}{9}\frac{26}{28}...\frac{n^3-1}{n^3+1}\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} = \text{(primenom IH)} = \frac{2}{3}(1+\frac{1}{n(n+1)})\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} = \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$

$\frac{(n+1-1)}{(n+1+1)}\frac{(n+1)^2+n+1+1^2}{(n+1)^2-(n+1)+1^2} = \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\frac{n}{(n+2)}\frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1} = \frac{2}{3}\frac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{3}\frac{n^2+3n+2+1}{n^2+3n+2} =$
$\frac{2}{3}(1+\frac{1}{n^2+3n+2}) = \frac{2}{3}(1+\frac{1}{(n+1)(n+2)})$

Dokazali smo da važi $P(n+1)$, pa na osnovu matematičke indukcije sledi da tvrđenje važi za svako $n \geq 2$.

Zadatak 1.6. *Pokazati da je proizvod* n *brojeva oblika* $6k+1$ *za* $k \in \mathbb{Z}$ *broj istog oblika.*

Rešenje: $P(n)$: proizvod n brojeva $6k+1$ je istog oblika
(BI) $P(1) : 1 = 6 \cdot 0 + 1$, tačno za $k = 0$
(IH) Pretpostavimo da je tačno $(6k_1+1)(6k_2+1)...(6k_n+1) = 6k_0+1$, treba da dokažemo da važi $(6k_1+1)(6k_2+1)...(6k_n+1)(6k_{n+1}+1) = 6k_m+1$
(IK) Imamo $n+1$ brojeva oblika $6k+1$, tj. $6k_1+1, 6k_2+1, ..., 6k_{n+1}+1, \forall k_i \in \mathbb{Z}$
$(6k_1+1)(6k_2+1)...(6k_n+1)(6k_{n+1}+1) = (6k_0+1)(6k_{n+1}+1) =$
$36k_0k_{n+1} + 6k_0 + 6k_{n+1} + 1 = 6(6k_0k_{n+1} + k_0 + k_{n+1}) + 1 =$
$6k_m + 1$, gde je $k_m = 6k_0k_{n+1} + k_0 + k_{n+1}$

Dokazali smo da važi $P(n+1)$, pa na osnovu matematičke indukcije sledi da je proizvod n brojeva $6k+1$ istog oblika.

Zadatak 1.7. *Pokazati da se* $\forall n \geq 1$ *broj* $2^{4^n} - 5$ *završava cifrom 1.*

Rešenje: $P(n)$: broj $2^{4^n} - 5$ završava se cifrom 1
(BI) $P(1)$: broj $2^{4^1} - 5 = 2^4 - 5 = 16 - 5 = 11 \Rightarrow$ završava se cifrom 1
(IH) Pretpostavimo da se broj $2^{4^n} - 5$ završava cifrom 1, treba da dokažemo da se broj $2^{4^{n+1}} - 5$ završava cifrom 1.
(IK) $P(n+1)$: broj $2^{4^{n+1}} - 5$ se završava cifrom 1
$2^{4^{n+1}} - 5 = 2^{4^n \cdot 4} - 5 = (2^{4^n})^4 - 5$
Iz (IH) imamo da se broj $2^{4^n} - 5$ završava cifrom 1, odatle sledi da je poslednja cifra broja 2^{4^n} 6.
Stepen broja koji se završava cifrom 6 je broj koji se završava cifrom 6
$\Rightarrow (2^{4^n})^4$ se završava cifrom 6
$\Rightarrow (2^{4^n})^4 - 5$ se završava cifrom 1
Dokazali smo da važi $P(n+1)$, pa na osnovu matematičke indukcije sledi da se broj $2^{4^n} - 5$ završava cifrom 1.

Zadatak 1.8. *Dokazati Muavrovu formulu:* $(cosx + isinx)^n = cosnx + isinnx$.

Rešenje: $P(n) : (cosx + isinx)^n = cosnx + isinnx$
(BI) $P(1) : (cosx + isinx)^1 = cosx + isinx$ tačno
(IH) Pretpostavimo da važi $(cosx + isinx)^n = cosnx + isinnx$, treba da dokažemo da važi $(cosx + isinx)^{n+1} = cos(n+1)x + isin(n+1)x$
(IK) $P(n+1) : (cosx + isinx)^{n+1} = cos(n+1)x + isin(n+1)x$
$(cosx + isinx)^{n+1} = (cosx + isinx)^n(cosx + isinx) =$
$(cosnx + isinnx)(cosx + isinx) =$
$cosnx \cdot cosx + isinnx \cdot cosx + icosnx \cdot sinx - sinnx \cdot sinx =$
$cos(nx + x) + isin(nx + x) = cos(n+1)x + isin(n+1)x$
Dokazali smo da važi $P(n+1)$, pa na osnovu matematičke indukcije sledi da važi Muavrova formula.

