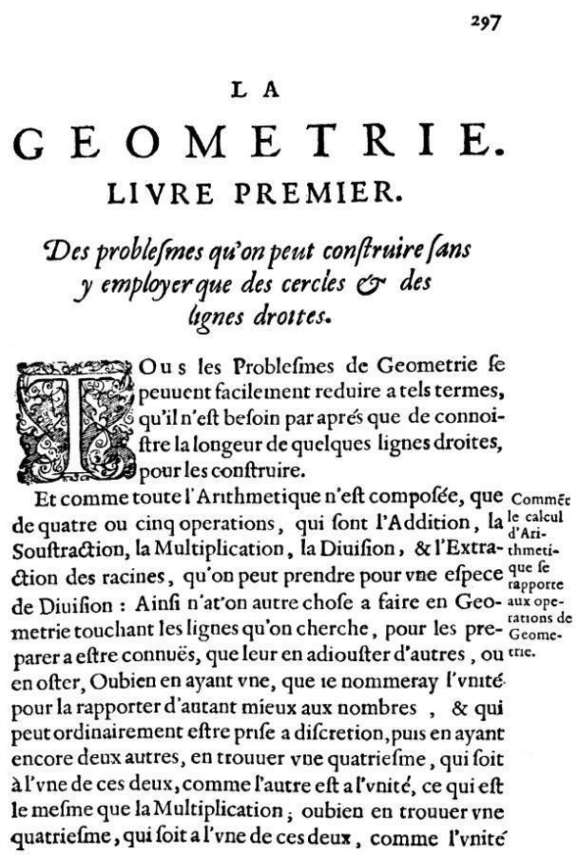
Sadržaj:

Analitička geometrija u ravni

„Cogito ergo sum” – „Mislim dakle postojim”

Rene Dekart

Analitičku geometriju je otkrio ***Rene Dekart***[*] objavljivanjem priloga *La Géométrie* u svom delu *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences* iz 1637 godine. Prema anegdoti, Dekart je inspiraciju za uvođenje koordinatne ravni dobio posmatrajući muvu na plafonu. Analitičkoj geometriji ime je dao Njutn, pri čemu je pod analitičkom geometrijom podrazumevao proučavanje geometrijskih figura pomoću algebarskih jednačina.



297

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'a'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commẽt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Rene Dekart je rođen 31. marta 1596. godine, u La Eju, u Francuskoj. Obrazovanje je stekao u Anjonu upisavši Jezuitsku školu u La Flešu sa samo osam godina. Tu je proveo osam godina učeći logiku, matematiku i tradicionalnu Aristotelovu filozofiju. Imao je problema sa zdravljem, pa je dobio dozvolu da ostaje u krevetu do jedanaest sati ujutru. Tu naviku je zadržao do kraja života. Dekart je verovao da jedino matematika predstavlja sigurno znanje, pa je zato tvrdio da sve mora biti zasnovano na njoj. Po završetku škole preselio se u Pariz i posle nekog vremena upisao je Univerzitet u Puatijeu. Diplomiravši prava 1616, prijavio se za vojnu školu u Bredau. 1618. godine počeo je da uči matematiku i mehaniku kod holandskog naučnika Isaka Bekmana, spoznajući jedinstvo prirodnih nauka. Posle dve godine provedene u Holandiji, putovao je po Evropi da bi se 1619.godine priključio Bavarskoj vojsci. U periodu od 1620. do 1628. godine Dekart je putovao po Evropi, boraveći u Češkoj, Mađarskoj, Nemačkoj, Holandiji i Francuskoj. Dekart se vremenom umorio od silnih putovanja i odlučio da se skrasi. Dugo je birao zemlju koja bi odgovarala njegovoj prirodi i na kraju se odlučio za Holandiju. Tu je živeo tokom sledećih dvadeset godina. 1649. godine švedska kraljica Kristina ubedila je Dekarta da dođe u Stokholm. Dvadesettrogodišnja kraljica je želela da crta tangente u pet sati ujutru, tako da je Dekart razbio svoju životnu naviku ustajanja u jedanaest sati. Želeći da svojim savetima utiče na ćudljivu vladarku, tada moćne zemlje, kako bi time učinio nešto za mir u svetu, Dekart je podnosio surove uslove u zemlji stena i glečera. Posle samo nekoliko meseci provedenih na hladnoj severnoj klimi, hodajući svako jutro do palate, Dekart je umro 11. februara 1650. godine od zapaljenja pluća, u pedeset i četvrtoj godini.

Rastojanje dve tačke. Podela duži datoj razmeri. Površina trougla

1. *Ako su date tačke svojim koordinatama A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2), rastojanje između njih je*

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. *Ako su date tačke A, B, koordinate take C koja pripada pravoj AB i deli duž AB u odnosu λ, tj. $\frac{AC}{BC} = \lambda$ su*

$$x_C = \frac{x_1+x_2\lambda}{1+\lambda} \quad y_c = \frac{y_1+y_2\lambda}{1+\lambda} \quad .$$

Specijalno ako je λ=1, tj.C je središte duži AB važi

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

3. *Ako su koorinate temena trougla A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3), površina trougla je*

$$P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| \ \ ili \ \ P = \frac{1}{2} \ aps.vr \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ZADACI

1. Dokazati da je trougao ABC pravougli ako je: A(0,0), B(3,1), C(1,7).

Rešenje:

Primenom gore navedene formule (1) računamo dužinu duži AB,AC i BC. Dobijamo: $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$. AC=$\sqrt{50}$, BC= $\sqrt{40}$. Vidimo da važi $C^2 = AB^2 + BC^2$, pa po Pitagorinoj teoremi trougao je pravougli.

