Једначине и неједначине са параметром

предавање осмишљено као увод и мотивација за решавање алгебарских једначина за ученике средњих стручних школа

Трајање	два школска часа
Циљ	упознавање ученика са појмом једначина и неједначина, као и са појмом параметра, приказ основних концепата при одређивању непознатих у једачинама, разликовање појмова линеарна, нелинеарна, квадратна једначина, поставка проблема, мотивација ученика за даљи рад на сложенијим примерима из ових области
Методе	Излагање проблема из живота и рада, постављање тих проблема у математичком облику, представљање општег поступка за решавање тих проблема а затим специфично решавање проблема наведених као пример. Ако услови часа дозовле, самостални рад задатака за вежбу на табли. Осмишљавање задатака које би ученици добили за домаћи рад.

Пре свега, шта су једначине и неједначине?
Једначина је математички исказ, задат симболички, који означава да су два исказа са различитих страна знака једнакости иста (или еквивалентна).
Једначине се често користе да искажу једнакост два израза која садрже једну или више промењљивих.
Неки математичари користе израз једначина за једнакост која није идентитет односно за једнакост чија истинитосна вредност зависи од тога коју вредност узме непозната промењљива.
Слично за неједначину.

1. ***Једначина***

Задатак 1

Шеф на градилишту има на располагању 50 метара арматуре. Сваког дана се за градњу потроши 15 метара арматуре. Колико метара шеф треба да наручи, да би градилиште функционисало у наредних 7 дана, без додатних наруџби, тако да се по завршетку недеље складиште арматуре испразни?

Решење:

Овако формулисан проблем би решили још људи из античког света, овакав проблем је могуће решити користећи искључиво речи, без формалног поступка. Али како бисмо ми као математичари решили овај проблем? Постављањем ***једначине****.*

$x + 50 = 7 \cdot 15$
$x + 50 = 105$
$x = 55$

2. *Неједначина*

Задатак 2

Модификујмо претходно постављен проблем, тако да нас занима, колико највише арматуре може шеф да наручи, ако се има у виду да је капацитет складишта 200 метара арматуре.

Решење:
Сада решење нашег проблема не представља тачан и јединствен број, већ нас занима опсег у којем се решење проблема може кретати. Начин да се то постигне јесте решавањем следеће ***неједначине****.*

$x + 50 \ \leq 200$
$x \leq 150$

3. *Неједначина са коефицијентом уз X*

Задатак 3

Шефу је за обављање посла потребно 10 радника. Ако за обављање посла има на располагању буџет од 100 евра, колика је максимална плата коју може имати радник, тако да у каси након плаћања остане 20 евра за додатне трошкове?

Решење:

$10x + 20 = 100$
$10x = 100 - 20$
$10x = 80$
$x = \ 80 : 10$
$x = 8$

Максимална плата коју може имати радник износи 8 евра.

4. *Квадратна једначина*

Задатак 4

Грађевинска фирма изводи радове на n градилишта. За пренос материјала између два градилишта мора бити задужен комби, тако да увек буде на располагању за пренос материјала између та два градилишта. Ако фирма има 94 комбија, колико највише градилишта може радити истовремено, тако да у гаражи фирме увек буду и 3 резервна комбија?

Решење:

Ако имамо n градилишта, укупан број потребних комбија је n(n+1)/2.
Сада можемо поставити једначину

$$\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}=94-3$$

Решавамо је:

$$n(n-1)= 2 \cdot 91$$
$$n^2 - n - 182 = 0$$

Ово што имамо прилике да видимо јесте квадратна једначина. Назив квадратна потиче од тога што непозната променљива учествује у изразу и својим другим степеном (квадратом)
Овакав проблем је животног типа, са сличним проблемима су се сусретали и древни народи (ако изузмемо чињеницу да су они користили магарце и камиле, остатак задатка може да се пребаци и пар хиљада година уназад).
Вавилонци су их решавали искључиво вербално, без формалног поступка који би могао бити примењен и на неки други проблем.
Египћани су знали да решавају квадратне једначине, али само ако је коефицијент уз линеарни члан био био нула.
Како ми решавамо задатке овог типа?

Квадратна једначина је полиномијална једначина другог степена. Њен општи облик је

$$ax^2+bx+c=0$$

где је $a \neq 0$. (За $a = 0$, једначина постаје линеарна једначина.)
Слова a, b, и c се називају коефицијентима: a је квадратни коефицијент, b је линеарни коефицијент, а c је константни коефицијент.

Квадратна једначина са <u>реалним</u> (или <u>комплексним</u>) коефицијентима има два (не обавезно различита) решења, која се називају коренима. Решења могу бити реална или комплексна, а дата су формулом:

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

тј. решења су $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

У горњој формули, израз испод квадратног корена:

$$\Delta= b^2-4ac$$

се назива <u>дискриминантом</u> квадратне једначине.

Квадратна једначина са *реалним* коефицијентима може имати један или два различита реална корена, или два различита комплексна корена. У овом случају, дискриминанта одређује број и природу корена. Постоје три случаја:

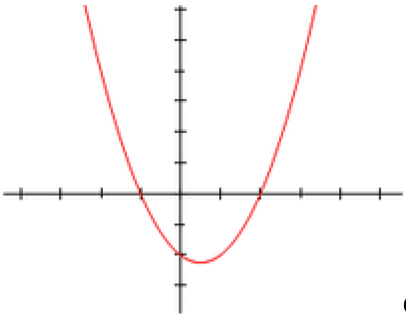
- Ако је дискриминанта позитивна, постоје два различита корена, оба реална.
- Ако је дискриминанта једнака нули, постоји тачно један корен, и тај корен је реалан број. Он се некада назива двоструким кореном, а његова вредност је: $x = -\frac{b}{2a}$
- Ако је дискриминанта негативна, нема реалних корена.