Zadatak 1.9. *Dokazati da* $\forall n \geq 2$ *važi:* $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Rešenje: $P(n) : \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

(BI) $P(2) : \frac{4^2}{2+1} < \frac{(2\cdot 2)!}{(2!)^2}$
$\frac{16}{3} < \frac{4!}{(2)^2}$
$\frac{16}{3} < \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4}$
$\frac{16}{3} < \frac{24}{4}$
$\frac{16}{3} < 6$ tačno

(IH) Pretpostavimo da je tačno $P(n)$, treba dokazati da je tačno $P(n+1)$.

(IK) $P(n+1) : \frac{4^{n+1}}{n+1+1} < \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}$

$\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)\cdot n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} > \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{4^n}{n+1} = \frac{2\cdot 4^n(2n+1)}{(n+1)^2}$

Treba da pokažemo da je: $\frac{2(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot 4^n > \frac{4^{n+1}}{n+2}$

$\frac{2(2n+1)}{(n+1)^2}$ $(< ili >)$ $\frac{4}{n+2}$
$2(2n+1)(n+2)$ $(< ili >)$ $4(n+1)^2$
$2(2n^2+4n+n+2)$ $(< ili >)$ $4(n^2+2n+1)$
$4n^2+10n+4$ $(< ili >)$ $4n^2+8n+4$
$10n$ $(< ili >)$ $8n$, a znamo da je $2n > 0$, jer je $n \geq 2$.
Dokazali smo nejednakost $\frac{2(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot 4^n > \frac{4^{n+1}}{n+2}$, pa na osnovu matematičke indukcije sledi da važi $(\forall n \geq 2)$ $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Zadatak 1.10. *Dokazati da* $\forall n \geq 1$ *važi:* $sinx+sin2x+...+sinnx = \frac{sin\frac{n+1}{2}x\cdot sin\frac{n}{2}x}{sin\frac{x}{2}}$.

Rešenje: (BI) $P(1) : sinx = \frac{sinx\cdot sin\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}} = sinx$ tačno

(IH) Pretpostavimo da važi $P(n) : sinx+sin2x+...+sinnx = \frac{sin\frac{n+1}{2}x\cdot sin\frac{n}{2}x}{sin\frac{x}{2}}$
i dokazujemo da važi $P(n+1) : sinx+sin2x+...+sin(n+1)x = \frac{sin\frac{n+2}{2}x\cdot sin\frac{n+1}{2}x}{sin\frac{x}{2}}$

(IK) $sinx+sin2x+...+sinnx+sin(n+1)x =$
$\frac{sin\frac{n+1}{2}x\cdot sin\frac{n}{2}x}{sin\frac{x}{2}} + sin(n+1)x = \frac{sin\frac{n+1}{2}x\cdot sin\frac{n}{2}x}{sin\frac{x}{2}} + sin(2\cdot\frac{n+1}{2}x) =$
$\frac{sin\frac{n+1}{2}x\cdot sin\frac{n}{2}x}{sin\frac{x}{2}} + 2\cdot sin\frac{n+1}{2}x\cdot cos\frac{n+1}{2}x = \frac{sin\frac{n+1}{2}x}{sin\frac{x}{2}}\cdot(sin\frac{n}{2}x+2\cdot cos\frac{n+1}{2}x\cdot sin\frac{x}{2}) =$
$\frac{sin\frac{n+1}{2}x}{sin\frac{x}{2}}\cdot(sin\frac{n}{2}x+sin\frac{n+2}{2}x-sin\frac{n}{2}x) = \frac{sin\frac{n+1}{2}x\cdot sin\frac{n+2}{2}x}{sin\frac{x}{2}}$

Koristili smo: $sin\alpha\cdot cos\beta = \frac{1}{2}\cdot[sin(\alpha+\beta)-sin(\alpha-\beta)]$

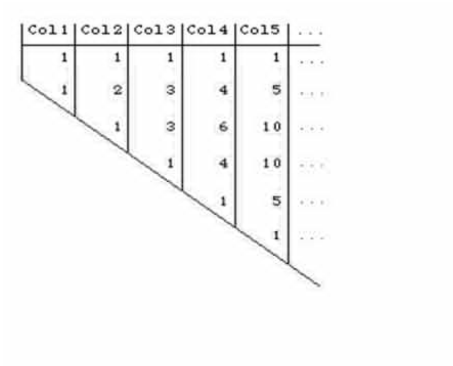
Dokazali smo da važi $P(n+1)$, pa na osnovu principa matematičke indukcije sledi da $\forall n \geq 1$ važi $sinx+sin2x+...+sinnx = \frac{sin\frac{n+1}{2}x\cdot sin\frac{n}{2}x}{sin\frac{x}{2}}$.

