Hiperbola

Definicija

Hiperbola je skup tačaka u ravni sa osobinom da je razlika rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka stalan broj.

.Stalne tačke F1(-c, 0), F2(c, 0) su žiže hiperbole, njihovo rastojanje $F_1F_2 = 2c$ (a<c).

Prava koja sadrži tačke F1 i F2 naziva se realna osa hiperbole, dok je njena imaginarna osa normalna na realnoj osi u tački koja je središte duži A_1A_2, gde su A_1 i A_2 temena hiperbole.

Parametri a i b predstavljaju dužine realne, odnosno imaginarne poluose hiperbole.

Broj c = $\sqrt{a^2 + b^2}$ (c>a) je linearni ekscentricitet hiperbole.

Broj e = $\frac{c}{a}$ je numerički ekscentricitet.

Postoje dve važne osobine fokusa hiperbole F_1 i F_2:

1. Za svaku tačku hiperbole P važi:
$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a, a \in R$
Ovo svojstvo omogućava i pomenutu definiciju.

2. Tangenta na svaku tačku hiperbole P predstavlja bisektrisu ugla $<F_1PF_2$.

Iz definicije hiperbole možemo lako doći do jednačine koja je opisuje. Neka je P(x, y) proizvoljna tačka hiperbole.

$|F_1P| - |F_2P| = 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$

$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2((x-c)^2 + y^2))$

$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$

$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Kako znamo da je $c^2 - a^2 = b^2$, dalje dobijamo:

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, odnosno $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Jednačina hiperbole:

Jednačina $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ili $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ predstavlja centralnu jednačinu hiperbole.

Jednačina asimptote hiperbole:

Prave $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ su asimptote hiperbole.

Hiperbola i prava

Uslov da prava dodiruje hiperbolu:

Prava $y= kx + n$ dodiruje hiperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ako je $a^2k^2 - b^2 = n^2$.

To možemo lako pokazati:

H: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

p: $y = kx+n$

$b^2x^2 - a^2(kx+n)^2= a^2b^2$

$b^2x^2 - a^2k^2x^2- 2a^2kxn - a^2n^2 = a^2b^2$

$x^2(b^2 - a^2k^2) - 2a^2knx - a^2n^2 - a^2b^2 = 0$

Diskriminantu kvadratne jednačine računamo po formuli: $D = b^2 - 4ac$

$D = 4a^4k^2n^2 + 4(b^2 - a^2k^2)(a^2n^2 + a^2b^2) = 4(a^4k^2n^2 + b^2a^2n^2 + b^4a^2 - a^4k^2n^2 - a^4k^2b^2) = 4a^2b^2(n^2+ b^2 - a^2k^2)$

1) $n^2+ b^2 - a^2k^2 < 0 \Rightarrow p \cap H = \emptyset$
2) $n^2+ b^2 - a^2k^2 > 0 \Rightarrow p \cap H = \{A, B\}$, gde su A i B tacke preseka prave p i hiperbole H.
3) $n^2+ b^2 - a^2k^2 = 0 \Rightarrow p \cap H = \{C\}$, gde je C tačka dodira hiperbole H i prave p.

Na osnovu razmatrane diskriminante, dobijamo formulu za uslov dodira prave i hiperbole:

$\mathbf{a^2k^2 - b^2 = n^2}$.

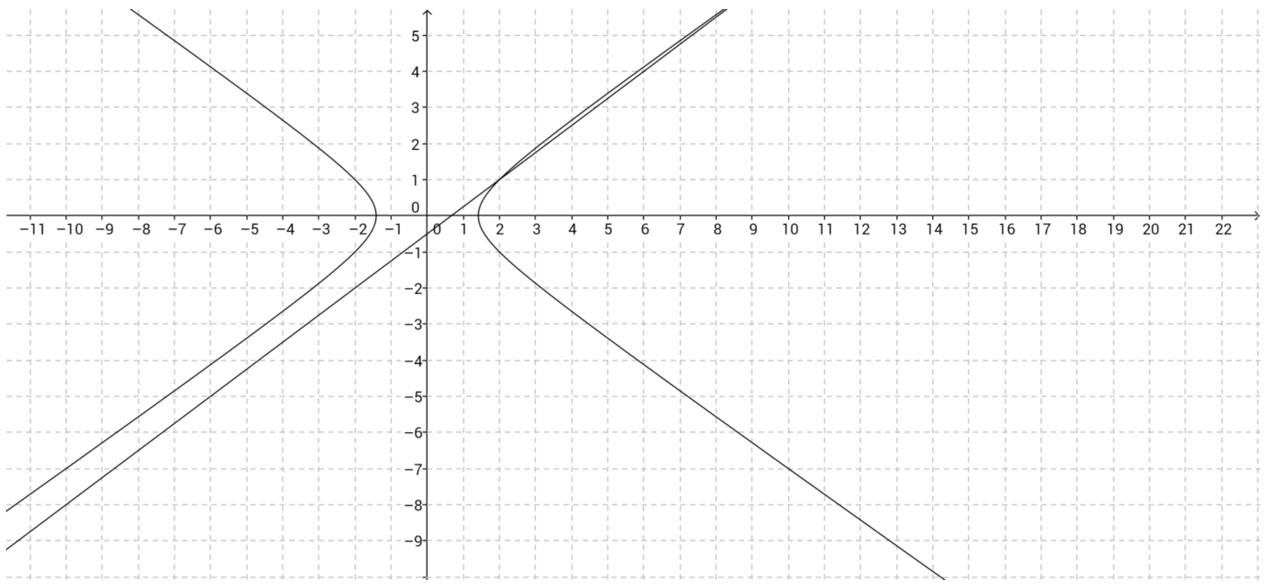
Jednačina tangente na hiperbolu u tački M(x1, y1):

$$\frac{xx1}{a^2} - \frac{yy1}{b^2} = 1$$

<u>Zadaci:</u>

1. Naći dužinu tetive koju hiperbola $x^2 - 2y^2 = 2$ odseca na pravoj $3x - 4y = 2$.

Rešenje:



