Aksiomatika

Neka je ***S*** neprazan skup čije ćemo elemente zvati *tačkama* i označavati sa *A*, *B*, *C*, ... Određene podskupove skupa ***S*** zvaćemo *pravama* i označavati sa *a*, *b*, *c*, ... a određene podskupove zvaćemo *ravnima* i označavati sa α, β, γ, ... Osim ovih, polazni pojmovi biće i dve relacije na skupu ***S***. Prva je troelementna i naziva se relacija *između*. Da su tačke *A*, *B*, *C* u toj relaciji označavaćemo sa $\mathcal{B}(A,B,C)$ i čitati: tačka *B* je između tačaka *A* i *C*. Druga relacija je četvoroelementna i naziva se relacija *podudarnosti parova tačaka*; činjenicu da su tačke *A*, *B*, *C*, *D* u toj relaciji označavaćemo sa $(A,B)\cong(C,D)$ i čitati: par tačaka (A,B) je podudaran sa parom (C,D).

Pomoću ovih polaznih pojmova uvodimo i naredne izvedene pojmove:

Definicija. Za tri ili više tačaka kaže se da su *kolinearne* ako postoji prava koja ih sadrži. Inače su one *nekolinearne*. Analogno za četiri i više tačaka kaže se da su *komplanarne* ako postoji ravan koja ih sadrži. Inače su one *nekomplanarne*. Za dve ili više pravih kaže se da su *komplanarne* ako postoji ravan koja ih sadrži. Inače su one *nekomplanarne*.

Definicija. Dve prave se *seku* ako je njihov presek jedna tačka. Prava i ravan se *seku* ako je njihov presek jedna tačka. Dve razne ravni se *seku* ako njihov presek nije prazan skup.

Definicija. Proizvoljan neprazan podskup skupa ***S*** naziva se *figura*. Figura je *ravna* ako postoji ravan čiji je ona podskup. Ceo skup ***S*** zvaćemo *prostor*.

Definicija. Prave *p* i *q* su *mimoilazne* ako ne postoji ravan koja ih sadrži tj. ako su nekomplanarne.

Sada ćemo uvesti i osnovna tvrđenja koja se ne dokazuju - aksiome. Po svojoj prirodi njih delimo u pet grupa:

I Aksiome incidencije. (osam aksioma)

II Aksiome rasporeda. (šest aksioma)

III Aksiome podudarnosti. (sedam aksioma)

IV Aksioma neprekidnosti. (jedna aksioma)

V Aksioma paralelnosti. (jedna aksioma)

1.Aksiome incidencije

Kako prave i ravni, kao polazni pojmovi predstavljaju odgovarajuće skupove tačaka, među tačkama pravama i ravnima mogu se razmatrati odgovarajuće skupovne relacije: $\in$ i $\subset$. Te relacije zvaćemo *relacije incidencije*.

I_1 *Za svake dve razne tačke postoji tačno jedna prava koja ih sadrži.*

I_2 *Svaka prava sadrži bar dve tačke.*

I_3 *Za svake tri tačke postoji bar jedna ravan koja ih sadrži.*

I_4 *Za svake tri nekolinearne tačke postoji tačno jedna ravan koja ih sadrži.*

I_5 *Svaka ravan sadrži bar tri tačke.*

I_6 *Ako dve razne tačke neke prave pripadaju nekoj ravni tada i sve tačke te prave pripadaju toj ravni.*

I_7 *Ako su dve ravni incidentne sa nekom tačkom, tada su one incidentne sa bar još jednom tačkom.*

I_8 *Postoje četiri nekomplanarne tačke.*

Na osnovu aksiome I_1, svaka prava određena je sa dve svoje razne tačke. Tako ćemo pravu p određenu tačkama A i B zvati i prava AB. U slučaju kad za pravu p i ravan α važi $p \subset \alpha$, rećićemo takođe, da prava p pripada ravni α ili da ravan α sadrži pravu p.

Tvrđenje1: Ako su tri tačke nekolinearne, tada su svake dve od njih međusobno različite.
Dokaz: Neka su to tačke A,B i C. Neka su tačke A i B jednake. Za tačke A i C na osnovu I1 postoji tačno jedna prava koja ih sadrži. Zbog jednakosti tačaka A i B i tačka B pripada toj pravoj. Znači da postoji prava koja sadrži tačke A,B i C, a to bi značilo da su ove tačke kolinearne što je kontradikcija. Isto bi se dokazalo i za jednakost tačaka A i C ili B i C.