1.4 Zanimljivosti o matematičkoj indukciji

- Reč indukcija potiče od latinske reči *inductio* (uvesti, zaključiti).

- Matematička indukcija se može metaforički opisati "Efektom domina": Domine moraju biti tako složene (*definicija mora biti induktivna*) da kad jedna domina padne - tada pada i sledeća (*induktivni korak*). Da bi se sve domine srušile potrebno je gurnuti prvu (*osnovni korak*).

- Konstrukcija Paskalovog trougla koju je dao Al-Karadži izgleda ovako:



Slika 1: Paskalov trougao

- Al-Karadži je rekao da bismo uspeli, moramo postaviti 'jedan' u prvu kolonu tabele i 'jedan' ispod prvog 'jedan', onda pomeriti prvi 'jedan' u drugu kolonu , dodati prvi 'jedan' broju 'jedan' ispod njega. Na taj način dobijamo 'dva', koji treba staviti ispod prenetog 'jedan' i postaviti drugi 'jedan' ispod 'dva'. Zbog toga imamo 1 2 1 u drugoj koloni.
  U kakvoj su vezi druga kolona 1,2,1 i $(a+b)$?
  Kolona 1,2,1 ustvari predstavlja odgovarajuće koeficijente koji se dobijaju kvadriranjem binoma $(a+b)$. Slično dobijamo treću kolonu: 1 prepišemo, saberemo 1 i 2, napišemo 3 ispod 1, saberemo 2 i 1 i tu trojku stavimo iza prve trojke i na kraju dodamo jedinicu.
  Kolona 1,3,3,1 ustvari predstavlja odgovarajuće koeficijente koji se dobijaju stepenovanjem na treći binoma $(a+b)$.

- Al-Karadži je pokazao da je $(1+2+3+...+10)^2$ jednako sa $1^3+2^3+3^3+...+10^3$. On je uradio to tako što je prvo pokazao da je $(1+2+3+...+10)^2 = (1+2+3+...+9)^2+10^3$. Posle je isto pravilo koristio na $(1+2+3+...+9)^2$,

pa onda na $(1+2+3+...+8)^2$ itd.
$(1+2+...+10)^2$
$= (1+2+3+...+8)^2 + 9^3 + 10^3$
$= (1+2+3+...+7)^2 + 8^3 + 9^3 + 10^3$
$= ...$
$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3.$

- Bahrudin na šaljiv način opisuje indukciju:

  Zamislite da ste u vinskom podrumu i morate proveriti kvalitet u 10 000 buradi. Jedino što vlasnik želi od vas jeste da ga trezni izvestite da li je vino u svim buradima istog kvaliteta u roku od 15 minuta. Sada kada je pred vama jedan gotovo nerešiv problem, ne klonite duhom. S takvim i sličnim situacijama priskače u pomoć matematička indukcija. Način na koji biste rešili ovakav problem sastoji se u sledećem: Probajte prvih nekoliko buradi s vinom. Uverite se da je vino istog kvaliteta. Sada 'uzmite' nasumice izabrano bure i pretpostavite da je vino zadatog kvaliteta, možete ga čak i probati. Tada ispitajte vino u sledećem buretu. Ako je ocena ista kao kod pretpostavljenog bureta, možete otići vlasniku i obavestiti ga da ste rešili problem odnosno da je vino istog kvaliteta. Vlasnik će vam poverovati, jer poznaje princip matematičke indukcije.

2 Nizovi

Definicija 2.1. *Niz je svaka funkcija čiji je domen skup prirodnih brojeva, a kodomen skup realnih brojeva.*

Definicija 2.2. *Niz* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je ograničen ako postoje realni brojevi* a *i* b, $a < b$, *takvi da za sve članove niza važi* $a \leq a_n \leq b$.