$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 2, b^2 = 1$

Presečne tačke prave i hiperbole dobijamo rešavanjem sistema:

$x^2 - 2y^2 = 2$

$3x - 4y = 2$

Iz jednačine prave izražavamo x preko y:

$x = \frac{4y+2}{3}$

Zamenom u jednačini hiperbole dobijamo:

$(\frac{4y+2}{3})^2 - 2y^2 = 2$

$16y^2 + 16y + 4 - 18y^2 = 18$

$2y^2 - 16y + 14 = 0$

$y^2 - 8y + 7 = 0$

$y1 = 1$

$y2 = 7$,

Odakle dobijamo tačke preseka:

A(2, 1) i B(10, 7).

Dužina tražene tetive je odredjena tačkama A i B:

$|AB| = \sqrt{(10-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{100} = 10.$

2. Izračunati odstojanje žiža hiperbole $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = -1$ od njenih asimptota.

Rešenje

Za rešavanje zadatka, potrebno nam je da izračunamo linearni ekscentricitet hiperbole, kako bismo odredili koordinate žiža:

$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

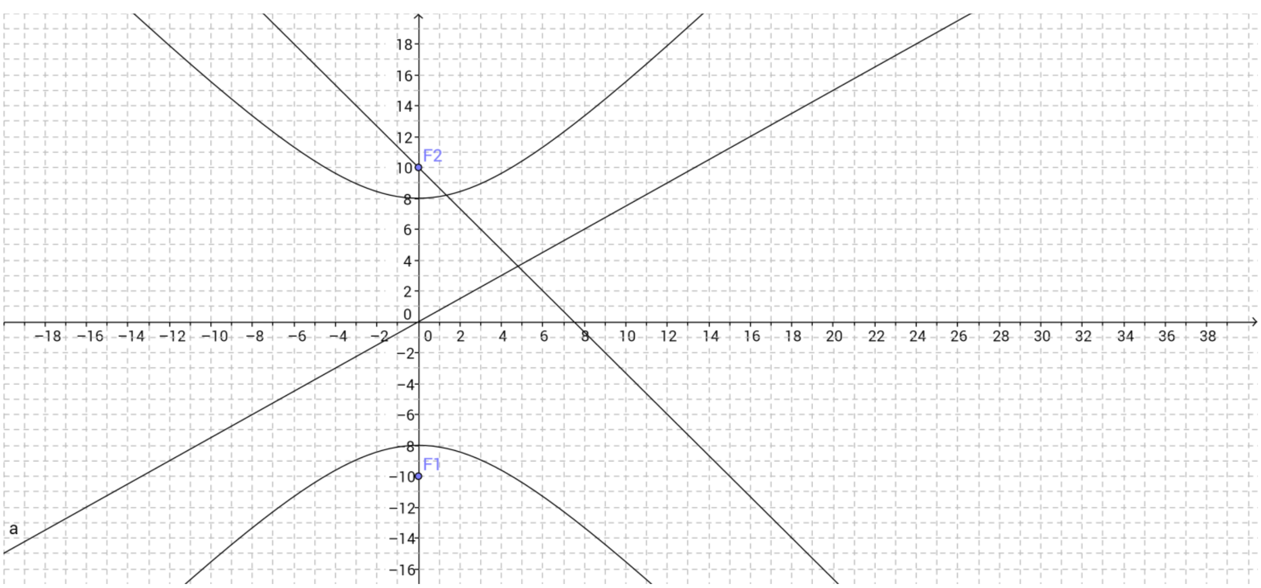
Dakle koordinate žiža hiperbole su:

$F_1(0, -10)$ i $F_2(0, 10)$

Jednačina asimptote:

$y = \pm\frac{6}{8}x$

Pošto je udaljenost bilo koje od žiža od neke od asimptota jednaka, naći ćemo na primer udaljenost žiže koja pripada pozitivnom delu x - ose od asimptote sa pozitivnim koeficijentom pravca:



Jednačina asimptote u implicitnom obliku:

$6x - 8y = 0$

Zamenom poznatih vrednosti u formulu za računanje rastojanja:

$d = \frac{|Axo+Byo+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

dobijamo:

$d = \frac{|6*0-8*10|}{\sqrt{36+64}} = 8$

Rastojanje žiža hiperbole od njenih asimptota je 8.

3. Naći jednačinu hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ako su njene asimptote $y = \pm\frac{1}{2}x$ i ako je jedna njena tangenta $5x - 6y - 8 = 0$.