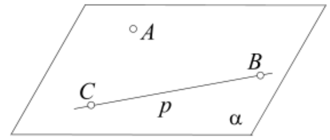
Tvrđenje2: Ako su četiri tačke nekomplanarne, tada su svake dve od njih međusobno različite
Dokaz: Neka su to tačke A,B,C i D. Neka su tačke A i B bile jednake. Za tačke A,C,D na osnovu I.3 postoji bar jedna ravan koja ih sadrži. Zbog jednakosti tačaka A i B i tačka B pripada toj ravni. Znači postoji ravan koja sadrži tačke A,B,C,D, a to bi značilo da su ove tačke komplanarne što je kontradikcija. Isto bi se dokazivalo i za jednakost ostalih tačaka

Tvrđenje3: Ako su četiri tačke nekomplanarne, tada su svake tri od njih nekolinearne.
Dokaz: Neka su to tačke A,B,C,D. Pretpostavimo da su tačke A,B,C kolinearne. To znači da postoji neka prava p koja ih sadrži. Posmatrajmo tačke A,B,D Na osnovu I.3 postoji neka ravan koja sadrži tačke A,B,D. Prava p i ravan imaju zjedničke tačke A i B. Tačke A i B su različite na osnovu tvrđenja1, i onda na osnovu I6 sledi da prava p je podskup ravni . Pošto tačka C pripada pravoj p onda pripada ravni . Znači tačke A,B,C,D pripadaju ravni , a to je u kontradikciji da su tačke nekomplanarne.

Tvrđenje3: Postoje četiri razne tačke, šest pravih, četiri razne ravni.
Dokaz: Na osnovu I8,postoje četiri nekomplanarne tačke A,B,C,D. Na osnovu tvrđenja2 te su tačke različite.
Svaki četvoročlani skup ima 6 dvočlanih podkupova , a na osnovu I.1 za svake dve tačke postoji tačno jedna prava koja ih sadrži pa sledi da imamo 6 pravih određenih ovim tačkama. Ako bi dve prave bile jednake onda bi sledilo da su bar tri tačke koje određuju ove prave kolinearne što je u kontradikciiji sa tvrđenjem2. Znači postoji 6 pravih.

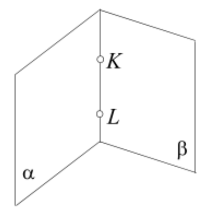
Svaki četvoročlani skup ima 4 tročlana podskupa, a na osnovu I.3 za sveke tri tačke postoji bar jedna ravan koja ih sadrži pa sledi da imamo 4 ravni određenih ovim tačkama. Ako bi dve ravni bile jednake onda bi sve četiri tačke pripadale toj ravni pa bi tačke bile komplanarne što je kontradikcija.

***Teorema I_1* .** Ako tačka *A* ne pripada pravoj *p* tada postoji jedinstvena ravan koja sadrži tačku *A* i pravu *p*.



DOKAZ: Prema aksiomi I_2, prava *p* sadrži bar dve tačke, označimo ih sa *B* i *C*. Ako bi tačke A, B, C bile kolinearne one bi pripadale jednoj ravni. Međutim, na osnovu aksiome I1, tačke B i C određuju jedinstvenu pravu i to je orava p. Ali tada bi tačka A pripadala pravoj p što je isključeno u iskazu teoreme. Dakle, tačke *A*, *B*, *C* su nekolinearne pa, na osnovu aksiome I_4, postoji tačno jedna ravan koja ih sadrži, označimo je sa α. Kako tačke *B* i *C* prave *p* pripadaju ravni α to, na osnovu aksiome I_6, i sve tačke prave *p* pripadaju toj ravni. Dakle, ravan α sadrži tačku *A* i pravu *p*. Dokažimo još da je takva ravan jedinstvena. Ako neka ravan β sadrži tačku *A* i pravu *p*, tada ona sadrži tačke *A, B, C* pa se, na osnovu aksiome I_4, ne može razlikovati od α.

***Teorema I_2* .** Ako dve razne ravni imaju zajedničku tačku tada je njihov presek prava.



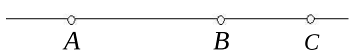
Dokaz: Neka dve razne ravni α i β imaju zajedničku tačku *K*. Tada one, prema aksiomi I_7, imaju bar još jednu zajedničku tačku L. Prema aksiomi I_1, tačke *K* i *L* određuju pravu *KL*, čije sve tačke, na osnovu I_6, pripadaju ravnima α i β pa time i njihovom preseku. Dokažimo još da van prave *KL* nema drugih presečnih tačaka ravni α i β.

Zaista ako bi zajednička tačka *M* ravni α i β bila van prave *KL*, tada bi na osnovu prethodne teoreme postojala jedinstvena ravan koja sadrži tačku *M* i pravu *KL*. To, međutim, nije moguće, jer su po pretpostavci α i β razne ravni. Dakle, presek ravni α i β je prava *KL*

2.Aksiome rasporeda

Ove aksiome opisuju osnovne karakteristike relacije "između" koju smo već uveli kao osnovni pojam.

II_1 Ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$ tada su A, B, C tri razne kolinearne tačke.