Definicija 2.3. *Niz* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je*

1. *strogo rastući ako je za sve* $n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
2. *rastući ako je za sve* $n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
3. *opadajući ako je za sve* $n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
4. *strogo opadajući ako je za sve* $n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

U svakom od slučajeva 1-4 kaže se da je (a_n) *monoton, a u slučajevima 1. i 4. da je strogo monoton.*

2.1 Aritmetički i geometrijski niz

Definicija 2.4. *Beskonačan niz realnih brojeva je aritmetički niz, ako je svaki njegov član, počevši od drugog, jednak aritmetičkoj sredini njemu susednih članova.*

Da bi beskonačan niz realnih brojeva bio aritmetički, neophodno je i dovoljno da postoji realan broj d (razlika aritmetičkog niza) tako da se svaki član, počevši od drugog, dobija sabiranjem njemu prethodnog člana i broja d:

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d, \ ..., \ a_n = a_{n-1} + d, \ ...$$

U aritmetičkom nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa prvim članom a_1 i razlikom d može se odrediti proizvoljan član niza na sledeći način:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Ako brojevi $a_1, a_2, ..., a_n$ predstavljaju prvih n članova aritmetičkog niza, onda za svaki broj k, $1 \leq k \leq n$, važi:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Neka je $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ zbir prvih n članova aritmetičkog niza $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ sa razlikom d. Tada je

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Definicija 2.5. *Beskonačan niz realnih brojeva je geometrijski niz ako je svaki njegov član, počev od drugog, jednak geometrijskoj sredini njemu susednih članova.*

Da bi beskonačan niz realnih brojeva, čiji je prvi član različit od nule, bio geometrijski niz čiji su svi članovi različiti od nule, neophodno je i dovoljno da postoji realan broj q, različit od nule (koji se naziva količnik geometrijskog niza), takav da se svaki član niza, počev od drugog, dobija množenjem njemu prethodnog člana sa q:

$$a_1, \quad a_2 = a_1 q, \quad a_3 = a_2 q, \quad a_4 = a_3 q, \ ..., \ a_n = a_{n-1} q, ...$$

U geometrijskom nizu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sa prvim članom a_1 i količnikom q je za sve $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

U geometrijskom nizu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, čiji je prvi član a_1 i količnik q, zbir prvih n članova ovog niza je

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad ako\ je\ q \neq 1, \quad S_n = n a_1, \quad ako\ je\ q = 1.$$

2.2 Zadaci

Zadatak 2.1. *Odrediti zbir svih dvocifrenih prirodnih brojeva.*

Rešenje: $a_1 = 10, \quad d = 1, \quad n = 90$
$S_{90} = \frac{90}{2}(2 \cdot 10 + (90 - 1) \cdot 1) = \frac{90 \cdot 109}{2} = 109 \cdot 45 = 4905$

Zadatak 2.2. *Rešiti jednačinu:* $5^3 \cdot 5^7 \cdot 5^{11} \cdot \dots \cdot 5^x = 25^{105}, \ x \in \mathbb{N}$.

Rešenje: $5^{3+7+11+...+x} = 25^{105} \ \Rightarrow 5^{3+7+11+...+x} = 5^{210}$
$3 + 7 + 11 + ... + x = 210$
$a_1 = 3, \quad d = 4, \quad a_n = x, \quad S_n = 210$
$210 = \frac{n}{2} \cdot (6 + (n - 1) \cdot 4)$
$420 = 6n + 4 \cdot n^2 - 4n$
$4n^2 + 2n - 420 = 0$
$2n^2 + n - 210 = 0$
$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1680}}{4} = \frac{-1 \pm 41}{4}$
$n_1 = 10, \quad n_2 = -\frac{21}{2}$
$n_2 = -\frac{21}{2}$ ne može, jer $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 10$
$a_{10} = a_1 + (n - 1)d = 3 + 9 \cdot 4 = 39$
$x = 39$

Zadatak 2.3. *Odrediti* $m \in \mathbb{R}$ *tako da rešenja jednačine* $x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$ *čine aritmetički niz.*

Rešenje: uvodimo smenu $t = x^2$.

$t^2 - (3m+2)t + m^2 = 0$

$t_{1,2} = \frac{3m+2 \pm \sqrt{(3m+2)^2 - 4m^2}}{2}$

Rešenja jednačine biće oblika: $\pm\sqrt{t_1}, \ \pm\sqrt{t_2}$.
Možemo pretpostaviti da je prvo rešenje veće od drugog, tj. $-\sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_1}$ treba da čine aritmetički niz. Koristeći Vietove formule dobijamo:
$t_1 + t_2 = 3m + 2$
$t_1 \cdot t_2 = m^2$
Sada koristimo uslov zadatka da ovo treba da bude aritmetčki niz.
$\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = \sqrt{t_2} - (-\sqrt{t_2})$
$\sqrt{t_1} = 3\sqrt{t_2}$
$t_1 = 9t_2$
${9t_2}^2 = m^2 \Rightarrow (3t_2)^2 = m^2$
$m = \pm 3t_2$
Prvi slučaj: $m = 3t_2$, menjamo u $t_1 + t_2 = 3m + 2$.
$9t_2 + t_2 = 3 \cdot 3t_2 + 2$
$t_2 = 2, \quad t_1 = 18, \quad m = 6$
Drugi slučaj: $m = -3t_2$.
$9t_2 + t_2 = 3(-3t_2) + 2$
$19t_2 = 2$
$t_2 = \frac{2}{19}, \quad t_1 = \frac{18}{19}, \quad m = -\frac{6}{19}$