Rešenje:

Kako je jednačina asimptota data formulom: $y = \pm\frac{b}{a}x$, možemo odrediti odnos velike i male poluose:

$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b$

Jednačina tangente mora da zadovoljava uslov dodira:

Zapisana u eksplicitnom obliku: $y = \frac{5}{6}x - \frac{8}{6} \Rightarrow k = \frac{5}{6}$, $n = \frac{8}{6}$

Zamenom u formuli za uslov dodira,

$a^2k^2 - b^2 = n^2$

$a^2\frac{25}{36} - b^2 = \frac{64}{36}$

$4b^2\frac{25}{36} - b^2 = \frac{64}{36}$

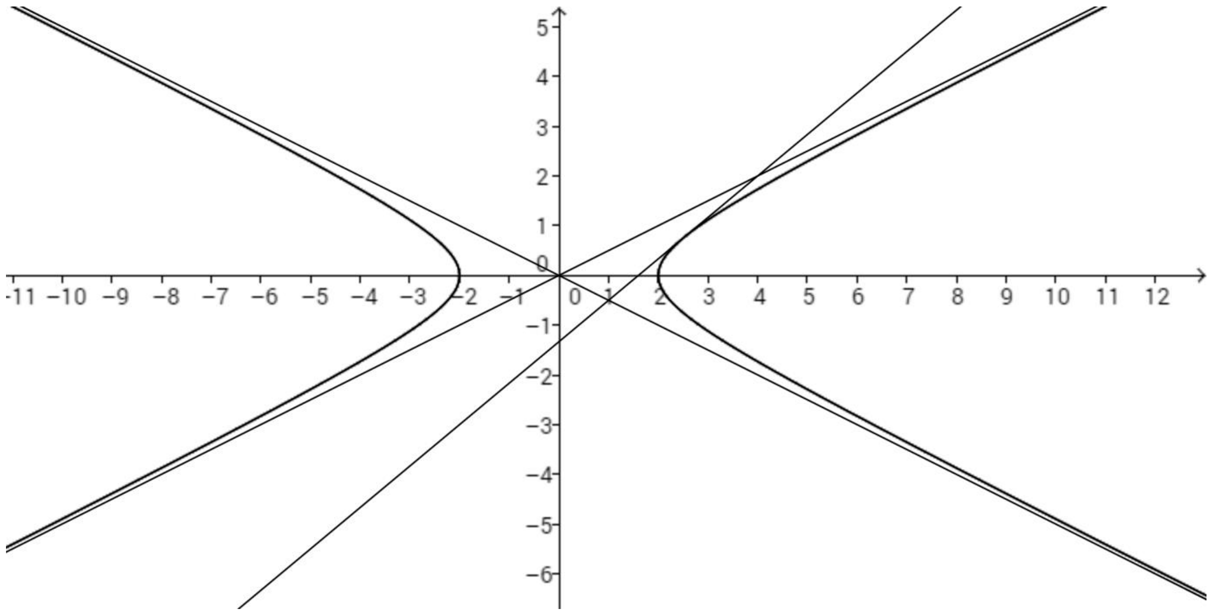
$\frac{16}{9}b^2 = \frac{64}{36}$

$b^2 = 1$

$a^2 = 4$

Tražena jednačina hiperbole je:

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$



4. Odrediti jednačinu kruga čije je središte na x- osi i koji seče hiperbolu $3x^2 - 4y^2 = 12$ pod pravim uglom u tački M(4, -3).

Rešenje:
Koordinate centra traženog kruga: C(c, 0), gde je c nepoznata konstanta.
Jednačina tangente na hiperbolu u tački M(4, -3):
$y = kx + n \Rightarrow n = -3 - 4k$

Na osnovu uslova dodira i jednačine hiperbole znamo odnos izmedju k i n:

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow a^2 = 4,\ b^2 = 3$
$a^2k^2 - b^2 = n^2$
$4k^2 - 3 = n^2$
$4k^2 - 3 = (3 + 4k)^2$
$4k^2 - 3 = 9 + 24k + 16k^2$
$(k+1)^2 = 0$
$k = -1$
$n = 1$
Jednačina tangente na hiperbolu u tacki M, u eksplicitnom obliku:
$y = -x + 1$

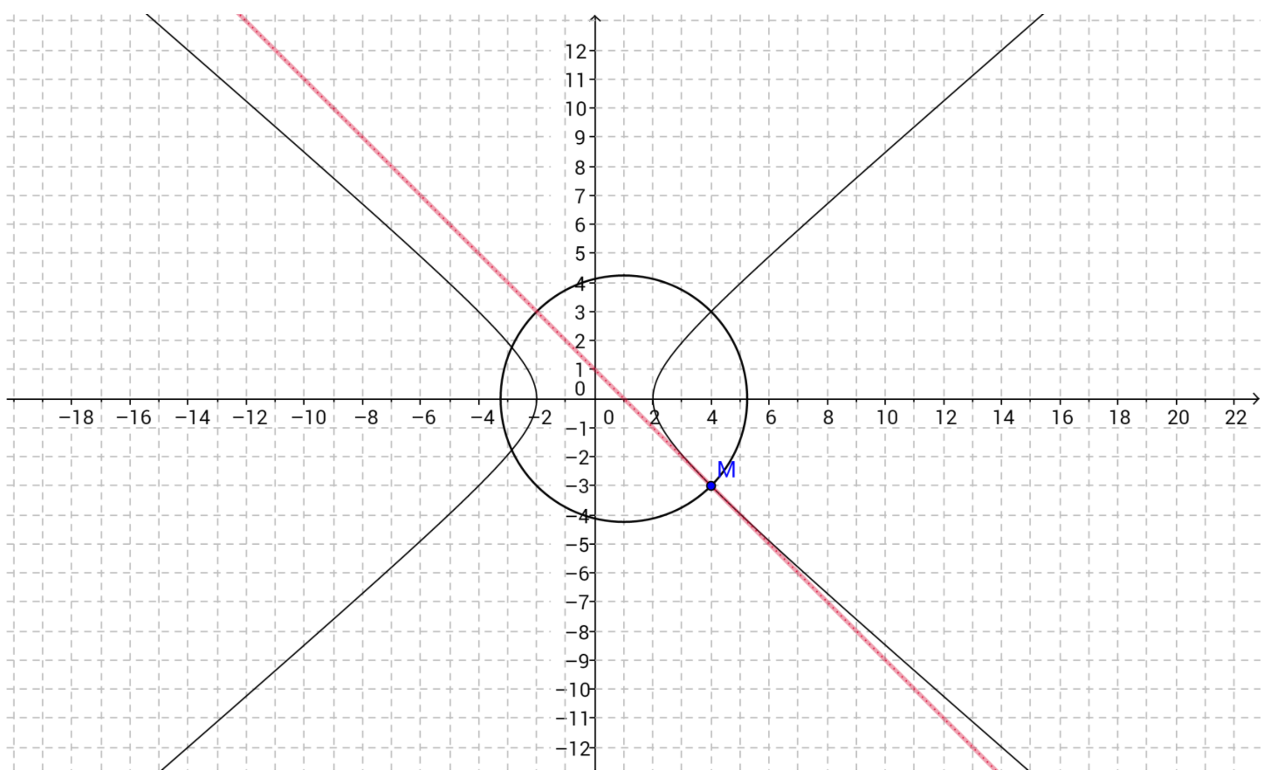
Dalje, tražimo tangentu na krug u tački M(4, -3)