II_2 Ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$ tada je i $\mathcal{B}(C,B,A)$.

II_3 Ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$ tada nije $\mathcal{B}(A,C,B)$.

II_4 Za svake dve tačke A, B na pravoj AB postoji tačka C takva da je $\mathcal{B}(A,B,C)$.

II_5 Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke tada važi bar jedna od relacija: $\mathcal{B}(A,B,C)$, $\mathcal{B}(A,C,B)$, $\mathcal{B}(C,A,B)$.

II_6 (Pašo aksioma) Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i l prava ravni ABC koja ne sadrži tačku A i seče pravu BC u tački P takvoj da je $\mathcal{B}(B,P,C)$, tada prava l seče ili pravu AC u tački Q takvoj da je $\mathcal{B}(A,Q,C)$ ili pravu AB u tački R takvoj da je $\mathcal{B}(A,R,B)$.

3.Aksiome podudarnosti

III_1 Ako je (A,B)≅(C,D) i A=B, tada je i C=D. III_2 Za svake dve tačke A i B je (A,B)≅(B,A).

III_3 Ako je (A,B)≅(C,D) i (A,B)≅(E,F) tada je i (C,D)≅(E,F).

III_4 Ako su C i C' tačke otvorenih duži AB i A'B', takve da je (A,C)≅(A',C') i (B,C)≅(B',C'), tada je i (A,B)≅(A',B').

III_5 Ako su A i B dve tačke i CX polupravа tada na toj polupravoj postoji tačka D takva da je (A,B)≅(C,D).

III_6 Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i A'B' tačke ruba neke poluravni π, takve da je(A,B)≅(A',B'), tada u toj poluravni postoji jedinstvena tačka C' takva da je(A,C)≅(A',C') i (B,C)≅(B',C').

III_7 Ako su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih tačaka i D i D' tačke polupravih BC i B'C' takve da je(A,B)≅(A',B'), (B,C)≅(B',C'), (A,C)≅(A',C') i(B,D)≅(B',D'), tada je i (A,D)≅(A',D').

4.Aksioma neprekidnosti

IV_1 (Dedekindova[2] aksioma) Neka je otvorena duž AB razložena na uniju dva disjunktna neprazna podskupa U i V. Ako nijedna tačka iz skupa U nije između neke dve dve tačke skupa V i nijedna tačka iz skupa V nije između neke dve tačke skupa U, tada postoji jedinstvena tačka C otvorene duži AB takva da je B(A',C,B') za svako A'∈ U\{C} i svako B'∈ V \{C}.

5.Aksioma paralelnosti

V_1. (Plejferova[4] aksioma)

Ako tačka A ne pripada pravoj p, tada u ravni njima određenoj postoji tačno jedna prava koja sadrži tačku A i disjunktna je sa pravom p.

UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

METODIKA NASTAVE MATEMATIKE I RAČUNARSTVA

ČAS ZA SREDNJU ŠKOLU

TEMA: PODUDARNOST

PROFESOR:

dr Nebojša Ikodinović

ASISTENT:

dr Tanja Stojadinović

STUDENT:

Katarina Živanović 169/2009

PODUDARNOST

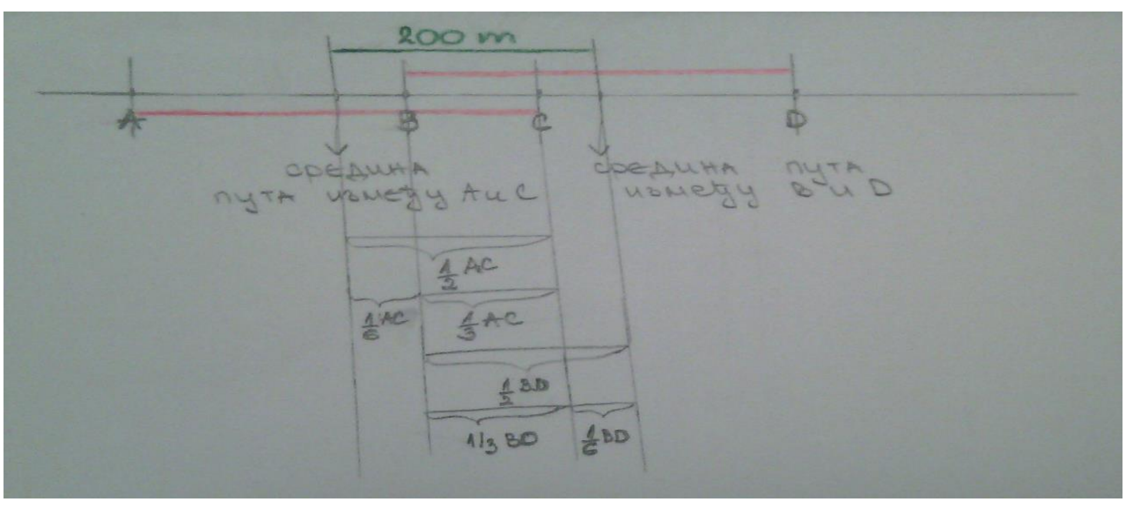
Sa pojmom podudarnosti, osim što ste se susreli još u osnovnoj školi, svaki dan se susrećete. Kada imamo gomilu kopija jednog cd-a, za svaka dva cd-a iz te gomile kažemo da su isti jer su istog oblika i veličine. Dakle možemo reći da su podudarni.