Корени квадратне једначине су такође нуле квадратне функције $f(x) = ax^2 + bx + c$ јер су то вредности *x* за које је *f(x) = 0*.

Ако су *a*, *b* и *c* реални бројеви, и домен функције *f* је скуп реалних бројева, онда су нуле функције *f* тачно *x*-координате тачака где график фукције додирује *x*-осу. Из тога следи да:

- Ако је дискриминанта позитивна, график додирује *x*-осу у две тачке.
- Ако је дискриминанта једнака нули, онда је додирује у једној тачки
- Ако је негативна, онда график не додирује *x*-осу.

<u>Пример</u>. График функције $f(x) = x^2 - x - 2$



Слика 1.

x-координате тачака где *f(x)* додирује x-осу, $x = -1$ и $x = 2$ су корени квадратне једначине $x^2 - x - 2 = 0$.

Нотацију сличну оној коју ми употребљавамо увео је тек Диофант, али прави рад са непознатим променљивима почео је тек у шеснаестом веку.
Јако лепа прича, како сад то има утицаја на наш задатак?

<u>Решење</u>:

У нашој квадратној једначини, $a = 1, b = -1$ и $c = -182$.
Рачунањем дискриминанте, добијамо:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-182)$
$\Delta = 1 + 728$

$\Delta = 729$

Дискриминанта је позитивна, дакле наша квадратна једначина има два реална корена.
Решавањем квадратне једначине, добијамо:

$$n_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-182)}}{2 \cdot 1}$$

$$n_1 = -13 \text{ или } n_2 = 14$$

Пошто број градилишта не може бити негативан, решење је да фирма може истовремено да ради на највише 14 градилишта.

5. ***Квадратна неједначина***

Задатак 5

У подне се чамац налази на 20 km јужно од глисера. Чамац се креће ка истоку брзином 20 km/h, а глисер ка југу брзином од 40 km/h. Ако је видљивост 9 km, да ли ће се путници на чамцу и глисеру видети?

Решење:

Нека је x број сати које су провели путујући. Док чамац пређе $20x$ километара, глисер пређе $40x$ километара. Да би се путници видели, растојање глисера и чамца треба да буде мање или једнако 9 km. Поставимо једначину користећи Питагорину теорему:

$$(20 - 40x)^2 + (20x)^2 \leq 9^2$$

Средимо и решимо:

$$400 - 1600x + 1600x^2 + 400x^2 \leq 81$$
$$2000x^2 - 1600x + 319 \leq 0$$

Шта сада чинити?

Квадратне неједначине су облика:

$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$
$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

где је x непозната променљива, а a, b, и c реални бројеви и важи $a \neq 0$.
Разликујемо следеће случајеве:

- $a > 0, D > 0$, онда је $ax^2 + bx + c < 0$ у интервалу између x_1 и x_2, а

$ax^2 + \ bx + c > 0$ иначе.

- $a > 0, D = 0$, онда је $ax^2 + \ bx + c \geq 0$ увек.
- $a > 0, D < 0$, онда је $ax^2 + \ bx + c > 0$ увек.
- $a < 0, D > 0$, онда је $ax^2 + \ bx + c > 0$ у интервалу између x_1 и x_2, а $ax^2 + \ bx + c < 0$ иначе.
- $a < 0, D = 0$, онда је $ax^2 + \ bx + c \leq 0$ увек.
- $a < 0, D < 0$, онда је $ax^2 + \ bx + c < 0$ увек.

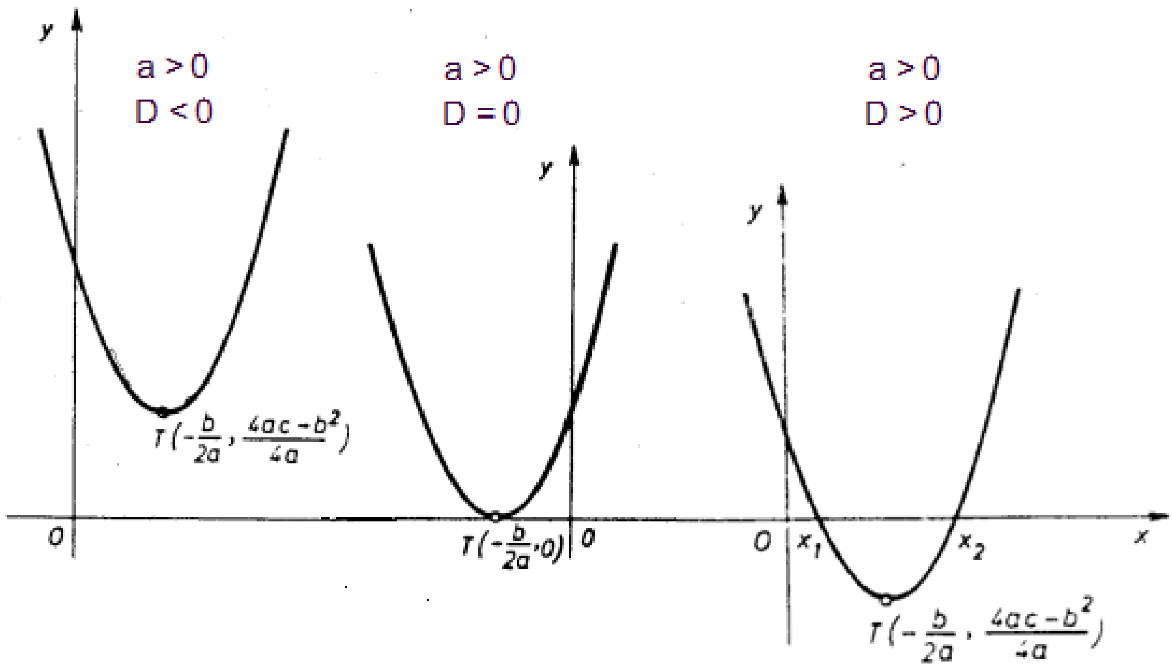
D је ознака за дискриминанту. $D = \ b^2 - \ 4ac$.