Kako je koeficijent pravca tangente na hiperbolu k=-1, znajući da je ugao izmedju tangenti prav, zakljucujemo da je koeficijent pravca tangente na krug k' = 1 (iz jednakosti kk' = -1).

Iskoristićemo poznatu jednačinu tangente na krug:
Ako je M(x1, y1) neka tačka kruga $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, jednačina tangente kruga u toj tački glasi:
$(x - a)(x1 - a) + (y - b)(y1 - b) = r^2$

Zamenom poznatih veličina i koordinate centra kruga u jednačinu dobijamo:
$(x - c)(4 - c) - 3y = r^2$
$4x - xc - 4c + c^2 - 3y = r^2$
$y = \frac{(4-c)}{3}x + \frac{1}{3}(c^2 - 4c - r^2)$
$k' = \frac{4-c}{3} = 1$
$c = 1$
$C(1, 0)$
$r = SM = \sqrt{(1-4)^2 + 3^2} = \sqrt{18}$

Jednačina traženog kruga je:
$(x - 1)^2 + y^2 = 18$



5. Naći jednačine tangenti hiperbole $x^2 - 12y^2 = 12$ koje sa x-osom obrazuju uglove $\pm\frac{\pi}{6}$.

Rešenje

$\frac{x^2}{12}$ - y^2 = 1

Koeficijent pravca tangenti računamo kao tangens ugla koji obrazuju sa x - osom:

$k_1 = \text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$k_2 = \text{tg}(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Jednačina tangente y = kx + n mora da zadovoljava uslov dodira:

$a^2k^2 - b^2 = n^2$

$n^2 = 3$, odnosno $n = \pm\sqrt{3}$

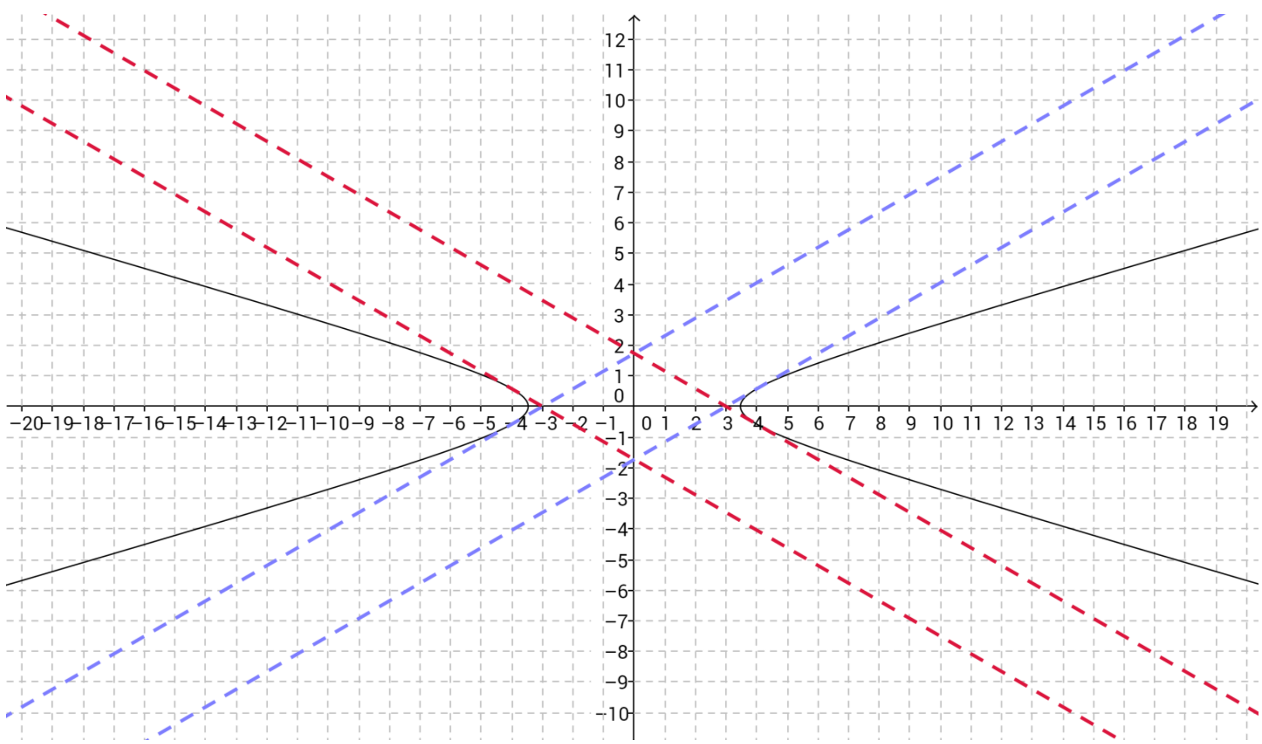
Dobili smo 4 jednačine tangenti, od kojih prve dve grade ugao $\frac{\pi}{6}$, a druge dve ugao $-\frac{\pi}{6}$ sa x-osom:

$\sqrt{3}y - x + 3 = 0$,

$\sqrt{3}y - x - 3 = 0$,

$\sqrt{3}y + x + 3 = 0$,

$\sqrt{3}y + x - 3 = 0$.



Parabola

***Definicija**: Parabola je skup tačaka u ravni sa osobinom da je rastojanje svake tačke od jedne stalne tačke jednako odstojanju te tačke od jedne stalne prave.*

Stalna tačka $F(\frac{p}{2},0)$ *je žiža parabole, a stalna prava čija je jednačina* $x+\frac{p}{2}=0$ *je direktrisa parabole.*

Odstojanje tačke F *od direktrise obeležava se sa* p *i naziva se parametar parabole; koordinatni početak je teme parabole.*

Jednačina parabole

Jednačina $y^2=2px$ *predstavlja konačni oblik jednačine parabole, koja pripada desnoj polupravi, ima teme u koordinatnom početku, a osa joj se poklapa sa osom* Ox.

***Uslov da prava dodiruje parabolu**.*

Prava $y=kx+n$ *dodiruje parabolu* $y^2=2px$ *ako je* $p=2kn$.

Pored ove parabole „postoji" još vrsta parabola sa jednačinama $y^2=-2px,\ x^2=2py,\ x^2=-2py$.

ZADACI

1. Odrediti jednačinu parabole $y^2=2px$ koja sadrži tačku $M(2,-4)$.

Rešenje:

$$(-4)^2=2p*2\ \Rightarrow p=\frac{16}{4}=4$$

Dakle, jednačina parabole je $y^2=8x$.

2. Sečica parabole $y^2 = 8x$ sadrži žižu i tačku čija je apcisa 4,5, a ordinata pozitivna. Napisati jednačinu sečice.

Rešenje:

Sečica je prava koja seče krivu drugog peda, dakle ima 2 zajedničke tačke sa tom krivom.

$$2p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{p}{2} = 2$$

Žiža ove papabole je dakle tačka $F(2,0)$.

Drugu koordinatu tačke M naći ćemo pomoću jednačine papabole:

$${y_M}^2 = 8 * 4{,}5 = 36 \Rightarrow y_M = 6$$

jep nam je rečeno da je ordinata pozitivna.

Jednačina sečice:

$$y - y_M = \frac{y_M - y_F}{x_M - x_F}(x - x_M)$$

$$y - 6 = \frac{6 - 0}{4{,}5 - 2}(x - 2)$$

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{24}{5}$$

3. Napisati jednačinu kružnice čiji je centap u žiži papabole $y^2 = 2px$ i dodiruje njenu direktrisu.

Rešenje:

Žiža parabole je tačka $F(\frac{p}{2}, 0)$, a direktrisa prava $x + \frac{p}{2} = 0$, dakle tačka ove prave koja leži na x-osi je $M(\frac{p}{2}, 0)$. Rastojanje između ove dve tačke iznosi p , što je upravo poluprečnik tražene kružnice i sada imamo sve što je potrebno za njegovu jednačinu:

$$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = p^2$$

4. Data je parabola $y^2 = -4x$. Odrediti jednačinu tetive parabole, kojoj je tačka

$M(-2, -1)$ središte.

Rešenje:

Neka je AB tražena tetiva. Tačka $M(-2, -1)$ je središte te duži, pa imamo da važi:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = -2 \Rightarrow x_A + x_B = -4$$

$$\frac{y_A + y_B}{2} = -1 \Rightarrow y_A + y_B = -2$$

Ove dve tačke pripadaju i paraboli, pa zamenom njihovih koordinata u jednačinu parabole dobijamo:

$${y_\mathrm{A}}^2 = -4x_A$$

$${y_B}^2 = -4x_B$$

Na ovaj način smo dobili 4 jednačine sa 4 nepoznate i njihovim rešavanjem dobijamo sledeće vrednosti:

$$x_A = -\frac{4 + \sqrt{7}}{2}$$

$$x_B = -\frac{4 - \sqrt{7}}{2}$$

$$y_A = -1 - \sqrt{7}$$

$$y_{AB} = -1 + \sqrt{7}$$

Ostaje još da dobijemo jednačinu tetive, pomoću formule:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

Zamenom vrednosti i sređivanjem dobijamo:

$$y = 2x + 3$$

5. Iz tačke $M(-2,-2)$ konstruisane su tangente na parabolu $y^2 = 16x$. Odrediti jednačine tih tangenti.

Rešenje:

$$2p = 16 \ \Rightarrow p = 8$$

t: $y = kx + n$, $M(2,2)$ ϵ t ⇒ $-2 = -2k + n \Rightarrow n = 2k - 2$

Takođe mora da važi $p = 2kn$, tj. $8 = 2kn$

Daljim rešavanjem ove dve jednačine sa 2 nepoznate dobijamo sledeća rešenja, tj. imaćemo 2 tangente:

$$k_1 = -1,\ n_1 = -4$$

$$k_2 = 2,\ n_2 = 2$$

Tražene tangente su:

$$t_1 : y = -x - 4$$

$$t_2 : y = 2x + 2$$

6. Napisati jednačine zajedničkih tangenti krivih $y^2 = 4x$ i $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$.

Rešenje:

Najpre ćemo drugu jednačinu napisati u opštem obliku jednačine kružnice:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 10$$

što je zapravo kružnica sa centrom u $C(1{,}0)$, a to se poklapa sa žižom parabole $F(1{,}0)$, poluprečnika $\sqrt{10}$.