Podsetimo se podudarnosti duži i uglova.

Za dve olovke kažemo da su iste ako su im iste dužine. Predstavimo te olovke dužima AB i CD, gde tačka A predstavlja dno jedne olovke a tačka B vrh te olovke, a isto tako tačke C i D dno i vrh druge olovke. Za duži AB i CD kažemo da su podudarne ako bi se pri preklapanju poklopile tačke A i C kao i tačke B i D, odnosno ako bi rastojanje izmedju A i B bilo isto kao rastojanje između C i D. Možemo da zaključimo da su duži AB i CD podudarne ako su iste dužine.

Zadatak: Petar vozeći biciklu jednim provolinijskim putem prolazi pored četiri prodavnice. Prva i treća prodavnica su na istom rastojanju kao druga i četvrta prodavnica. Rastojanje između druge i treće prodavnice je jedna trećina rastojanja između prve i treće. Petar zna da od mesta gde je sredina puta između prve i treće prodavnice do mesta gde je sredina puta između druge i četvrte prodavnice dužina puta je 200 m. Kolika je dužina puta između prve i treće prodavnice, a kolika je između prve i četvrte?

Rešenje:



Prvo predstavimo prodavnice tačkama na jednoj pravi i neka su redom prva, druga, treća i četvrta prodavnica tačke A, B, C, D. Iz zadatka znamo da je AC=BD, BC=(1/3)*AC =(1/3)*BD. Rastojanje od sredine puta AC do tačke B je jedna šestina puta AC, a rastojanje od tačke C do sredine puta BD je jedna šestina puta BD. Odatle imamo da je :

$AC/6 + BC + BD/6 = 200m.$

$AC/6 + AC/3 + AC/6 = 200$

Dobijamo da je AC=300.

$AD = AC + CD = AC + 2BD/3 = AC + 2AC/3 = 500.$

Dužina puta između prve i treće prodavnice iznosi 300m , a dužina između prve i četvrte je 500m.

Dva ugla su podudarna kada bismo jedan od tih uglova „stavili“ na ovaj drugi i oni bi se potpuno preklopili, tačnije ako imaju istu meru. Ovako bismo opisno objasnili podudarnost uglova.

O uglovima trebate znati i sledeće stvari:

-Naporedni uglovi jednakih uglova su jednaki među sobom.

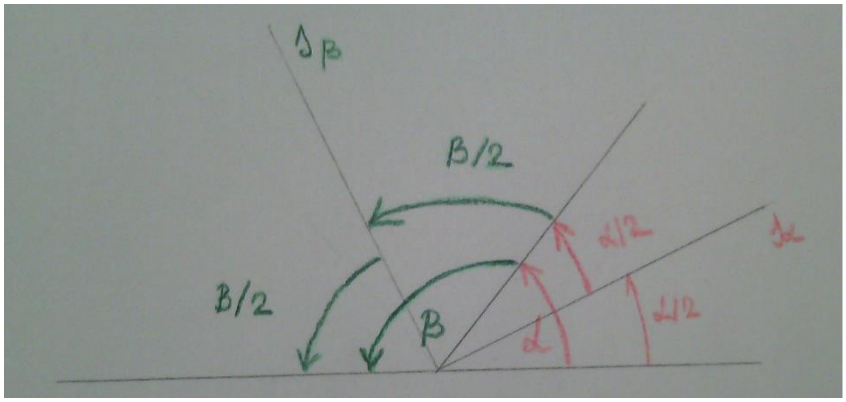
-Unakrsni uglovi su jednaki među sobom.

-Uglovi sa paralelnim kracima su podudarni ili suplementni.

-Uglovi sa normalnim kracima su podudarni ili suplementni.

Zadatak: Odrediti ugao simetrala dva naporedna ugla.