Ова таблица може помоћи у решавању задатка, али нормални задаци се никада не решавају овако, нико од Вас неће тражити да ову таблицу знате. Сваки задатак се решава корушћењем графичке представе квадратне функције и логичног размишљања.
Како се црта график квадратне функције у зависности од D и а?

Једначину облика $y = ax^2 + bx + c$ можемо трансформисати у облик

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (-\frac{D}{4a})$$

где је уређени пар $(-\frac{b}{2a}\ ,\ -\frac{D}{4a})$ теме параболе графика квадратне фунције (ове криве линије коју видите на слици - график квадратне функције је крива која се зове парабола).
Како ће парабола бити окренута (на горе или на доле) и да ли ће сећи x-осу или ће бити 'испод' или 'изнад' x-осе, зависиће од знака коефицијента a и дискриминанте $D = \ b^2 - \ 4ac$. Разликујемо 6 основних случајева (*представљање прво графицима, а потом објашњења*):



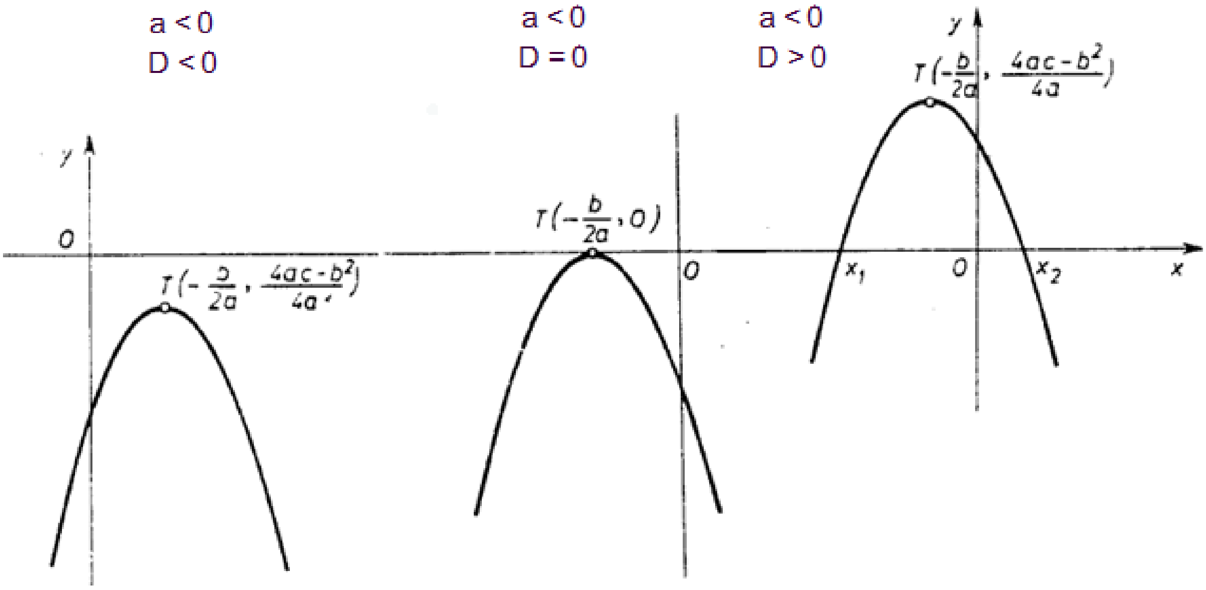
Слика 2.

За сва три облика са Слике 2, функција је дефинисана за све x из скупа реалних бројева и то:

1. $a > 0$ и $D < 0$ нема нула и позитивна је за све вредности x

2. $a > 0$ и $D = 0$ има једну нулу $x = -\frac{b}{2a}$ и позитивна је за све вредности x различите од нуле функције.

3. $a > 0$ и $D > 0$ има две нуле x_1 и x_2 и позитивна је за реалне бројеве $x < x_1$ и $x > x_2$.



Слика 3.

За сва три облика са Слике 3, функција је дефинисана за све x из скупа реалних бројева и то:

1. $a < 0$ и $D < 0$ нема нула и негативна је за све вредности x

2. $a < 0$ и $D = 0$ има једну нулу $x = -\frac{b}{2a}$ и негативна је за све вредности x различите од нуле функције.

3. $a < 0$ и $D > 0$ има две нуле x_1 и x_2 и негативна је за реалне бројеве $x < x_1$ и $x > x_2$.

Сада је лако решити сваку квадратну неједначину, простим скицирањем графика одговарајуће квадратне функције, и посматрањем њеног понашања

У нашем конкретном примеру имамо следећу ситуацију:

$$x_{1,2} = \frac{1600 \pm \sqrt{2560000 - 2552000}}{4000} = \frac{1600 \pm 40\sqrt{5}}{4000} = \frac{40 \pm \sqrt{5}}{100}$$

Одговарајућа једначина има два решења: $x_1 \approx 0.38h \approx 22.8min$ *и* $x_2 \approx 0.42h \approx 25.2min$*, што значи да се путници могу видети током тих неколико минута,*

имајући у виду облик графика наше функције, где је функција конвексна (крајеви графика "иду на горе") и део који је мањи од нуле је део између наша два решења.
Случај да глисер пређе више од 20 km, односно ситуацију да глисер буде јужно од чамца не разматрамо, јер би му за то требало више од пола сата, односно чамац би се удаљио источно више од 10 km, а хипотенуза троугла са катетом већом од 10 никако не може бити мања од 9.