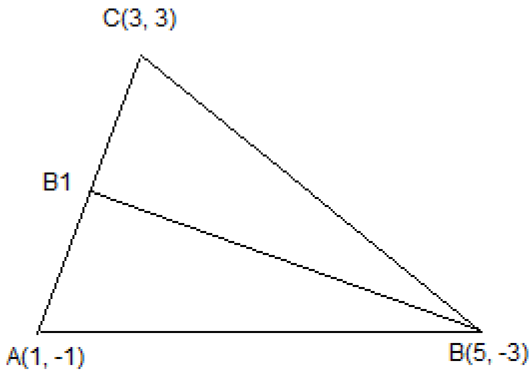
2. Date su tačke A(1,1), B(6,-4) i C (7,1). Odrediti koordinate tačke D koja deli duž AB u odnosu 2:3, a zatim naći koordinate tačke E koja polovi duž CD.

Rešenje:

Pomoću formule (2) dobijamo koordinate tačke D (3,-1). Tačka E polovi duž CD, $\mathrm{x_E} = \frac{7+3}{2} = 5$ $\mathrm{y_E} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$ pa će imati koordinate E(5,0).

3. Data su temena trougla $A(1,-1),\ B(5,-3),\ C(3,3)$. Odrediti dužine stranica trougla, dužine težišnih duži, koordinate težišta i površinu.

Rešenje:



$$B_1\left(\frac{1+3}{2},\frac{-1+3}{2}\right),\qquad B_1(2,1)$$

$$\begin{aligned}|t_b| = |BB_1| &= \sqrt{\left(x_B-x_{B_1}\right)^2+\left(y_B-y_{B_1}\right)^2}\\ &= \sqrt{(5-2)^2+(-3-1)^2}\\ &= \sqrt{9+16}\\ &= 5\end{aligned}$$

Slično se dobijaju $A_1(4,0),\ C_1(3,-2)$, a odatle i $|t_a| = \sqrt{10},\ |t_c| = 5.$ Odredimo dužine stranica trougla:

$$\begin{aligned}a = |BC| &= \sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2} = \sqrt{(5-3)^2+(-3-3)^2} = \sqrt{40}\\ b = |AC| &= \sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2} = \sqrt{(1-3)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{20}\\ c = |AB| &= \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} = \sqrt{(1-5)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{32}\end{aligned}$$

Površina trougla iznosi: $P = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ y_C & y_C & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 5 & -3 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix} = 15.$

Prava u ravni. Razni oblici jednačine prave

1. *Opšti (implicitni) oblik jednačine prave je*

$$Ax + By + C = 0,$$

Gde su A,B,C koeficijenti takvi da A i B ne mogu biti jednaki nuli $(A,B) \neq (0,0)$

2. *Eksplicitni (glavni) oblik jednačine prave je*

$$y = kx + n$$

Parametar k = tgφ je koeficijent pravca prave, gde je φ ugao koji obrazuju pozitivni deo x-ose i deo prave iznad x-ose. *Parametar n je dužina odsečka koji prava odseca na y osi, računajući od koordinatnog početka. Za prave koje su paralelne sa y*-osom glavni oblik *jednačine prave ne postoji.*

3. *Jednačina prave kroz tačke $M_1(x_1,y_1)$ i $M_2(x_2,y_2)$ data je sa*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)\,, x_2 - x_1 \neq 0$$

Gde je $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k = tg\varphi$ *koeficijent pravca te prave.*

4. *Segmentni oblik jednačine prave je*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \;\; a, b \neq 0$$

gde su a i b dužine odsečaka(segmenata) koje prava odseca na koordinatnim osama. Ovaj obik jednačine prave ima smisla samo za prave koje seku obe koordinatne ose i ne prolaze kroz koordinati početak.

5. *Jednačina prave kroz tačku je*

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$gde\ je\ k\ koeficijent\ pravca\ prave\ koji\ prolazi\ kroz\ tačku\ M(x_1, y_1).$

6. *Rastojanje d tačke $M_0(x_0, y_0)$ od prave $Ax + By + C = 0$ određeno je sa*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$C \neq 0$ *ukazuje da prava ne prolazi kroz koordinatni početak. Ako* d *i* C imaju isti predznak, *onda su tačka M_0 i koordinatni početak sa iste strane posmatrane prave, a ako* imaju suprotne predznake, onda su sa raznih strana te prave. Ukoliko je $d = 0$ *onda tačka M_0 pripada pravoj.*

Međusobni položaj dveju pravih

1. *Orijentisani ugao između pravih $y = k_1x + n_1$ i $y = k_2x + n_2$ je* $tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$, *a* apsolutni ugao $tg\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|$.
2. *Uslov paralelnosti pravih $y = k_1x + n_1$ i $y = k_2x + n_2$:* $k_1 = k_2$.

3. *Uslov normalnosti pravih* $y = k_1x + n_1$ *i* $y = k_2x + n_2$ $k_1k_2 = -1$.

Pravilo za određivanje znaka koeficijenta pravca prave k:

- *k je pozitivno (+) ako prava predstavlja rast gledano sleva udesno,*
- *k je negativno (-) ako prava prikazuje pad gledano sleva udesno,*
- *k je 0 ako je prava paralelna x-osi*
- *k je neodređeno (∞) ako je prava paralelna y-osi.*

ZADACI

4. Napisati jednačinu prave koja:
   a) prolazi kroz tačke $A(-1,1)$ i $B(2,4)$.
   b) seče koordinatne ose u tačkama $C(5,0)$ i $D(0,2)$.
   c) prolazi kroz tačku $M(3,4)$ i čiji je koeficijent pravca jednak 2.