Zadatak 2.4. *Tri broja čine geometrijski niz čiji je zbir 65. Ako se srednji član uveća za 10 dobijamo aritmetički niz. Odrediti te brojeve.*

Rešenje: a, b, c čine geometrijski niz, $a + b + c = 65$.
$a, b + 10, c$ čine aritmetički niz .
$a + b + c = a + aq + aq^2 = 65$
$a(1 + q + q^2) = 65$
$a = \frac{65}{1+q+q^2}$
$c - b - 10 = b + 10 - a$
$a - 2b + c = 20$
$a - 2aq + aq^2 = 20$
$a(1 - 2q + q^2) = 20$
$\frac{65}{1+q+q^2}(1 - 2q + q^2) = 20$
$45q^2 - 150q + 45 = 0$
$3q^2 - 10q + 3 = 0$
$q_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{6}$
$q_1 = 3, \quad q_2 = \frac{1}{3}$

Prvi slučaj, $q = 3 \Rightarrow$
$a = \frac{65}{1+3+3^2} = \frac{65}{13} = 5$
$b = 15, \quad c = 45 \ \Rightarrow to\ je\ niz\ \{5, 15, 45\}$

Drugi slučaj, $q = \frac{1}{3} \Rightarrow$
$a = \frac{65}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = \frac{65}{\frac{13}{9}} = \frac{65 \cdot 9}{13} = 45$
$b = 15, \quad c = 5 \ \Rightarrow to\ je\ niz\ \{45, 15, 5\}$

Zadatak 2.5. *Izračunati* $A = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99\ldots9}_{n\ puta}$.

Rešenje: $A = 9+99+999+...+\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ puta}} = 10-1+100-1+...+1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ puta}}-1 =$
$10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n - n$

Označimo: $S_n = 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n, b_1 = 10, q = 10, paje$
$A = S_n - n = b_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} - n = 10 \cdot \frac{10^n-1}{10-1} - n = \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$

Zadatak 2.6. *Dužina stranice kvadrata je a. Središta stranica datog kvadrata su temena novog kvadrata itd. Odrediti zbir obima i zbir površina prvih n kvadrata.*

Rešenje: Dužina stranice prvog kvadrata je a, a dužina stranice sledećeg kvadrata je polovina dijagonale prethodnog, tj. $a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
Obim prvog kvadrata je $4a$, a obim narednog je $\frac{4a}{\sqrt{2}}$.

Zbir obima prvih n kvadrata:
$a_1 = 4a,\ q = \frac{1}{\sqrt{2}},\ S_n = ?$
$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = 4a \cdot \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^n-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}-1} = 4a \cdot \frac{\frac{1}{(\sqrt{2})^n}-1}{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} =$
$\frac{4a\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot (\frac{1}{(\sqrt{2})^n} - 1) = 4a(2 + \sqrt{2})(1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^n})$

Zbir površina prvih n kvadrata:
$a^2 = b_1$
$\frac{a^2}{2} = b_2$
$\frac{a^2}{4} = b_3$
...
$q = \frac{1}{2}$
$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = a^2 \cdot \frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2a^2(1 - \frac{1}{2^n})$ ovo je zbir površina prvih n kvadrata.

Zadatak 2.7. *Polazeći iz iste tačke kreću se po kružnici dva tela u suprotnim smerovima. Prvo telo u prvoj sekundi pređe 3 °,a u svakoj sledećoj sekundi pređe jedan stepen više nego u prethodnoj, a drugo u prvoj sekundi pređe 1.5 °, a u svakoj sledećoj 6 stepeni više nego u prethodnoj. Kada će se tela sresti?*

Rešenje: $a_n: \ a_1 = 3, \ d_1 = 1$
a_n - koliko se stepeni pomerilo telo A u n-toj sekundi
$b_n: \ b_1 = 1.5, \ d_2 = 6$
b_n - koliko se stepeni pomerilo telo B u n-toj sekundi
Uslov: $S_n^A + S_n^B = 360$, gde je S_n^A ukupan broj stepeni koje pređe telo A do susreta, a S_n^B ukupan broj stepeni koje pređe telo B do susreta.
$\frac{n}{2} \cdot (6 + (n-1) \cdot 1) + \frac{n}{2} \cdot (3 + (n-1) \cdot 6) = 360$
$6n + n^2 - n + 3n + 6n^2 - 6n = 720$
$7n^2 + 2n - 720 = 0$
$n_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+20160}}{14}$
$n_1 = 10, \ n_2$ nešto $< 0 \Rightarrow n = 10$