Traženu tangentu $y = kx + n$ ćemo naći pomoću uslova dodira sa parabolom i kružnicom, tj:

$p = 2kn$ i $r^2(1 + k^2) = (kc_1 - c_2 + n)^2$, gde su c_1 i c_2 koordinate centra kružnice.

Dakle:

$$2 = 2kn$$

$$10(1 + k^2) = (k - +n)^2$$

Rešavanjem dobijamo $k_{1,2} = \pm\frac{1}{3}$ i $n_{1,2} = \pm 3$, tj. dve tangente:

$$t_1 : y = \frac{1}{3}x + 3$$

$$t_2 : y = -\frac{1}{3}x - 3$$

7. Na paraboli $y^2 = 8x$ konstruisane su tangente u tačkama $M(2, y > 0)$, $N(2, y < 0)$, $P(8, y > 0)$ koje obrazuju trougao ABC. Odrediti jednačinu kružnice opsane oko trougla ABC i ispitati da li žiža pripada kružnici.

Rešenje:

Najpre ćemo odrediti y koordinatu tačaka M, N i P zamenom vrednosti x koopdinate u jednačinu parabole i dobijamo:

$M(2,4)$, $N(2,-4)$, $P(8,8)$

Sledeće je naći tangente na parabolu u ovim tačkama pomoću uslova dodira $p = 2kn$

$$t_M\colon y = kx + n \;\Rightarrow 4 = 2k + n \; i \; p = 2k + n \Rightarrow 4 = 2kn$$

Rešavanjem dobijamo:

$$t_M\colon y = x + 2$$

Slično nalazimo tangente t_Ni t_P:

$$t_N\colon y = -x - 2$$

$$t_P\colon y = \frac{1}{2}x + 4$$

U preseku t_M i t_N , izjednačavanjem jednačina $x + 2 = -x - 2$, dobijamo tačku $A(-2,0)$, slično iz $t_M \cap t_P$ dobijamo tačku $B(4,6)$ i iz $t_N \cap t_P$ dobijamo tačku $C(-4,2)$.

Sada treba da nađemo koordinate centra kružnice $O(o_1, o_2)$ i poluprečnik kružnice r, a to je lako jep znamo da je centar udaljen od tačke A isto kao i od tačaka B i C i da iznosi r.

$$r^2 = (o_1 - 4)^2 + (o_1 - 6)^2$$

Ovo je bilo rastojanje centra od tačke $B(4,6)$, a sledeća jednakost predstavlja rastojanje centra od tačke $C(-4,2)$:

$$r^2 = (o_1 + 4)^2 + (o_1 - 2)^2$$

Izjednačavanjem ove dve jednačine i rešavanjem dobijamo da je :

$$o_1 = 0$$

$$o_2 = 4$$

Centar kružncice je tačka $O(0,4)$, a vraćanjem ovih vrednosti u jednu od prethodne dve jednakosti dobijamo da je poluprečnik $r = \sqrt{20}$, pa je jednačina kružnice:

$$x^2 + (y - 4)^2 = 20$$

Ostaje da vidimo da li žiža parabole $F(2,0)$ pripada ovoj kružnici:

$$2^2 + (-4)^2 = 4 + 16 = 20 = r^2$$

dakle pripada.

8. Sastaviti jednačinu geometpijskog mesta centara kružnica koji dodiruju kružnicu $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ i y-osu.

Rešenje:

Najpre ćemo transformisati jednačinu kružnice:

$$(x-3)^2 + y^2 = 4$$

Dakle, centar je u tački $C(3,0)$ i poluprečnik je $r = 2$.

Neka je tačka $A(x, y)$ centar kružnice koja dodiruje datu kružnicu i y-osu, tada znamo da poluprečnik ove kružnice iznosi $r_A = x$ baš zbog uslova dodira sa y-osom.

A iz prvog uslova zaključujemo da je rastojanje između tačaka A i C baš $r + r_A$ jer se ove dve kružnice dodiruju.

Dakle, imamo jednakost:

$$(x-3)^2 + y^2 = (r + r_A)^2$$

tj.

$$(x-3)^2 + y^2 = (2 + x)^2$$

Sređivanjem dobijamo jednačinu:

$$y^2 = 10x - 5$$

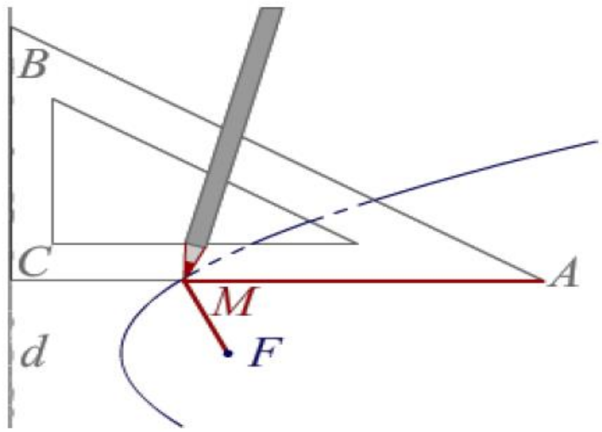
i zaključujemo da je geometrijsko mesto zapravo parabola.