Rešenje:

a) Treba odrediti jednačinu prave kroz dve zadate tačke. Kako je koeficijent pravca te prave $k = \frac{4-1}{2+1} = 1$, to je tražena jednačina $y - x - 2 = 0$.
b) Segmentni oblik jednačine prave $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ može se prevesti u implicitni $2x + 5y - 10 = 0$.
c) Kada u formulu za jednačinu prave kroz jednu tačku zamenimo date podatke dobija se jednačina $2x - y - 2 = 0$.

5. Data je prava $(b+2)x + (b-3)y + b^2 - 2b + 1 = 0$. Odrediti sve vrednosti b za koje je ova prava: 1° paralelna *x-osi*; 2° paralelna *y-osi*; 3° prolazi kroz koordinatni početak. U svakom od slučajeva napisati jednačinu prave.

Rešenje:

Koeficijent pravca zadate prave iznosi $k_1 = \frac{b+2}{3-b}$.
1° $k_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{b+2}{3-b} = 0 \Leftrightarrow b = -2$. Samim tim, prava koju posmatramo ima jednačinu $y = \frac{9}{5}$.
2° Za $b = 3$ se dobija prava $x = -\frac{4}{5}$ koja je paralelna y-osi.
3° Koordinatni početak (0, 0) pripada traženoj pravoj, pa kada u njenu jednačinu zamenimo $x = 0, y = 0$ dobija se $b^2 - 2b + 1 = 0$, odnosno $b = 1$. Tada jednačina prave ima sledeći oblik $y = \frac{3}{2}x$.

6. Naći jednačine stranica trougla ako je dato: $h_a = x - 2y - 3 = 0, h_b = x + 4y - 17 = 0, AB: x - y - 2 = 0$.

Rešenje:

Koordinate temena A(1,-1) se dobijaju rešavanjem sistema $x - y - 2 = 0$ i $x - 2y - 3 = 0$. Koordinate temena B(5,3) dobijaju se rešavanjem sistema $x - y - 2 = 0$ i $x + 4y - 17 = 0$. Prava BC sadrži tačku B i normalna je na h_a, pa je k_{BC}=-2, tako da dobijamo $y - 3 = -2(x - 5)$, pa imamo $2x + y - 13 = 0$. Prava AC je normalna na h_b i sadrži tačku A pa je k_{AC} =4, tako da je AC: $4x - y - 5 = 0$.

7. Naći jednačinu prave koja sadrži tačku $M(-1,3)$ i sa pravom $p: 3x + 2y - 6 = 0$ obrazuje ugao od 45°.

Rešenje:

Postoje dve takve prave. Ako sa k označimo koeficijent pravca tražene prave i uočimo da je za datu pravu koeficijent pravca $k_1 = -\frac{3}{2}$, dobijamo uslov $tg45° = 1 = \left|\frac{-\frac{3}{2}-k}{1-\frac{3}{2}k}\right| \Leftrightarrow \left|-\frac{3}{2} - k\right| = \left|1 - \frac{3}{2}k\right| \Leftrightarrow |3 + 2k| = |2 - 3k| \Leftrightarrow 4k^2 + 12k + 9 = 9k^2 - 12k + 4 \Leftrightarrow 5k^2 - 24k + 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}(12 \pm 13)$. Odatle je $k' = -\frac{1}{5}, k'' = 5$. Tražene jednačine su tada: $y - 3 = -\frac{1}{5}(x + 1)$ i $y - 3 = 5(x + 1)$, odnosno $x + 5y - 14 = 0, 5x - y + 8 = 0$.

8. Na pravoj $p: x - 2y + 8 = 0$ odrediti tačku jednako udaljenu od tačke $S(8,3)$ i prave $q: 3x + 4y - 11 = 0$.

Rešenje:

Neka je M tražena tačka. Kako $M \in p$, to je $M(2t - 8, t)$, a $SM = \sqrt{(2t - 16)^2 + (t - 3)^2}$, dok je $d_{Mq} = \frac{|3(2t-8)+4t-11|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|10t-35|}{5} = |2t - 7|$. Iz $d_{Mq} = SM$ sledi da je$(2t - 16)^2 + (t - 3)^2 = (2t - 7)^2 \Leftrightarrow t^2 - 42\text{t} + 216 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 6, t_2 = 36$, pa su tražene tačke $M_1(4,6)$ i $M_2(64,36)$.

9. Odrediti jendačine stranica trougla ABC ako su date jednačine težišne linije $t_a: x + 2y + 10 = 0$ i visine $h_b = 3x + y + 15 = 0$, kao i teme $C(1, -8)$.

Rešenje:

Iz uslova $AC \perp h_b$ nalazimo jenačinu prave $AC: x - 3y - 25 = 0$. Kako $B \in h_b$, to je $B(t, -3t - 15)$, pa je središte duži $BC: A_1\left(\frac{t+1}{2}, \frac{-3t-23}{2}\right)$. Iz $A_1 \in t_a$ dobijamo $\frac{t+1}{2} + 2 \cdot \frac{-3t-23}{2} + 10 = 0$, odakle je $t = -5$. Teme B ima koordinate $(-5,0)$, a koordinate tačke A se nalaze kao presek pravih AC i t_a, $A(4, -7)$. Neka A ima koordinate (α, β), tada je jednačina prave $AC: y -$

$1 = \frac{\alpha-1}{\beta+8}(x+8)$. Dalje imamo $x + 2\left(1 + \frac{\alpha-1}{\beta+8}(x+8)\right) + 10 = 0$ ⇔Dobijamo jednačine pravih $AB: 7x + 9y + 35 = 0$ i $BC: 4x + 3y + 20 = 0$.