Rešenje:

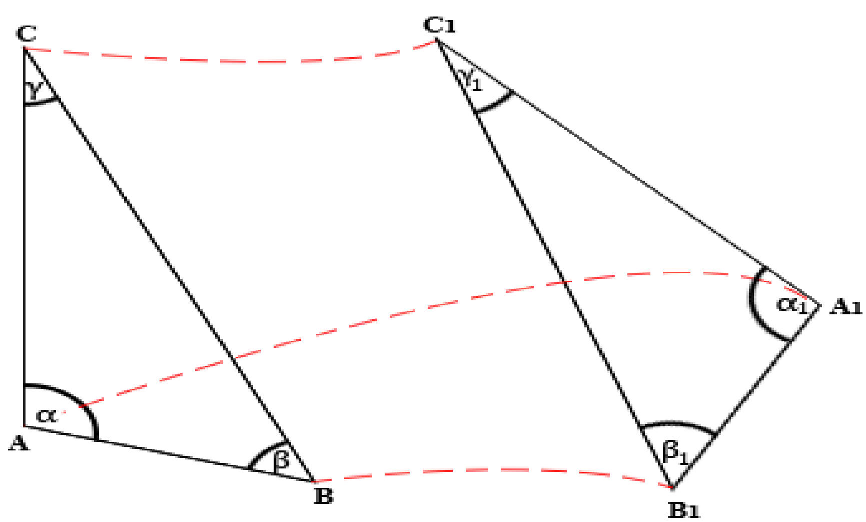


Neka su α i β naporedni uglovi. Tada je $\alpha + \beta = 180°$. Ugao između simetrala jednak je zbiru : $\alpha/2 + \beta/2 = (\alpha + \beta)/2 = 180°/2 = 90°$.

Dakle, ugao između simetrala je prav, pa su one normalne među sobom.

Sada ćemo se baviti podudarnim trouglovima.

Za dva trougla kažemo da su podudarna ako postoji kretanje kojim se oni mogu dovesti do prekalpanja. (Uopšteno: za bilo koje dve geometrijske figure kažemo da su podudarne ako postoji kretanje kojim se one mogu dovesti do prekalpanja.)



Ako bismo izrezali ova dva trougla i preklopili im temena kao na slici, posmatrani trouglovi bi se potpuno preklopili. Pri tome vidimo da je :

$AB=A_1B_1$ $\sphericalangle\alpha=\sphericalangle\alpha_1$

$AC=A_1C_1$ $\sphericalangle\beta=\sphericalangle\beta_1$

$BC=B_1C_1$ $\sphericalangle\gamma=\sphericalangle\gamma_1$,

odnosno stranice i uglovi $\triangle ABC$ jednaki su odgovarajućim stranicama i uglovima $\triangle A_1B_1C_1$.

Zaključujemo da su trouglovi podudarni i pisemo:

$\triangle ABC \cong \triangle A1B1C1$.

Osnovni elementi trougla su stranice i uglovi, ali ne moramo pokazati jednakost svih šest elemenata da bismo bili sigurni da su oni podudarni.

Primer: Sudija na trci jedrilica pre početka trke treba da proveri da li su sva jedra na svim jedrilicama ista bez skidanja svakog jedra. Kako to može učiniti?

Postoji više načina na koje može proveriti da li su jedra na svim jedrlicima ista:

1) Sudija može izmeriti dužine ivica svakog jedra i uporediti ih. Ako su odgovarjuće dužine ivica iste kod svih jedara onda su sva jedra međusobno jednaka.

2) Takođe,sudija može izmeriti visinu svakog jedra, širinu i ugao koji one zaklapaju. Ako su kod svih jedara visina i širina jedra i ugao koji one zaklapaju isti, zaključujemo da su sva jedra ista.

3) Sudija je mogao i da izmeri visinu i širinu svakog jedra i ugao koji se nalazi između širine i treće stranice jedra. Ako se ovi elementi jedra poklapaju kod svih,onda su sva jedra jednaka.

4) Još jedan način je da izmeri širinu jedra i uglove između širine i druge dve stranice jedra. Ako su oni isti kod svih jedara,onda su sva jedra podudarna.

Kako sudija na samo osnovu proveravnja određenih kombinacija elemenata jedra može biti siguran da su sva jedra ista?

Jedra su trougaonog oblika i sudija je na njih primenio poznate stavove o podudarnosti trouglova. Oni nam daju odgovor na pitanje koliko najmanje jednakih elemenata treba da imaju dva trougla da bismo tvrdili da su podudarni.

1) Stav SSS(strana-strana-strana): Dva trougla su podudarna ako i samo ako su stranice jednog trougla jednake odgovarajućim stranicama drugog trougla.

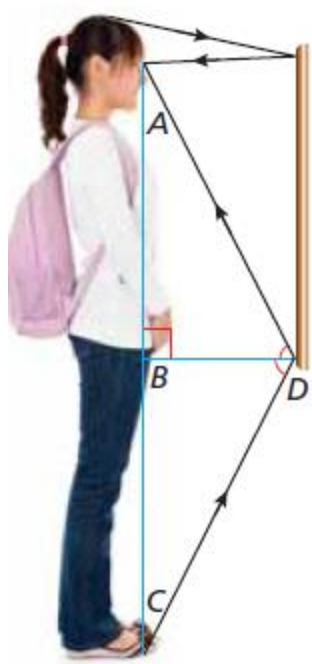
2) Stav SUS(strana-ugao-strana): Dva trougla su podudarna ako i samo ako su dve stranice jednog trougla i ugao zahvaćen njima jednaki odgovarajućim stranicama i uglu drugog trougla.