6. *Квадратна једначина са параметром*

Задатак 6

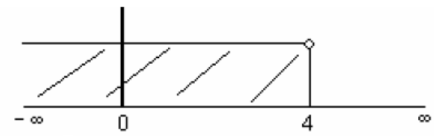
За које вредности параметра $m \in R$ једначина $mx^2 - 4x + 1 = 0$ има реална и различита решења?

<u>Решење</u>:

Овде мора бити $D > 0$ *и наравно* $a \neq 0$.

$a = m \Rightarrow m \neq 0$

$D = b^2 - 4ac$
$D = (-4)^2 - 4 \cdot m \cdot 1$
$D = 16 - 4m > 0$
$16 - 4m > 0$
$-4m > -16$
$m < 4$



Дакле, решење је $m \in (-\infty, 0) \cup (0{,}4)$.

7. *Квадратна неједначина са параметром*

Задатак 7.1

Пут који прелази аутомобил дат је у функцији времена формулом:
$$(r^2 - 1)t^2 + 20(r - 1)t + 50$$
по неком параметру r. Одредити за које вредности тог параметра аутомобил неће прећи више од 200 km.

Решење:

Поставимо неједначину:

$$(r^2-1)t^2+20(r-1)t+50<200$$
$$(r^2-1)t^2+20(r-1)t-150<0$$

Да би ово важило увек, потребно нам је да буде $a<0$ и $D<0$.
У нашем случају, a је r^2-1:

$$r^2-1<0$$

Одатле следи да

$$r\,\epsilon\,(-1,1)$$

Што се тиче услова $D<0$, имамо следећу неједначину:

$$400(r-1)^2+600(r^2-1)<0$$
$$2r^2-4r+2+3r^2-3<0$$
$$5r^2-4r-1<0$$

Одавде добијамо да

$$r\,\epsilon\,(-\frac{1}{5},1)$$

Пресек ова два решења даје нам коначно решење:

$$r\,\epsilon\,(-\frac{1}{5},1).$$

Задатак 7.2

Одредити скуп свих вредности реалног параметра a за које је неједначина $\frac{x+a}{x^2+x+1}\geq\frac{x}{x^2+2x+3}$ тачна за свако x.

Решење:

$$\frac{x^3+2x^2+3x-x^3-x^2-x+a(x^2+2x+3)}{(x^2+x+1)(x^2+2x+3)}\geq 0$$

$$\frac{x^2(a+1)+2x(a+1)+3a}{(x^2+x+1)(x^2+2x+3)}\geq 0$$

Именилац је увек позитиван, што сада значи да нам све зависи од бројиоца. Бројилац је позитиван ако је

$$a+1>0 \qquad \text{и} \qquad 4a^2+8a+4-12a^2-12a\leq 0$$
$$a>-1 \qquad\qquad -8a^2-4a+4\leq 0$$
$$2a^2+a-1\geq 0$$

$$a \leq -1 \text{ или } a \geq \frac{1}{2}$$

Коначно решење је пресек ова два решења:

$$a \geq \frac{1}{2}$$

8. *Једначине вишег степена*

Почетком 16. века, Сципион дел Феро је успео да реши кубну једначину облика $ax^3 + bx = c$. Није објавио своје резултате, али их је рекао свом ученику Фиору. Фиор је изазвао италијанског математичара Тартаљу на такмичење. Путем математичких такмичења стицао се углед и престиж. Такмичари су постављали 30 проблема супарнику, а победник је онај који први реши све задатке који су му задати. Тартаља је противнику задао различите проблеме, док је Фиор њему свих тридесет проблема дао из области овог типа кубне једначине. Тартаља је успео да реши све проблеме за два сата, док Фиор није успео да реши ниједан. У време овог такмичења Тартаља је пронашао опште решење кубне једначине!
1540. Лодовико Ферари решава једначину четвртог степена. Као резултат тога математичари су вековима покушавали да нађу корене једначина степена већег од четири. Почетком 19. века, међутим, норвешки математичар Абел је доказао да нема алгебарске једначине која даје решење за општу једначину петог степена.

9. *Задаци за вежбу и додатни рад*

Задатак 9.1.

Рецимо да смо већ купили готову кору за торту кружног облика, али смо се предомислили и желимо да направимо правоугаону торту. Како да из круга исечемо правоугаоник, али тако да остане најмање вишка? Претпоставља се да је правоугаоник из једног комада, а вишкове користимо да направимо украсе, или ће мистериозно нестати током прављења торте.

Решење:

Задатак се своди на следеће: у дати круг уписати правоугаоник максималне површине.
Ако је д пречник круга, и a *једна страница правоугаоника, ми покушавамо да максимизујемо функцију* $a\sqrt{d^2 - a^2}$, *односно квадрирањем и увођењем смене* $t = a^2, t \geq 0, -t^2 + d^2 t$. *Када нацртамо график, видимо да се максимум достиже за* $t = \frac{d^2}{2}$, *тј. да је уписани правоугаоник највеће могуће површине заправо квадрат странице* $a = d\sqrt{2}$.

Задатак 9.2

Потребно је изградити паркинг простор за нову фирму. Цена квадратног метра асфалта кошта 5 евра, метар ограде кошта 2 евра, а фиксни трошкови обезбеђења током градње су 200 евра. Ако је директор тражио да паркинг буде квадратног облика, која је дужина ивице паркинга који треба направити, тако да се за изградњу потроши тачно 6000 евра. Да ли је то уопште могуће?