10. Na pravoj $\mathrm{p}: \mathrm{x} + \mathrm{y}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ odrediti tačke A i B tako da trougao OAB bude jednakostraničan.

Rešenje:

Rastojanje date prave i koordinatnog početka je $\mathrm{h} = \frac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}} = \sqrt{3}$ i ono je jednako visini jednakostraničnog trougla OAB. Stranica jednakostraničnog trougla je $\mathrm{a} = \frac{2\mathrm{h}}{\sqrt{3}} = 2$, pa se tačke A i B nalaze na odstojanju 2 od koordinatnog početka. Rešavanjem sistema jednačina $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 4, \mathrm{x} + \mathrm{y}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, dobijamo koordinate temena trougla : A($\sqrt{3}$,1)i B(0,2).

11. Date su prave $24\mathrm{x} - 10\mathrm{y} + 39 = 0$ i 12x+5y+26=0 kojima pripadaju paralelne stranice kvadrata. Odrediti površinu kvadrata.

Rešenje:

Dužina stranice kvadrata jednaka je normalnom rastojanju između datih pravih, tj. $\mathrm{a} = \mathrm{d} = \frac{|\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}} = \frac{|39-2(-26)|}{26} = \frac{7}{2}$, pa je površina kvadrata P=$\mathrm{a}^2 = \frac{49}{4}$

Krug

* ***Kanonska jednačina*** kruga sa centrom u tački $C(a,b)$ i poluprečnikom r data je sa

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

* Prava $y = kx + n$ je ***tangenta kruga*** $x^2 + y^2 = r^2$ ako je $r^2(1 + k^2) = n^2$, a kruga $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ako je $r^2(1 + k^2) = (ka - b + n)^2$.

* Ako je $M(x_1, y_1)$ neka tačka kruga $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, jednačina tangente kruga u toj tački glasi

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2.$$

Kružna linija je skup tačaka u ravni sa svojstvom da su sve tačke tog skupa na jednakom rastojanju r od jedne fiksirane tačke C te ravni koja se naziva centar kružne linije. Ma koja duž koja spaja centar kružne linije sa nekom tačkom kružne linije zove se poluprečnik, a broj r dužina poluprečnika kružne linije. Često se i za broj r kratko kaže da je poluprečnik kružne linije.

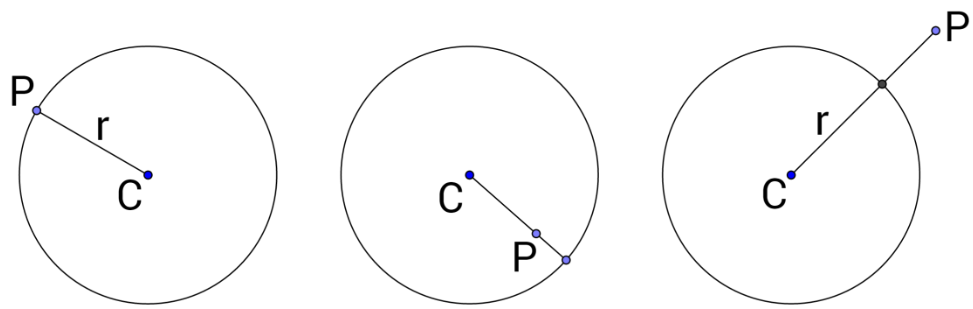
U literaturi se sreću pojmovi krug, kružnica i kružna linija. Pod kružnom linijom ili kružnicom podrazumeva se skup opisan u datoj definiciji, dok se pod krugom, nažalost dvosmisleno, ponekad podrazumeva isto što i pod kružnom linijom u smislu navedene definicije, a ponekad unija kružne linije i unutrašnje oblasti ograničene ovom kružnom linijom.

Neka je data kružna linija k: $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ i tačka $P(x_0, y_0)$. Ako je:

1) $(x_0-p)^2 + (y_0-q)^2 = r^2$ tada tačka P pripada kružnici.

2) $(x_0-p)^2 + (y_0-q)^2 < r^2$ tada je P unutar kruga.

3) $(x_0-p)^2 + (y_0-q)^2 > r^2$ tada je P izvan kruga.

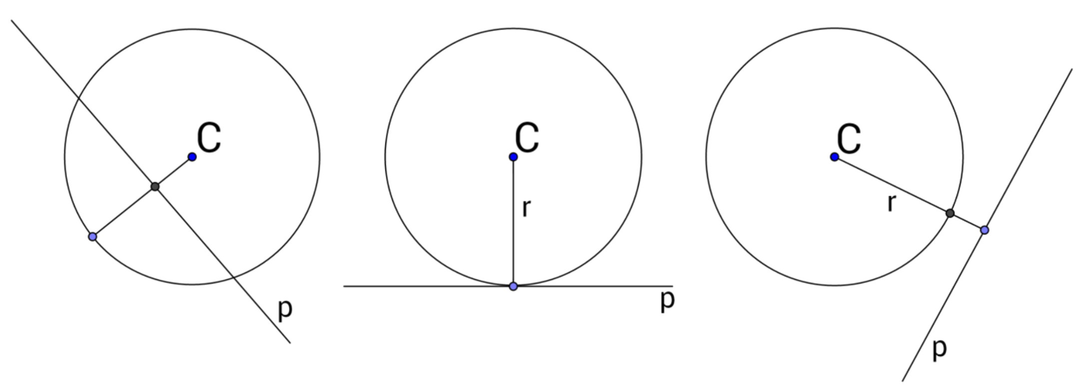


Za uzajamni položaj prave p i kružne linije k u ravni, postoje tri mogućnosti:

1) da imaju dve zajedničke tačke, $d(C, p) < r$.