Zadatak 2.8. *Neka je* $a = 0.2777...,\ b = 0.1636363...$. *Odrediti* $a \cdot b$ *u obliku* $\frac{p}{q}$, *gde su* p *i* q *uzajamno prosti.*

Rešenje: $a = 0.2777... = \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... = \frac{2}{10} + 7(\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...)$
Zagrada je suma geometrijskog reda: $b_1 = \frac{1}{100}, \ q = \frac{1}{10}, \ |\frac{1}{10}| < 1 \Rightarrow \sum = \frac{b_1}{1-q}$
$a = \frac{2}{10} + 7(\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{10}}) = \frac{2}{10} + 7(\frac{\frac{1}{100}}{\frac{9}{10}}) = \frac{2}{10} + 7 \cdot \frac{1}{90} = \frac{18+7}{90} = \frac{5}{18}$
$b = 0.16363... = \frac{1}{10} + \frac{63}{1000} + \frac{63}{100000} + ... = \frac{1}{10} + 63(\frac{1}{1000} + \frac{1}{100000} + ...)$
Zagrada je suma geometrijskog reda: $c_1 = \frac{1}{1000}, \ q = \frac{1}{100}, \ |\frac{1}{100}| < 1 \Rightarrow \sum = \frac{b_1}{1-q}$
$b = \frac{1}{10} + 63 \cdot \frac{\frac{1}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} + 63 \cdot \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{99}{100}} =$
$\frac{1}{10} + 63 \cdot \frac{1}{990} = \frac{1}{10} + \frac{21}{330} = \frac{9}{55}$
$a \cdot b = \frac{5}{18} \cdot \frac{9}{55} = \frac{1}{22}$

2.3 Granična vrednost niza

Definicija 2.6. *Za broj a kažemo da je granična vrednost (limes) nekog niza a_n, ako se u maloj okolini ε tog broja a nalazi beskonačno mnogo članova tog niza, a izvan te ε okoline samo konačan broj članova tog niza.*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)|a_n - a| \leq \varepsilon$$

Za takav niz a_n kažemo da je konvergentan i da konvergira ka a.

Ako takav broj a ne postoji ili je $a = \pm\infty$, niz a_n je divergentan.
Ako je $a = +\infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n > M)$.
Oznaka: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ ili $a_n \to a, n \to \infty$
Ako niz ima graničnu vrednost, onda je ona jednoznačno određena.
$a = \lim_{n\to\infty} a_n, b = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow a = b$.
Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, kažemo da je a_n nula-niz.

2.4 Primeri

Primer 1. *Posmatrajmo niz* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}...$
$\frac{1}{n} \to 0$ *kada* $n \to \infty$ *tj.* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Primer 2. $(1 + \frac{1}{n})^n =?$
$n = 1 : (1 + \frac{1}{1})^1 = 2$
$n = 2 : (1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2.25$
$n = 3 : (1 + \frac{1}{3})^3 = \frac{64}{27} = 2.37$
$n = 4 : (1 + \frac{1}{4})^4 = \frac{625}{256} = 2.44$
$n = 5 : (1 + \frac{1}{5})^5 = \frac{7776}{3125} = 2.48$
$n = 6 : (1 + \frac{1}{6})^6 = \frac{117649}{46656} = 2.52$
...
$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$

Primer 3. $a_n = (-1)^n$
$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1, ...$

Nema graničnu vrednost, jer postoji beskonačno mnogo članova niza van ε okoline bilo kog elementa niza.

Primer 4. *Neka je dat niz* $a_n = a^n$.

Za $a > 1 : \lim_{n\to\infty} a^n = \infty$
Za $|a| < 1 : \lim_{n\to\infty} a^n = 0$
Za $a = 1 : \lim_{n\to\infty} a^n = 1$
Za $a \leq -1 : \lim_{n\to\infty} a^n$ *ne postoji.*

2.5 Operacije sa graničnim vrednostima

1. $\lim_{n\to\infty} C = C, C = const.$

2. $\lim_{n\to\infty}(C \cdot a_n) = C \cdot \lim_{n\to\infty} a_n, C = const.$

3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

4. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, ako je $b_n \neq 0$ za sve $n \in N$ i $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

6. $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n^{\lim_{n\to\infty} b_n}$