Mehanički način crtanja parabole

Znamo da je parabola skup svih tačaka *M* u ravni koje su jednako udaljene od jedne fiksne tačke *F* te ravni, koju nazivamo žiža ili fokus parabole, i van nje jedne stalne prave d iste ravni, koju nazivamo direktrisa.

Jedan način crtanja parabole prema prethodno navedenom je tzv. mehanički.

Uzmemo trougao (trougaoni lenjir) *ABC*, sa pravim uglom u temenu *C*, kao na slici ispod, i konac dužine *AC*. Jedan kraj konca učvrstimo u temenu *A*, a drugi u fokusu *F*. Ako stranica *BC* klizi po direktrisi d, a konac se zateže olovkom čiji je vrh stalno uz stranicu *AC*, onda tačka *M*, u kojoj se nalazi vrh olovke opisuje luk parabole sa direktrisom d, i fokusom F. Lako see vidi da je uvek $|MF| = |MA|$.



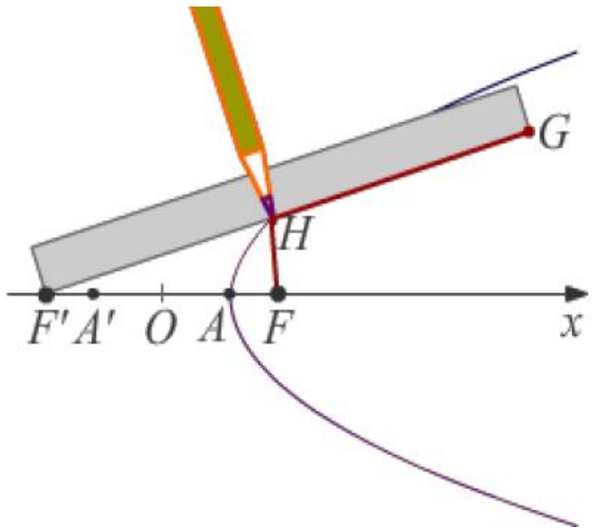
Mehanički način crtanja hiperbole

Znamo da je razlika rastojannja ma koje tačke hiperbole od njenih žiža konstantno. Preciznije rečeno, ako je tačka *M(x, y)* na hiperboči čije su žiže *F* i *F'* tada je: $\big||F'M| - |FM|\big| = 2a$.

Sada se na prethodno iznesenom zasniva sledeće mehaničko crtanje hiperbole.

Postavimo lenjir tako da mu je jedan kraj pričvršćen u tački *F'* oko koje se lenjir može okretati. Krajeve konca dužine manje od dužine lenjira pričvrstimo u tačkama *F* i *G* , gde je *G* drugi kraj lenjira.

Vrhom olovke zategnemo konac, tako da vrh klizi duž lenjira koji se okreće oko tačke *F'*. Kretanje vrha olovke opisuje hiperbolu, kao na slici ispod.



ZADACI

1. Do tačke $M(15/4\,,3)$ hiperbole $16x^2 - 9y^2 = 144$ povučeni su radijus vektori. Dokazati da je simetrala ugla između njih tangenta hiperbole u datoj tački.

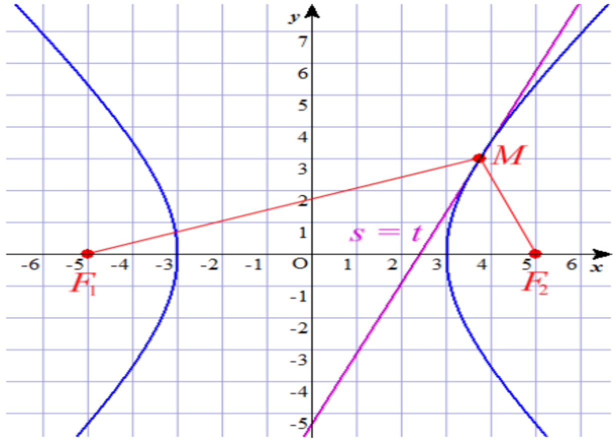
Rešenje:
Jednačina tangente u tački $M(15/4\,,3)$ je:
$16 \cdot \frac{15}{4} \cdot x - 9 \cdot 3 \cdot y = 144$ tj.

$$20x - 9y - 48 = 0$$

Fokusi hiperbole su $F_{1\,2}(\pm 5, 0)$ pa su jednačine radijus vektora r_1 i r_2:
$12x - 35y + 60 = 0$ i $12x + 5y - 60 = 0$
Jednačina simetrale ugla između ovih radijus vektora je:

$$\frac{12x - 35y + 60}{-\sqrt{12^2 + (-35)^2}} - \frac{12x - 35y + 60}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 0$$

tj. $600x - 270y - 1440 = 0$
odnosno $20x - 9y - 48 = 0$, a to je identično jednačini tangente.



2. Mlaz vode iz hidranta ima oblik parabole. Izraziti jednačinu parabole, ako se zna da mlaz postiže visinu od 18m na horizontalnoj udaljenosti 28m od hidranta.