3) Stav SSU(strana-strana-ugao): Dva trougla su podudarna ako i samo ako su dve stranice i ugao nasparam jedne od njih u jednom trouglu jednaki dvama odgovarajućim stranicama i uglu u drugom trouglu, a uglovi naspram druge stranice u oba trougla su iste vrste(oba oštra ili oba prava ili oba tupa).

4) Stav USU(ugao-strana-ugao): Dva trougla su podudarna ako i samo ako imaju jednaku po jednu stranicu i oba odgovarajuća ugla nalegla na tu stranicu.

Zadatak: Kada svetlosni zrak sa nekog objekta padne na ogledalo, taj zrak se reflektuje u tvoje oči. Na primeru na slici, svetlosni zrak sa tačke C pada na ogledalo na tačku D, a sa tačke D se reflektuje u tvoje oči(na slici je to tačka A). Zakon refleksije (odbijanja) svetlosti glasi : „Upadni ugao je jednak odbojnom uglu. Ulazni zrak, normala i reflektovani zrak nalaze se u istoj ravni",odnosno da je ugao $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ADB$. Dokazati da je ΔABD podudaran ΔCBD.

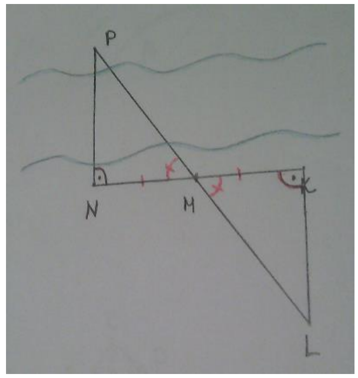
Rešenje:



Posmatrajmo ova dva trougla. Znamo da je $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ADB$, $DB \perp AC$ pa je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = 90^\circ$ i BD je zajednička stranica,pa je na osnovu stava USU $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

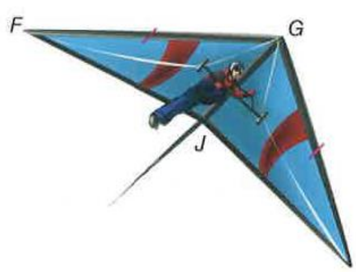
Zadatak: Inženjer treba da izgradi pešački most preko reke. Treba da izmeri širinu reke kako bi odredio dužinu mosta. On to radi na sledeći način: obeležava dve tačke sa različitih strana reka između kojih želi da izmeri rastojanje, tačke N i P su jedna naspram druge. Sa strane na kojoj se nalazi tačka N obeležava još jednu tačku K tako da $NK \perp NP$. Nalazi središte rastojanja NK i obeležava ga sa M. Određuje tačku L takvu da $NK \perp KL$ i L,P,M su kolinearne. Kako na ovaj način inzenjer izmeri širinu reke?

Rešenje:

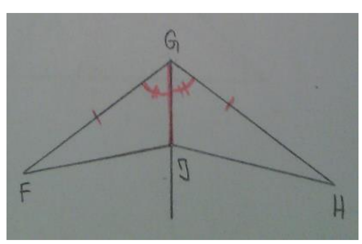


Posmatraćemo △MNP i △MKL. Zato što je NK⊥NP i NK⊥KL znamo da je ∢N=∢K=90°. M je središte NK, pa je NM=KM. Uglovi ∢NMP i ∢KML su unakrsni,pa su jednaki. Iz prethodnog na osnovu stava USU zaključujemo da je Δ MNP ≅Δ MKL. Pa iz toga dobijamo da je NP=KL. Pa inženjer može izmeriti širinu reke tako što izmeri rastojanje KL na obali.

Zadatak: Letilica prikazana na slici se koristi u sportu zvanom zmajarstvo. Krila ove letilice izgledaju kao podudarni trouglovi. Ako je ivica krila FG jednka ivici drugog krila GH, a JG bisektrisa ugla ∢FGH, pokazati da su krila ovog „zmaja" podudarna.



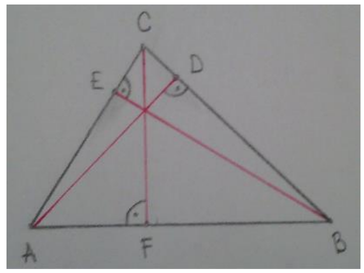
Rešenje:



Posmatrajmo ΔFGJ i ΔHGJ. Znamo da je FG=GH. GJ bisektrisa ∢FGH i onda je ∢FGJ=∢HGJ. GJ je zajednička stranica ova dva trougla. Na osnovu stava SUS ΔFGJ ≅ ΔHGJ.