7. (**Teorema o dva policajca**): Neka su data tri niza a_n, b_n, c_n, pri čemu $(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0) a_n \leq b_n \leq c_n$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$.
   Tada sledi $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

Neodređeni izrazi:
$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, +\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0$

Određeni izrazi:
$\infty + \infty = \infty$
$\frac{A}{\infty} = 0$ ako je $A \neq \infty$
$\frac{A}{0} = \infty$ ako je $A \neq 0$
$\infty \cdot \infty = \infty$
$A \cdot \infty = \infty$ ako je $A \neq 0$

Značajni limesi:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a \in R$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0, a > 1, p > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n!} = 0, a > 1, p > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$
- $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{\alpha}{n})^{\beta n} = e^{\alpha\beta}$

Primer 5. *Dokazati (po definiciji) :*

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, a_n = \frac{1}{n}$

$(\forall \varepsilon > 0)|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$
$|\frac{1}{n}| < \varepsilon$
$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon n > 1$
$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\varepsilon n > 1 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2, a_n = \frac{2n+1}{n+2}$

$(\forall \varepsilon > 0)|\frac{2n+1}{n+2} - 2| < \varepsilon$
$|\frac{2n+1-2n-4}{n+2}| < \varepsilon$
$\frac{3}{n+2} < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon(n+2) > 3$
$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\varepsilon(n+2) > 3 \Rightarrow |a_n - 2| < \varepsilon$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0, a_n = \frac{n}{n^2+1}$

$(\forall \varepsilon > 0)|\frac{n}{n^2+1} - 0| < \varepsilon$
$\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$
$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\varepsilon n > 1 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3}{n} = +\infty,\ a_n = \frac{n^2-3}{n}$

$(\forall \varepsilon > 0)\frac{n^2-3}{n} > \frac{n^2-3n}{n} = n - 3$
$(\forall n > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)n - 3 > M \Rightarrow (\forall n \geq n_0)a_n > M,$ *gde je* M *neka proizvoljna okolina*

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+1} = \frac{1}{2}, a_n = \frac{n^2+n}{2n^2+1}$

$(\forall \varepsilon > 0)|\frac{n^2+n}{2n^2+1} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$
$|\frac{2n^2+2n-2n^2-1}{2(2n^2+1)}| < \varepsilon$
$|\frac{2n-1}{2(2n^2+1)}| < \varepsilon$
$\frac{2n-1}{2(2n^2+1)} < \varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon(2n^2+1) > 2n - 1$
$(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ *tako da* $2\varepsilon(n_0^2+1) > 2n_0 - 1$
$(\forall n \geq n_0)\frac{2n}{4n^2} < \varepsilon,$ *tj.* $\frac{1}{2n} < \varepsilon,$ *pa je* $1 < 2n\varepsilon,$
$(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 < 2n_0\varepsilon$
$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \ 1 < 2n\varepsilon \Rightarrow |a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n^2} = 0, a_n = \frac{n+1}{2n^2}$

$(\forall \varepsilon > 0)|\frac{n+1}{2n^2}| < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+1}{2n^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon$
$(\exists n_0 \in \mathbb{N})1 < n_0\varepsilon$
$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\varepsilon n > 1 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$

Primer 6. *Neka je* $a_n = \frac{n^2+n-1}{3n^2+1}$. *Izračunati* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Ideja je da se svaki sabirak podeli sa najvećim stepenom n*, koji da se pojavljuje u razlomku, i da se iskoristi* $\frac{1}{n^k} \to 0, n \to \infty$ *za* $k \geq 1$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3}$$

Primer 7. *Neka je* $a_n = (\frac{n}{n+1})^n$. *Izračunati* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Koristimo da je $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{(n+1)-1}{1+n})^n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{1+n})^n =$$
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{-(1+n)})^{-(1+n)\cdot\frac{1}{-(1+n)}\cdot n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{-1-n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-\frac{1}{n}-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Primer 8. *Neka je* $a_n = (\sqrt{n^2-5n+6}-n)$. *Izračunati* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Vrši se racionalisanje.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-5n+6}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-5n+6}-n)(\sqrt{n^2-5n+6}+n)}{\sqrt{n^2-5n+6}+n} =$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-5n+6}^2-n^2}{\sqrt{n^2-5n+6}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5n+6-n^2}{\sqrt{n^2-5n+6}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-5n+6}{\sqrt{n^2(1-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2})}+n} =$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{-5n+6}{n\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-5+\frac{6}{n}}{\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}+1} = \frac{-5}{1+1} = -\frac{5}{2}.$$