<u>*Решење*</u>*:*

Пошто је паркинг квадратног облика, то нам је занимљива само дужина странице тог паркинга. Тада ће за дату дужину странице паркинга x површина паркинга бити x^2, па можемо поставити једначину:

$$5x^2 + (2 \cdot 4)x + 200 = 6000$$
$$5x^2 + 8x - 5800 = 0$$

Решења ове једначине су $x_1 \approx -34.8$ и $x_2 \approx 33.2$
Како је прво решење негативно, а нама је потребна дужина неког физичког објекта, то њега одбацујемо, па је наше решење да је могуће изградити такав паркинг, ако му је дужина 33.2 метра.

Задатак 9.3

За које вредности параметра $m \in R$ једначина $(2m+1)x^2 - (2m+1)x + 2{,}5 = 0$ има реална и различита решења?

<u>*Решење*</u>:

Овде мора бити $D > 0$ *и* $a \neq 0$.

$$a = (2m+1) \Rightarrow 2m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = [-(2m+1)]^2 - 4 \cdot (2m+1) \cdot 2{,}5$$
$$D = (2m+1)^2 - 10 \cdot (2m+1)$$
$$D = 4m^2 + 4m + 1 - 20m - 10$$
$$D = 4m^2 - 16m - 9 > 0$$

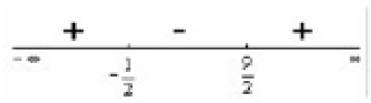
Решимо најпре $4m^2 - 16m - 9 = 0$*:*

$$m_{1,2} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}}{2 \cdot 4}$$

$$m_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 144}}{8} = \frac{16 \pm 20}{8}$$

$$m_1 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

$$m_2 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$



$D > 0 \Rightarrow$ *бирамо где је +*

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$$

Задатак 9.4

За које вредности параметра $k \in R$ једначина $kx^2 + (k+1)x + 2 = 0$ има двоструко решење?

<u>Решење</u>:

Овде нам треба да је $D = 0$ и наравно $a \neq 0$, јер ако је $a = 0$ једначина није квадратна.

$a = k \Rightarrow k \neq 0$

$D = b^2 - 4ac$
$D = (k+1)^2 - 4 \cdot k \cdot 2 = k^2 + 2k + 1 - 8k = k^2 - 6k + 1$
$D = k^2 - 6k + 1 = 0$

Сада решавамо ову квадратну једначину:

$$k_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$k_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$
$k_1 = 3 + 2\sqrt{2}$
$k_2 = 3 - 2\sqrt{2}$

Ово су решења за која једначина (почетна) има двоструко решење.

Задатак 9.5

Бициклиста је пошао из места А у место Б, где је требало да стигне у одређено време. Ако буде возио брзином од 35 км/ч закасниће два сата. Ако буде возио брзином од 50 км/ч стићи ће један сат раније. Одредити удаљеност између места А и Б.

<u>Решење</u>:

Нека је t време за које је бициклиста планирао да из места А стигне у место Б. На основу услова задатка, удаљеност s од места А до места Б је

$$s = 35(t+2) = 50(t-1)$$

Из добијене једначине следи да је

$$\begin{gathered} 35t + 70 = 50t - 50 \\ 15t = 120 \\ t = 8 \end{gathered}$$

Дакле, време пута је 8 часова. Сада лако налазимо удаљеност између А и Б:

$$s = 35 \cdot (8+2) = 350$$

Удаљеност између места А и Б је 350 км.

Задатак 9.6

На кружној стази дугој 1650м крећу се два мотоцикла различитим, али константним брзинама. Ако се крећу у супротним смеровима сусрешће се после једног минута; ако се крећу у истом смеру онда ће бржи сустићи споријег после 11 минута. Колика је брзина сваког од њих?

<u>Решење</u>:

Нека је брзина бржег мотоцикла v_1, а брзина споријег мотоцикла v_2. Како је минут шездесети део часа и како је после 11 минута први прешао један круг, тј. 1650м = 1,65км више од другог, из услова задатка се добијају једначине:

$v_1 \frac{1}{60} + v_2 \frac{1}{60} = 1{,}65$ *и* $v_1 \frac{11}{60} - v_2 \frac{11}{60} = 1{,}65$.

Сређивањем уочених једначина добија се

$$\begin{gathered} v_1 + v_2 = 99 \\ v_1 - v_2 = 9 \end{gathered}$$

Решавањем овог система добија се да је

$$v_1 = 54\ km/h$$
$$v_2 = 45\ km/h$$

Задатак 9.7

Градови А и Б се налазе на обали реке и удаљени су 10 км један од другог. Река не прави кривине у делу између градова, већ само иде право од А до Б. Градови Ц и Д су удаљени 20 км праволинијски, али преко језера. Да ли би се чамцем брже стигло из А у Б и назад или из Ц у Д?

Решење:

Нека је x *брзина чамца, а* y *брзина реке (у км/ч). Време за које је потребно доћи из А у Б низ реку је* $10/(x+y)$ *часова, а уз реку опет се враћајући у А* $10/(x-y)$ *часова. Све укупо, то је* $10/(x+y) + 10/(x-y) = 20x/(x^2-y^2)$ *часова.*
Како је језеро мирно, време потребно да се дође од Ц до Д је $20/x$ *часова.*
Поредимо $20x/(x^2-y^2)$ *и* $20/x$.
Јасно је да је брже кретати се реком, јер је
$20x/(x^2-y^2) > 20/x \Leftrightarrow 20x^2 > 20(x^2 - y^2) \Leftrightarrow 0 > -20y^2$
(река никад не мирује).