Zadatak: Visina je manja od svake stranice sa kojom ima zajedničko teme i sa kojom se ne poklapa. Zbir svih visina trougla manji je od obima trougla. Dokazati.

Rešenje:



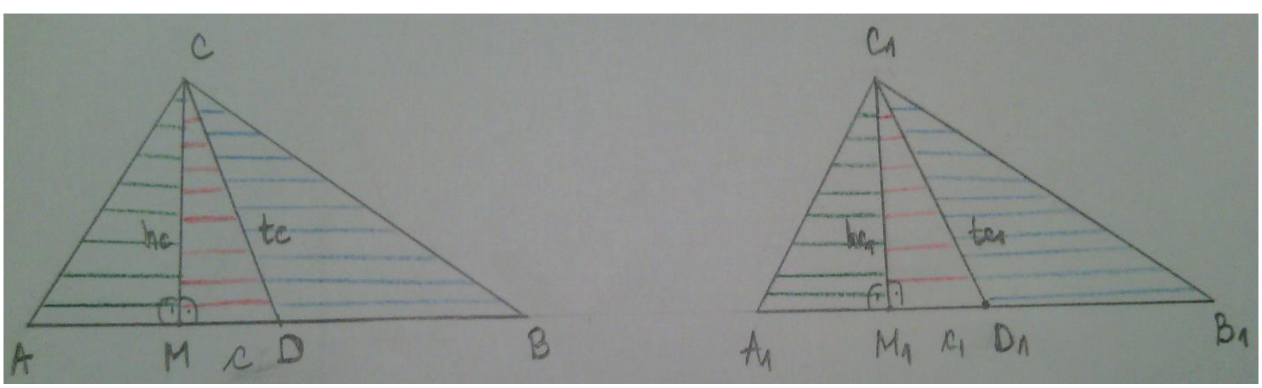
Neka su AD, BE i CF visine △ABC. Treba da pokažemo da je AD<AB, BE<BC i CF<CA. Uočimo trougao △ABD. Pošto je to pravougli trougao , stranica naspram oštrog ugla će biti manja od stranice naspram pravog ugla. Odatle imamo da je AD<AB. Uočimo sad trougao △BEC i on je pravougli trougao ,pa je stranica naspram oštrog ugla manja od stranice naspram pravog ugla. Odatle dobijamo da je BE<BC. Slično, posmatrajući △CFA zaključujemo da je CF<CA.

Prema prethodnom imamo da je AD< c , BE <a i CF <b. Odatle sledi da je

AD+ BE + CF< a+ b + c .

Zadatak: Dokazati da su trouglovi ΔABC i ΔA1B1B1 podudarni kada su im jednaki sledeći odgovarajuči elementi c = c1, tc = tc1, hc = hc1.

Rešenje:



Da bismo dokazali da su ova dva trougla podudarna, moramo dokazati da je ΔACM≅ΔA1C1M1 i ΔMCD≅ΔM1C1D1 i ΔDCB≅ΔD1C1B1.

- Posmatrajmo prvo $\Delta MCD \cong \Delta M1C1D1$.

  tc=tc1

  hc=hc1

  $\sphericalangle CMD = \sphericalangle C1M1D1 = 90°$

Odavde na osnovu stava SSU zaključujemo da je $\Delta MCD \cong \Delta M1C1D1$.

- Iz podudarnosti ta dva trougla imamo da je MD=M1D1(1) i $\sphericalangle MDC = \sphericalangle M1D1C1$ (2).

Iz (1) i toga što je AD=A1D1 sledi da je AM=A1M1.

Iz (2) sledi da je $\sphericalangle BDC = \sphericalangle B1D1C1$.

- Posmatrajmo sad ΔACM i $\Delta A1C1M1$.

  AM=A1M1

  hc=hc1

  $\sphericalangle CMA = \sphericalangle C1M1A1 = 90°$.

Na osnovu SUS sledi da je $\Delta ACM \cong \Delta A1C1M1$.

- Posmatrajmo ΔDCB i $\Delta D1C1B1$.

  c/2=c1/2

  tc=tc1

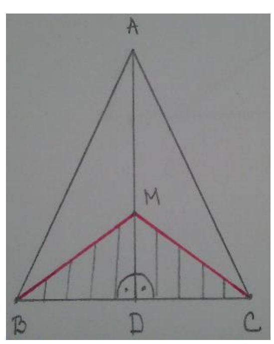
  $\sphericalangle BDC = \sphericalangle B1D1C1$.

Na osnovu SUS sledi da je $\Delta DCB \cong \Delta D1C1B1$.

- Iz svega sledi da je $\Delta ABC \cong \Delta A1B1C1$.