2) da imaju jednu zajednički tačku, $d(C, p) = r$.

3) da nemaju zajedničkih tačaka, $d(C, p) > r$.



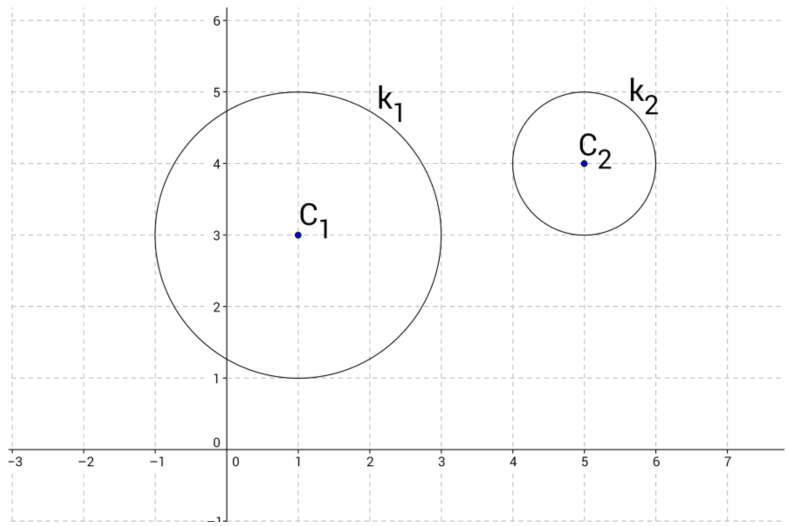
Zadaci:

1. Ispitati međusobni položaj kružnih linija.

k_1: $x^2 + y^2 – 2x – 6y + 6 = 0$

k_2: $x^2 + y^2 – 10x - 8y + 40 = 0.$

Rešenje:



Pre svega, dovedimo jednačine u oblik iz kog možemo dobiti podatke o koordinatama centra i dužini poluprečnika.

k_1: $x^2 + y^2 – 2x – 6y + 6 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 - 1 - 9 + 6 = 0$

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

$C_1(1,3)$

$r_1 = 2$

k_2: $x^2 + y^2 – 10x - 8y + 40 = (x - 5)^2 + (y - 4)^2 - 25 - 16 + 40 = 0$

$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1$

$C_2(5,4)$

$r_2 = 1$

Ako prikažemo ove dve kružnice, sa njihovim centrima i poluprečnicima, u Dekartovom koordinatnom sistemu možemo primetiti da se ove dve kružnice ne seku, odnosno da nemaju nijednu zajedničku tačku. Međutim, kako “dokaz sa slike”, iako nam ukazuje na rešenje, nije dovoljan, moramo to formalno pokazati.

Rastojanje centara ove dve kružnice je:

$$C_1C_2 = \sqrt{(5-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{17} > 4 > (1+2) = r_1 + r_2$$

Kako je rastojanje centara veće od zbira poluprečnika ovih kružnica, možemo zaključiti da ne može biti presečnih tačaka. Takođe, kružnice nisu upisane jedna u drugoj.

2. Na krugu $x^2 + y^2 = 5$ odrediti tačku jednako udaljenu od prave p: $y = -x - 5$ i tačke $A(-3,-2)$.

Rešenje:

$k: x^2 + y^2 = 5$

$M(a,b) \in k$ t.d. $AM = d_{M,p} = d$

Dakle, ova dva rastojanja su jednaka, pa rešenje dobijamo rešenjem sistema jednačina.

$AM = \sqrt{(a+3)^2 + (b+2)^2}$

$d = \frac{|a+b+5|}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{(a+3)^2 + (b+2)^2} = \frac{|a+b+5|}{\sqrt{2}} \quad /\sqrt{2} \quad /()^2$$

$$2((a+3)^2 + (b+2)^2) = (a+b+5)^2$$

$$a^2 + b^2 + 1 + 2a - 2b - 2ab = 0$$

$$\text{iz } M \in k \text{ sledi da je } a^2 + b^2 = 5 \text{ i } b = \sqrt{5-a^2}$$

$$6 + 2a = 2\sqrt{5-a^2}\,(1+a) \quad /()^2$$

$$\ldots$$

$$a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 4a + 4 = 0$$

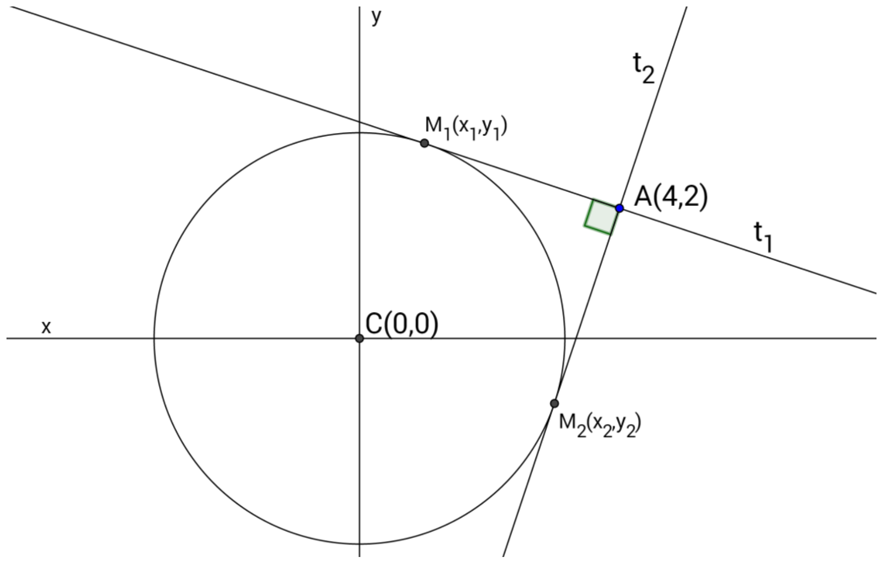
$$(a-1)^2(a+2)^2 = 0$$

Nakon što smo rešili prethodni sistem, dobijamo dve tačke kao rešenje:

$$M_1(1,2) \qquad M_2(-2,-1)$$

3. Iz tačke $A(4,2)$ konstruisane su tangente na krug $x^2 + y^2 = 10$. Izračunati ugao koji te tangente međusobno grade.

Rešenje:



Traži se ugao koji grade tangente t_1 i t_2. Prvo moramo naći jednačine tih tangenti. Ove prave određene su tačkom A i dodirnim tačkama sa kružnicom.

Koristeći se formulom za jednačinu tangente u tačkama $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$ dobijamo:

t_1: $xx_1 + yy_1 = 10$ t_2: $xx_2 + yy_2 = 10$

$A(4,2) \in t_1 \Rightarrow 4x_1 + 2y_1 = 10$

$M1 \in k$, $y = \sqrt{10 - x^2} \Rightarrow 4x_1 + 2\sqrt{10 - x_1{}^2} = 10 \ldots$

Rešavanje dobijene jednačine daje nam $M_1(1, 3)$ i $M_2(3, -1)$. Konačno zamenom x_1, y_1, x_2, y_2 u jednačine tangenti i dovođenjem u eksplicitni oblik dobijamo:

$$t_1: y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \qquad t_2: y = 3x - 10$$

Kako su koeficijenti pravca $k_1 = -\frac{1}{3}$ i $k_2 = 3$, sledi da $t_1 \perp t_2$, odnosno $\measuredangle(t_1, t_2) = 90°$

4. Naći jednačinu kruga koji date krugove k_1, k_2, k_3 seče pod pravim uglom.

k_1: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 7$

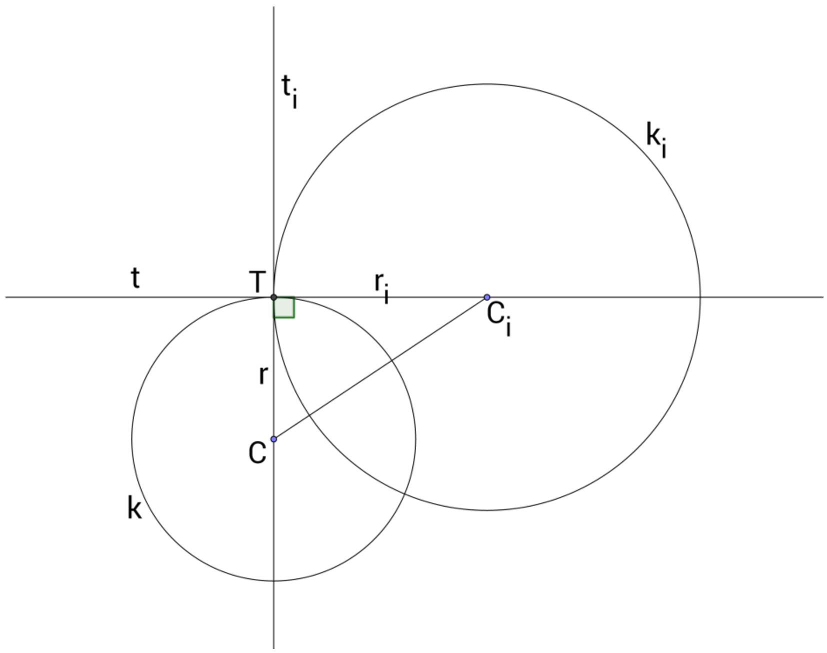
k_2: $(x - 3)^2 + y^2 = 5$

k_3: $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

Rešenje:

Označimo redom centre i poluprečnike krugova k_1, k_2, k_3 sa $C_1(1,2)$, $C_2(3,0)$ i $C_3(-4,-1)$, odnosno $r_1=\sqrt{7}$, $r_2=\sqrt{5}$ i $r_3=3$. Poluprečnik traženog kruga označimo sa r, a centar C(a,b).

Primetimo da ako se krugovi seku pod pravim uglom, to znači da se njihove tangente u presečnoj tački seku pod pravim uglom. Takođe, poluprečnici su normalni na tangente.