Задатке и концепт часа припремили и предавање одржали:

Мина	Бадовинац	055/2011
Аида	Золић	014/2011
Јелена	Кандић	103/2011
Милица	Милетић	139/2011
Јелена	Пајић	285/2011
Бисерка	Пејчић	053/2011
Божидар	Радивојевић	011/2011
Ана	Симијоновић	042/2011
Милан	Стефановић	009/2011
Димитрије	Цицмиловић	023/2011
Марјана	Шолајић	072/2011

Београд, 24.10.2014.

Iracionalne jednačina i nejednačine

November 18, 2014

1 Iracionalne jednačine

Iracionalnim jednačinama nazivamo one jednačine u kojima se neke od promenljiva pojavljuju kao potkorene veličine.Da bi rešili iracionalnu jednačinu, potrebno je da se oslobodimo korena i pretvorimo jednačinu u jednačinu sa polinomom.Kada to uradimo,dalje je možemo rešavati metodama koje već poznajemo. Iracionalne jednačine su date oblikom

$$\sqrt{a(x)} = b(x)$$

koji je ekvivalentan sistemu

$$a(x) = b^2(x) \wedge b(x) \geq 0$$

Uobičajen način rešavanja iracionalne jednčine je da izolujemo najkomplikovaniji koren na jednoj strani jednačine i dignemo celu jednačinu na stepen koji eliminiše koren. Ako u jednačini ostane neki koren posle uproščavanja, možemo ponavljati ovaj postupak sve dok se ne izgube svi koreni. Kada prevedemo jednačinu u jednačinu sa polinomom, možemo je rešiti postupcima koje već poznajemo. Moramo biti pažljivi kada koristimo ovaj postupak, jer kada god stepenujemo jednačinu, možemo dodati lažna rešenja koja u stvari nisu rešenja originalne jednačine. Da bi bili sigurni da smo dobili tačna rešenja, uvek ih moramo proveriti zamenjujući ih u originalnu jednačinu.

2 Zadaci

2.1 Primer1

$$\sqrt{6 - x - x^2} = x + 1$$

$$\Leftrightarrow$$
$$6 - x - x^2 = (x+1)^2, x+1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$6 - x - x^2 = x^2 + 2x + 1, x \geq -1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{4}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x_{1,2} = \frac{-3+7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-5}{2} \wedge x_2 = 1$$

Zamenom dobijenih vrednosti u polaznu jednačinu proveravamo da li su zaista rešenja i vidimo da je to samo $x_2 = 1$ a da $x_1 = \frac{-5}{2}$ odbacujemo.

2.2 Primer2

$$\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$2x - 4 \geq 0 \wedge x + 5 \geq 0 \sqrt{2x-4} = 1 + \sqrt{x+5} S$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x \geq 2 \wedge x \geq -52x - 4 = 1 + 2\sqrt{x+5} * x + 5$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x \geq 22x - 4 - x - 5 - 1 = 2\sqrt{x+5}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x \geq 2x - 10 = 2\sqrt{x+5}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x \geq 2 \wedge x - 10 \geq 0 (x-10)^2 = 4(x+5)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x \geq 2 \wedge x \geq 10 x^2 - 24x + 80 = 0 \Rightarrow x_1 = 20 \vee x_2 = 4$$

Ali kad pogledamo uslov $x \geq 10$ vidimo da je rešenje samo x_1.

2.3 Primer3

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$$
$$x+1+3\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{3x*1}+3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+3x+1=x-1$$
$$3(\sqrt[3]{(x+1)^2(3x+1)}+\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)^2})=-3x-3$$
$$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}(\sqrt[3]{x+1})+\sqrt[3]{3x+1})=-x-1$$
$$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}(\sqrt[3]{x-1})=-x-1$$
$$(x+1)(3x+1)(x-1)=(-x-1)^3$$
$$(x+1)(3x+1)(x-1)+(-x-1)^3=0$$
$$(x+1)((3x+1)(x-1)+(-x-1)^2)=0$$
$$(x+1)(3x^2-3x+x-1+x^2+2x+1)=0$$
$$(x+1)4x^2=0x=-1\vee x=0$$

Kako ovde izmedju svake dve jednačine nije mogao da stoji znak ekvivalencije,moraćemo oba rešenja da proverimo zamenom i odatle dobijamo da je $x=-1$ jedino rešenje.

2.4 Primer4

$$\sqrt{x^2-2x-1+\sqrt{x+1}}=x-1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x-1\geq 0\wedge x^2-2x-1+\sqrt{x+1}=(x-1)^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x\geq 1\wedge x^2-2x-1+\sqrt{x+1}=x^2-2x+1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x\geq 1\wedge\sqrt{x+1}=2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x\geq 1\wedge x+1=4$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x\geq 1\wedge x=3$$

$x=3$jeste rešenje.

2.5 Primer5

$$\frac{x-\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=6$$

Uvodimo smenu $t=\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}=t^2, x=t^3$

$$\frac{t^3*t-1}{t^2-1}-\frac{t^2-1}{t-1}=6$$

$$\frac{t^4-1}{t^2-1}-\frac{t^2-1}{t-1}=6$$

$$\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^2-1}-\frac{(t-1)(t+1)}{t-1}=6, t\neq\pm1$$

$$t^2+1-t-1=6$$

$$t^2-t-6=0$$

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}, t_1=3t_2=-2$$

$$t=\sqrt[3]{x}$$

$$t=3\Rightarrow\sqrt[3]{x}=3\Rightarrow x=27$$

$$t=2\Rightarrow x=-8$$

3 Najčešče greške u ovoj oblasti

3.1 Primer1

$$\sqrt{x}=-3$$

Nakon kvadriranja obe strane dobijamo $(\sqrt{x})^2=(-3)^2$,iz čega dobijamo $x=9$ što nije rešenje početne jednačine. ako malo bolje pogledamo,ona je od početka bila pogrešno zadata:kako potkorena veličina kvadratnog korena ne može biti negativna vrednost,funkcija sa desne strane je morala da bude nenegativna. Dakle ova jednačina nema rešenje.