Primer 9. *Neka je* $a_n = \frac{(n+3)^3}{n^3}$. *Izračunati* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+9n^2+27n+27}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{9}{n}+\frac{27}{n^2}+\frac{27}{n^3}}{1} = 1.$$

Primer 10. *Neka je* $a_n = (\frac{2n}{2n+1})^n$. *Izračunati* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Koristi se da je $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{2n}{2n+1})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{(2n+1)-1}{2n+1})^n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2n+1})^n =$$
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{-(2n+1)})^{-(2n+1)\cdot\frac{1}{-(2n+1)}\cdot n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{-2n-1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{-\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}}} =$$
$$e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-2-\frac{1}{n}}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Primer 11. *Izračunati* $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+n+5}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-\frac{1}{n^2})}{n^2(2+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2})} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}} =$$
$$\frac{1-0}{2+0+0} = \frac{1}{2}.$$

Primer 12. *Neka je* $a_n = \frac{2n^3}{2n^2+3} - \frac{1+5n^2}{5n+1}$. *Izračunati* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

$\frac{2n^3}{2n^2+3} = \frac{2n^3+3n-3n}{2n^2+3} = \frac{n(2n^2+3)}{2n^2+3} - \frac{3n}{2n^2+3} = n - \frac{3n}{2n^2+3}$;
$\frac{1+5n^2}{5n+1} = \frac{1+5n^2+n-n}{5n+1} = \frac{n(5n+1)}{5n+1} + \frac{1-n}{5n+1} = n + \frac{1-n}{5n+1}$;
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(n - \frac{3n}{2n^2+3} - n - \frac{1-n}{5n+1}) = \lim_{n\to\infty}(-\frac{3n}{2n^2+3} - \frac{1-n}{5n+1}) = \lim_{n\to\infty}(-\frac{3n}{2n^2+3} - \frac{1}{5n+1} + \frac{n}{5n+1}) = \frac{1}{5}$.

2.6 Rekurentno zadati nizovi

Definicija 2.7. *Rekurentni niz je niz kog koga se svaki element dobija kao funkcija prethodnih elemenata, pri čemu su dati početni uslovi.*

Opšta formula:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

pri čemu je x_1 dato.
Rekurentno zadati nizovi su ograničeni i monotoni.

Zadatak 2.9. *Niz je zadat na sledeći način* $2 < x_1 < 3,\ 5x_{n+1} = x_n^2 + 6$, *tako da za svako* n, $x_n \in (2,3)$. *Ispitati da li konvegira i ako da odrediti graničnu vrednost.*

Rešenje:
$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2+6}{5} - x_n = \frac{x_n^2+6-5x_n}{5} = \frac{(x_n-3)(x_n-2)}{5} < 0$, jer je $2 < x_n < 3$
pa je $(x_n - 2) > 0$, a $(x_n - 3) < 0$
iz $x_{n+1} - x_n < 0$ sledi da je x_n opadajući
$\Rightarrow \exists k = \lim_{n\to\infty} x_n$
$5x_{n+1} = x_n^2 + 6 / \lim_{n\to\infty}$
$5k = k^2 + 6$
$k^2 - 5k + 6 = 0$
$k_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm1}{2}, k_1 = 3, k_2 = 2$ i x_n opadajući $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 2$

Zadatak 2.10. *Niz je zadat na sledeći način* $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{4x_n+2}{x_n+3}$, *tako da za svako* n,$x_n > 0$. *Ispitati da li konvegira i ako da odrediti graničnu vrednost.*

Rešenje:
(BI) $x_1 \leq x_2$
(IH) $x_n \leq x_{n+1}$
(IK) $x_n \leq x_{n+1} / +3$
$x_n + 3 \leq x_{n+1} + 3 \Rightarrow \frac{1}{x_n+3} \geq \frac{1}{x_{n+1}+3} / \cdot (-10)$
$\frac{-10}{x_n+3} \leq \frac{-10}{x_{n+1}+3} / +4$
$4 - \frac{10}{x_n+3} \leq 4 - \frac{10}{x_{n+1}+3}$
$\frac{4x_n+2}{x_n+3} \leq \frac{4x_{n+1}+2}{x_{n+1}+3}$
$x_{n+1} \leq x_{n+2}$
$\Rightarrow \exists k = \lim_{n\to\infty} x_n$
$x_{n+1} = \frac{4x_n+2}{x_n+3} / \lim_{n\to\infty}$
$k = \frac{4k+2}{k+3}$
$k^2 + 3k - 4k - 2 = 0$
$k^2 - k - 2 = 0$
$k_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm3}{2}, k_1 = 2,\ k_2 = -1$ i x_n rastući $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 2$