Možemo onda primetiti tri pravougla trougla koja daju sistem jednačina

$CC_1^2 = r^2 + r_1^2 \quad \rightarrow \quad (a-1)^2 + (b-2)^2 = r^2 + 7$

$CC_2^2 = r^2 + r_2^2 \quad \rightarrow \quad (a-3)^2 + b^2 = r^2 + 5$

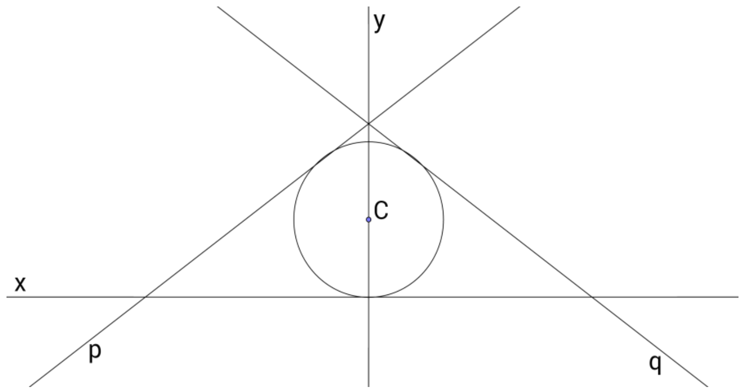
$CC_3^2 = r^2 + r_3^2 \quad \rightarrow \quad (a+4)^2 + (b+1)^2 = r^2 + 9$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo $a= -\frac{1}{16}$, $b= -\frac{25}{16}$ i $r^2= \frac{1746}{256}$

$$k: (x + \frac{1}{16})^2 + (x + \frac{25}{16})^2 = \frac{1746}{256}$$

5. Naći jednačinu kruga upisanog u trougao čija jedna stranica pripada x-osi, druga pravoj p: 3x - 4y + 36 = 0, a treća pravoj q, simetričnoj pravoj p u odnosu na y-osu.

Rešenje:



k: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

x-osa: $y = 0$

p: $3x - 4y + 36 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{3}{4}x + 9$

Prava q, simetrična pravoj p u odnosu na y-osu imaće isti odsečak na y-osi, ali koeficijent pravca suprotnog znaka.

q: $y = -\frac{3}{4}x + 9 \;\Rightarrow\; 3x + 4y - 36 = 0$

Centar upisanog kruga pripada y-osi, pa su koordinate centra oblika C(0,b). Takođe, centar je jednako udaljen od x-ose i prave p.

$$d_{C,p} = \frac{|-4b+36|}{\sqrt{9+16}} \qquad d_{C,x} = \frac{|b|}{\sqrt{1}}$$

$$d_{C,x} = d_{C,p} \;\Rightarrow\; |-4b + 36| = 5|b|$$

Primetimo da centar mora biti u unutrašnjosti trougla pa b>0 i b<9 (visina trougla). Iz toga sledi da se možemo osloboditi apsolutnih zagrada jer su pozitivne vrednosti. Konačno, b=4.

C (0,4)

$r = d_{C,x} = d_{C,p} = 4$

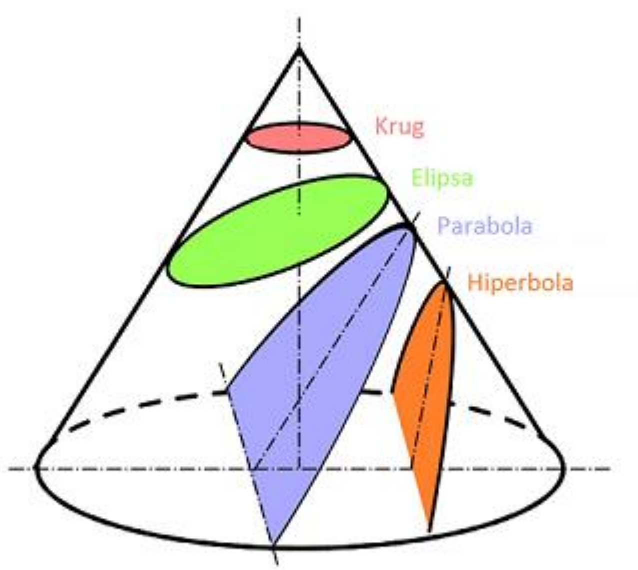
Jednačina upisanog kruga *k:* $x^2 + (y - 4)^2 = 16$.

Konusni preseci

Neka su u prostoru zadate prave p i s koje se seku u tački O. Skup svih slika tačaka prave p u rotacijama sa osom s je **prav kružni konus.** Tačku O zovemo temenom konusa, pravu s osom, a slike prave p u rotacijama oko prave s njegovim izvodnicama.

Presek proizvoljne ravni Ω i tog konusa zovemo **konusnim presekom.** Ako je ravan Ω upravna na s, a ne sadrži O, konusni presek je krug. Postoji sfera koja dodiruje konus u tačkama tog kruga. Za takvu sferu ćemo reći da je upisana u konus. Ako ravan Ω sadrži O njen presek sa konusom može da bude ili samo tačka O , ili skup tačaka jedne izvodnice, ili skup tačaka koje pripadaju dvema izvodnicama tog konusa.

Ako ravan ne sadrži tačku O i nije upravna na s , konusni presek ćemo zvati **konikom.**

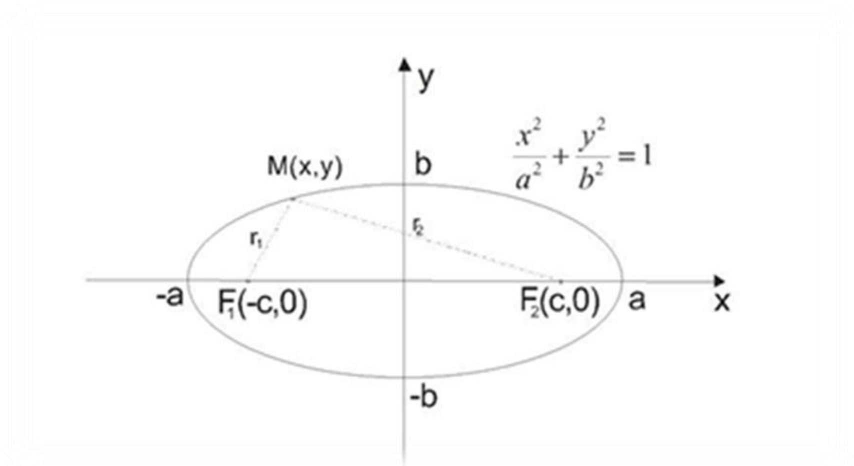


<u>Teorema.</u> Svaki konusni presek, osim kruga, jeste geometrijsko mesto tačaka u ravni za koje je odnos rastojanja od neke stalne tačke F (žiže) i neke stalne prave DD' (direktrisa) stalna veličina.