3.2 Primer2

$$4\sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}$$

U ovakvim primerima bitno je da pri kvadriranju obe strane ne zaboravimo da kvadriramo i četvorku koja se nalazi uz prvi koren.

$$(4\sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{x+1})^2$$

$$16(x-1) = (x+1)$$

$$15x = 17$$

odakle za x dobijamo da je jednako$\frac{17}{15}$,što upravo jeste rešenje.

3.3 Primer3

$$\sqrt[4]{2-x} = \sqrt[4]{x-4}$$

Evo jednog primera u kom umesto kvardatnih imamo četvrte korene.Ovakve jednačine se rešavaju na isti način kao i kvadratne,jedina razlika je u tome što umesto kvadriranja obe strane sada ćemo ih stepenovati četvrtim stepenom.

$$(\sqrt[4]{2-x})^2 = (\sqrt[4]{x-4})^2$$

$$2-x = x-4$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Ali kada zamenimo 3 u polaznu jednačinu vidimo da dobijamo negativnu vrednost ispod korana što znaǐ da ova jednačina nema rešenja.

3.4 Napomena

Do svih ovih grešaka ne bi ni došlo da smo na pocetku svakog zadatka preoverili oblast definisanosti i uslove koje promenljive moraju da ispunjavaju.Medjutim,nekada je naći oblast definisanosti komplikovanije nego uraditi sam zadataka,pa je u takvim situacijama jednostavnije odmah rešiti zadatak a onda vraćanjem dobijenih vrednosti u početnu jednačinu proveriti da li zaista jesu rešenja.

4 Iracionalne nejednačine

Iracionalne nejednačine rešavamo koristeči sledeća pravila:

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq (\sqrt{B(x)})^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} \geq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \leq 0 \end{cases}$$

5 Zadaci

5.1 Primer1

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 < (x-3)^2 \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

Rešavamo sve tri nejednačine i zatim tražimo presek dobijenih rešenja.
Rešenje prve nejednačine je

$$x < 5$$

Druga nejednačina je kvadratna, pa dobijamo da su njeni koreni

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

Odnosno $x_1 = 4, x_2 = 1$
Pa je nejednačina tačna za

$$x \in [-\infty, 1] \cup [4, +\infty]$$

Rešenje polazne nejednačine je

$$x \in [4, 5)$$

5.2 Primer2

$$\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 < (sqrt8 - x)^2 \\ x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x > 8 \end{cases}$$

Prva nejednačina:

$$x^2 - 3x - 10 < 64 - 16 + x^2$$
$$13x < 74$$
$$x < \frac{74}{13}$$

Druga nejednačina:

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$$
$$x_1 = 5, x_2 = -2$$
$$x \in (-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$$

Rešenje početne nejednačine je

$$x \in (-\infty, -2] \cup [5, \frac{74}{13})$$

5.3 Primer3

$$\sqrt{3x^2 - 5x - 3} > \sqrt{2x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 3 > 2x + 3 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases}$$

Prva nejednačina:

$$3x^2 - 7x - 6 > 0$$
$$x_1 = 3, x_2 = -\frac{2}{3}$$
$$x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [3, +\infty)$$

Iz druge nejednačine dobijamo

$$x \in (-\frac{3}{2}, +\infty)$$

Sledi da je konačno rešenje

$$x \in (-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}) \cup [3, +\infty)$$

5.4 Primer4

$$\sqrt{\frac{x^2-16}{x-1}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-1} \leq \frac{9}{4} \\ \frac{x^2-16}{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

Prva nejednačina:

$$\frac{x^2-16}{x-1} - \frac{9}{4} \leq 0$$
$$\frac{4(x^2-16)-9(x-1)}{4(x-1)} \leq 0$$
$$\frac{4x^2-9x-55}{4x-4} \leq 0$$

Nadjemo nule polinoma u broiocu i imeniocu.

Za broilac:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+880}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 31}{8}$$
$$x_1 = 5, x_2 = \frac{22}{8}$$

Za imenilac:

$$x = 1$$

	$(-\infty,1)$	$(1,\frac{22}{8})$	$(\frac{22}{8},5)$	$(5,\infty)$
$4x^2-9x-55$	+	+	-	+
$4x-4$	-	+	+	+
količnik	-	+	-	+

Rešenje prve nejednačine je:

$$x \in (-\infty,1) \cup (\frac{22}{8},5]$$

Druga nejednačina:

$$\frac{(x-4)(x+4)}{x-1} \geq 0$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,1)$	$(1,4)$	$(4,\infty)$
$x-4$	-	-	-	+
$x+4$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
količnik	-	+	-	+

Rešenje druge nejednačine je:

$$x \in [-4,1) \cup [4,+\infty)$$

Rešenje početne nejednačine je:

$$x \in (-4,1) \cup [4,5]$$

5.5 Primer5

$$\sqrt{x^2} > x-9 \Leftrightarrow \begin{cases} x-9<0 \\ x^2-9 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-9 \geq 0 \\ x^2-9 > (x-9)^2 \end{cases}$$

Prvi sistem:

$$x < 9 \wedge$$

$$x \in (-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$$

Drugi sistem:

$$\begin{aligned} x &\geq 9 \wedge \\ x^2-9 &> x^2-18x+81 \\ x &> 5 \\ &\Rightarrow x \in [9,\infty) \end{aligned}$$

Rešenje početne nejednačine je unija rešenja ova dva sistema:

$$x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

5.6 Primer6

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} x+6 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \\ x+6 > x+1+2\sqrt{(x+1)(2x-3)}+2x-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ x \geq -1 \\ x \geq \frac{5}{2} \\ 2\sqrt{(x+1)(2x-3)} < -2x+10 \end{cases}$$