Rešenje: Opšti oblik parabole, koja je otvorena prema dole:

$$x^2 = -4py$$

Hidrant je u koordinatnom početku, pa imamo:

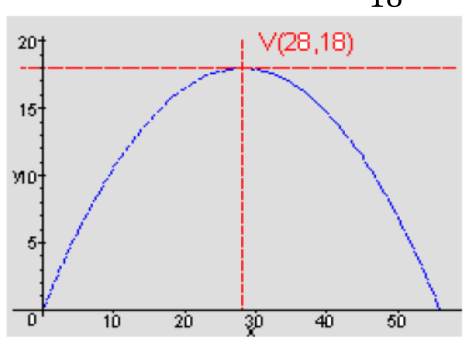
$$(x-28)^2 = 4p(y-18)$$

Vrh je u:

$V(28,18)\quad (0-28)^2 = 4p(0-18) \Longrightarrow 4p = -\frac{28^2}{18}$

Pa je jednačina parabole:

$$x^2 = -4py \quad \Longrightarrow \quad (x-28)^2 = -\frac{28^2}{18}(y-18)$$



3. Zadate su dve parabole: Prva ima vrh u fokusu druge parabole i svoj fokus u vrhu druge parabole. Ako je druga parabola zadata jednačinom $y^2 = 4x$, odrediti jednačinu prve.

Rešenje:

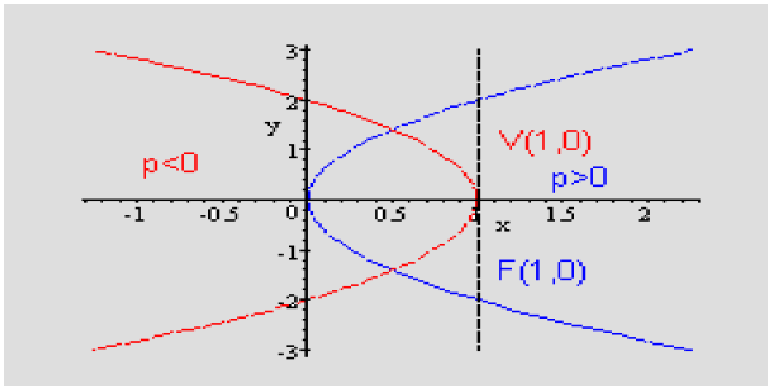
$$y_2^2 = 4px = 4x \implies 4p = 4 \quad p = 1$$

Fokus je u $F(1,0), p > 0$ i parabola je otvorena u desno.

Prva parabola ima vrh u fokusu druge, tj $V_1(1{,}0)$ a fokus u vrhu, $F(0,0)$:

Iz postavke zadatka, mora biti $p < 0$:

$$y_1^2 = 4px = -(4p)(x - x_V) = -4 \cdot 1(x-1)$$
$$y^2 = -4x + 4 \implies y^2 + 4x - 4 = 0$$



4. U građevinama sa specijalnim akustičkim karakteristikama moguće je čuti šapat ako se posetioc nalazi u fokusima elipsastog svoda. Ako je presek hale, elipsa čija je jednačina $36x^2 + 225y^2 = 8100$, odrediti udaljenost šaptača i slušaoca.

Rešenje:

$$36x^2 + 225y^2 = 8100$$

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{36} = 1 \begin{cases} a^2 = 225 \\ b^2 = 36 \end{cases} \qquad c^2 = a^2 - b^2 = 225 - 36 = 189$$

Udaljenost između fokusa : $l = 2c = 2\sqrt{189} = 27.495m$

5. Koncentrične hiperbole su one koje imaju zamenjene poluose. Zatata je hiperbola sa vrhom u $V(0{,}1)$ i fokusom u $F(0,\sqrt{3})$. Odrediti hiperbolu koncentričnu zadatoj.

Rešenje:

$$\frac{y_V^2}{a^2} - \frac{x_V^2}{b^2} = 1 \implies a = 1; \quad c^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = a^2 + b^2 = 1 + b^2 \implies b^2 = 3 - 1 = 2$$

Jednačina hiperbole je:

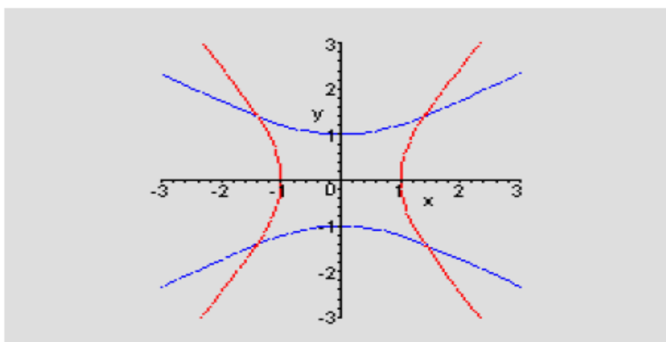
$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{2} = 1 \implies 2y^2 - x^2 = 2$$

Jednačina koncentrične hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies V(1,0) \quad F\left(\sqrt{3}, 0\right)$$

$$c^2 = (\sqrt{3})^2 = a^2 + b^2 = 1 + b^2 \implies b^2 = 3 - 1 = 2$$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1 \implies 2x^2 - y^2 = 2$$



6. Poprečni presek cisterne za gorivo je elipsa čija je jednačina $x^2 + 6y^2 = 6$. Koliko goriva može da stane u cisternu ako je njena dužina 6m.

Rešenje:

$$x^2 + 6y^2 = 6 \implies \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{1} = 1 \implies a = \sqrt{6}, b = 1$$

Površina elipse se dobija po formuli: $P_e = ab\pi$

$$P_e = \sqrt{6} \cdot 1 \cdot \pi$$

Pa u cisternu može stati: $V_c = 6 \cdot P_e = 6\sqrt{6} \cdot \pi = 46.172 m^3$ goriva.

Autori rada: Mina Prokić, Maša Obradović, Jelena Ljuboja, Jovana Dubljanin, Marina Radojičić, Jovana Kubura, Milan Krstić, Milan Ljuboja