Ukoliko je ravan paralelna sa nekom izvodnicom onda koniku nazivamo parabolom.A ako je ravan paralelna sa s onda je to hiperbola.Dok kada sa izvodnicom gradi oštar ugao a sa s tup ugao onda je nazivamo elipsom.

Elipsa

Elipsa je skup tačaka u ravni s osobinom da je zbir rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka(žiža) stalan broj.



F_1, F_2 − su žiže elipse, gde je : $c^2=a^2-b^2$

a - je velika poluosa, odnosno $2a$ je velika osa

b - je mala poluosa, odnosno $2b$ je mala osa

e=$\frac{c}{a}$ je ekscentricitet (još kod elipse važi da je e<1)

Direktrise su: $x=\frac{a}{e}$ i $x=-\frac{a}{e}$

Jednačina elipse je :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Uslov da prava y=kx+n dodirje elipsu je $a^2k^2+b^2=n^2$

Tangenta elipse u tacki dodira $T(x_0,y_0)$ je : $b^2xx_0 + a^2xx_0 = a^2b^2$

Zadaci:

1.Tačka elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ koja je najbliža pravoj x-y+3=0 je:

Rešenje:

Tangente elipse koje su paralelne datoj pravoj imaju koeficijent pravca k=1. Iz uslova dodira dobija se n=$\sqrt{5}$ ili n=-$\sqrt{5}$. S obzirom da je prava x-y+$\sqrt{5}$=0 bliža datoj pravoj onda ce i tačka sa nje biti ona bliža. Njen presek sa elipsom se dobija iz jednačine x+$\sqrt{5}$=$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ i to će biti tačka M($-\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$).

2. Jednačine tangenti elipse $x^2+4y^2=20$ koje su normalne na pravu 2x−2y−13=0 su:

Rešenje:

Koeficijent pravca date prave jednak je 1, pa će tražene tangente imati koeficijet pravca k=−1. S obzirom da je $a^2=20, b^2=5$, iz uslova dodira $a^2k^2+b^2=n^2$ prave y=kx+n i elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dobija se $n^2=25$ odakle je n=5 ili n=−5.Dobija se : x+y+5=0 i x+y-5=0.

3.Odredi ugao pod kojim se vidi elipsa $3x^2+y^2=48$ iz tačke P=(8,0).

Rešenje:

Ugao pod kojim se "vidi" elipsa iz tačke određen je uglom koji zaklapaju tangente elipse konstruisane iz date tačke.

$3x^2+y^2=48/:48$

$a^2=16, b^2=48;$

$P=(8,0) \in y=kx+n$

$0=8k+n, \ n=-8k$

$a^2k^2+b^2=n^2$

$16k^2+48=64k^2$

$k^2=1, \ \ k=\pm 1, \ \ n=\mp 8;$

Jednačine tangeni su y1=−x+8,y2=x−8. Kako je k1·k2=−1, to znači da je ugao između tangenti prav.

4. Kroz tačku N=(1,1) konstruisana je tetiva elipse $4x^2+9y^2=36$ koja je tom tačkom prepolovljena. Odredi jednačinu prave kojoj pripada ta tetiva.

Rešenje:

Neka su krajevi tetive tačke A=(x1,y1),B=(x2,y2) a tačka N njihovo središte.

$1=\frac{x_1+x_2}{2}$ $1=\frac{y_1+y_2}{2}$

⇒x1+x2=2,y1+y2=2

S obzirom da tačke A i B pripadaju i elipsi, važe jednakosti:

$4x_1^2+9y_1^2=36 \wedge 4x_2^2+9y_2^2=36$

$4x_1^2+9y_1^2=4x_2^2+9y_2^2$

4(x1−2)(x1+x2)=9(y2−y1)(y2+y1)

8(x1−2)=18(y2−y1)

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k=-\frac{4}{9}$

Jednačina prave je tada:

$y-1=-\frac{4}{9}(x-1)$

4x+9y=13.

5. Odredi jednačinu elipse koja dodiruje pravu x+4y−10=0 u tački M=(2,y).

Rešenje:

Tačka M pripada i pravoj i elipsi pa njenu y-koordinatu možemo odmah odrediti:

2+4y−10=0

$y=2, M=(2,2)$.

Jednačinu prave napišemo u eksplicitnom obliku (zbog *k* i *n*):

$y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$

$k=\frac{1}{4}$, $n=\frac{5}{2}$

Potrebno je odrediti a^2, b^2. Radi lakšeg računanja uvedimo oznake $m=a^2, n=b^2$. Prvu jednačinu dobijemo iz uslova da tačka M pripada elipsi, a drugu iz činjenice da je data prava tangenta elipse:

$\frac{4}{m}+\frac{4}{n}=1 \wedge \frac{m}{16}+n=\frac{25}{4}$

$4n+4m=mn \quad \wedge \quad m+16n=100, \quad m=100-16n$

$4n+400-64n=n(100-16n)$

$n^2-10n+25=0$

$(n-5)^2=0$

$n=b^2=5, \qquad m=a^2=20;$

Jednačina tražene elipse je:

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$$