Iz prve tri nejednačine dobijamo rešenje:

$$x \geq \frac{5}{2}$$

Rešavamo četvrtu nejednačinu:

$$\sqrt{(x+1)(2x-3)} < 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x > 0 \\ (x+1)(2x-3) geq 0 \\ (x+1)(2x-3) < (5-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &< 5 \\ 2x^2-3x-5 \geq 0 &\Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [\frac{5}{2}, +\infty) \\ x^2+7x-30 < 0 &\Rightarrow x \in (-10, 3) \end{aligned}$$

Rešenje početne nejednačine je:

$$x \in [\frac{5}{2}, 3)$$

5.7 Primer7

$$\frac{\sqrt{2-x^4}}{x} < 1$$

Prvi slučaj $x > 0$ Nakon množenja sa x znak ostaje nepromenjen.

$$\sqrt{2-x^4} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2-x^4 \geq 0 \\ 2-x^4 < x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4 \leq 2 \\ x^4 + x^2 - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \in [-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}] \\ x^4 + x^2 - 2 > 0 \end{cases}$$

Rešavamo treću nejednačinu uvodjenjem smene.

$$\begin{aligned} t = x^2, t \geq 0 \\ t^2 + t - 2 > 0 \\ t_1 = 1, t_2 = -2 \\ t \in (1, +\infty) \\ t = x^2 \Rightarrow x^2 > 1 \\ \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

Rešenje početne nejednačine je:

$$x \in (1, \sqrt[4]{2}]$$

Drugi slucaj:

$$x < 0$$

Nakon množenja sa x menja se znak.

$$\sqrt{2-x^4} > x$$

Na osnovu pravila data nejednačina je ekvavilentna sa dva sistema nejednačina. Prvi sistem: $x \geq 0, ...$ odbačujemo jer je kontradikcija sa uslovom $x < 0$. Drugi sistem:

$$x < 0$$

$$2 - x^4 \geq 0 \Rightarrow x \in [-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}]$$

Rešenje sistema:

$$x \in [\sqrt[4]{2}, 0)$$

5.8 Primer7

$$\frac{9x^2 - 4}{\sqrt{5x^2 - 1}} \leq 3x + 2$$

Domen:

$$5x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > \frac{1}{5} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{\sqrt{5}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{5}}{5}, +\infty)$$

$$\frac{9x^2 - 4}{\sqrt{5x^2 - 1}} - (3x + 2) \leq 0 / \sqrt{5x^2 - 1}$$
$$(3x + 2)(3x - 2 - \sqrt{5x^2 - 1}) \leq 0$$

Nejednačina je ≤ 0 u sledećim slučajevima:
Prvi slučaj:

$$\begin{cases} 3x + 2 \geq 0 \\ 3x - 2 - \sqrt{5x^2 - 1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ \sqrt{5x^2 - 1} \geq 3x - 2 \end{cases}$$

Drugi slučaj:

$$\begin{cases} 3x + 2 \leq 0 \\ 3x - 2 - \sqrt{5x^2 - 1} \\ geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \\ \sqrt{5x^2 - 1} \leq 3x - 2 \end{cases}$$

Rešavamo nejednačinu

$$\sqrt{5x^2 - 1} \geq 3x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 1 \geq 0 \\ 3x - 2 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 5x^2 - 1 \geq 0 \\ 3x - 2 \geq 0 \\ 5x^2 - 1 \geq (3x - 2)^2 \end{cases}$$

Prvi sistem daje rešenje:

$$x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{5}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{3})$$

Drugi sistem:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{5}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{5}, \infty) \\ x \geq \frac{2}{3} \\ 4x^2 - 12x + 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{5}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{5}, \infty) \\ x \geq \frac{2}{3} \\ 4(x - \frac{5}{2})(x - \frac{1}{2}) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{5}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5}{2}]$$

Nakon rešavanja nejednačine

$$\sqrt{5x^2 - 1} \leq 3x - 2$$

dobijamo resenje

$$x \in [\frac{5}{2}, +\infty)$$

Vratimo se sistemima koji su ekvivalentni pocentoj nejednačini:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ \sqrt{5x^2 - 1} \geq 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{5}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{5}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5}{2}]$$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \\ \sqrt{5x^2 - 1} \leq 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \\ x \in [\frac{5}{2}, \infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Unijom ova dva rešenja dobijamo samo:

$$x \in [-\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{5}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5}{2}]$$

.

Nakon sto uzmemo u obzir i domen, dobijamo konacno rešenje:

$$x \in [-\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5}{2}]$$

6 Nejcešće greške u ovoj oblasti

Učenicima jedne srednje čkole ponudjen je sledeći test:

$$\sqrt{x} \leq 6 - x \tag{1}$$
$$\sqrt{x-1} \geq 1 - x \tag{2}$$
$$\sqrt{x} \leq 1 \tag{3}$$
$$\sqrt{x} \geq 0 \tag{4}$$
$$\sqrt{x} \leq -1 \tag{5}$$
$$\sqrt{-x} \geq \tag{6}$$

Ispostavlja se da su učenici više grešili na cetvrtom, petom i şestom primeru gde upotreba pravila nije neophodna i ăk može i zbuniti učenika. Greške koje su se najčešće javljale su sledeće:

$$\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow \forall x \in R$$
$$\sqrt{x} \leq -1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$
$$\sqrt{-x} \geq 0 \Rightarrow \emptyset$$
$$\sqrt{-x} \geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$$

Primećeno je da učenici najčešće prave greške jer zaboravljaju na domen funkcije, tj. činjenicu da potkorena funkcija mora biti ≥ 0.