Zadatak: Na visini AD koja odgovara osnovici BC jednakokrakog trougla ABC uočena je tačka M. Dokazati da je MB=MC.

Rešenje:



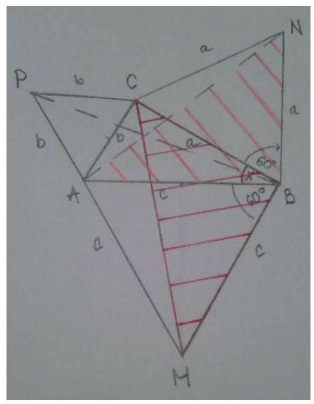
Uzećemo da je tačka M unutar trougla. Posmatarmo trouglove $\triangle BDM$ i $\triangle CDM$.

$BD=DC$, $\sphericalangle BDM=\sphericalangle CDM=90°$, MD je zajednička stranica . Na osnovu stava SUS sledi da je

$\triangle BDM \cong \triangle CDA$. Pošto su sve stranice i svi uglovi $\triangle BDM$ jednaki odgovarajaućim stranicama i uglovima $\triangle CDM$, dobijamo da je $MB = MC$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak: Dat je trougao ABC. Na njegovim stranicama spolja su konstruisani jednakostranični trouglovi ABM , BCN i ACP. Dokazati da su duži AN, BP i CM jednake.

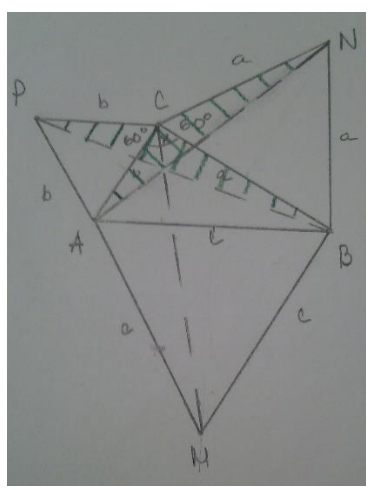
Rešenje:



Uočimo trouglove koji sadrže duži CM i AN, to su trouglovi $\triangle BCM$ i $\triangle ABN$.

$BC = BN = a$,$MB= AB= c$, $\sphericalangle MBC = \sphericalangle ABN = 60° + x$. Na osnovu stava SUS sledi da je

$\triangle BCM \cong \triangle ABN$, a odatle dobijamo da je $CM = AN(1)$.



Sada uočimo trouglove koji sadrže AN i BP. To su trouglovi △ACN i △BPC.

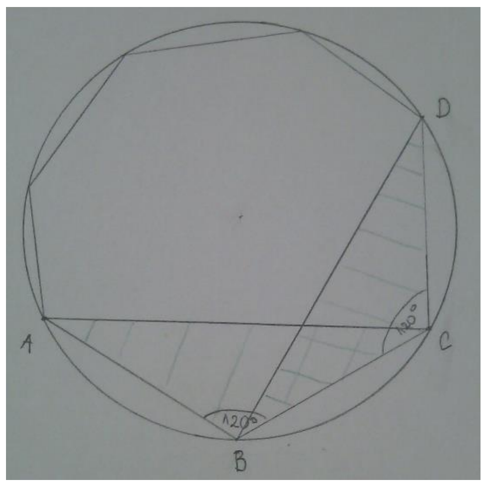
BC=CN=a , CP=AC=b , ∢BCP=∢NCA =60° +x . Odavde na osnovu stava SUS sledi da je

△ACN ≅ △BPC. Iz podudarnosti ovih trouglova imamo da je AN=BP(2).

Iz (1) i (2) dobijamo da je AN=BP=CM .

Zadatak: Konveksni sedmougao je upisan u krug . Tri njegova ugla su jednaka 120°.Dokazati da su dve od njegovih stranica jednake.

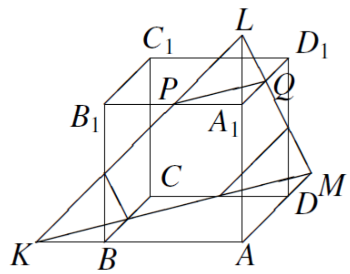
Rešenje:



Dva od ova tri ugla od 120° moraju biti susedna, inače bi ova tri ugla zauzimala ceo krug. Neka su ∢ABC i ∢BCD dva susedna ugla od 120°. Posmatrajmo △ABC i △BCD. BC je zajednička stranica , (1) ∢ABC =∢BCD (po zadatku). ∢BAC=∢CDB kao periferijski uglovi nad istom tetivom (nalaze se sa iste strane tetive), iz toga i (1) sledi da je ∢ACB=∢DBC. Time je zadovoljen stav USU pa sledi da je △ABC ≅△BCD. Odatle sledi da je AB=CD.

Zadatak: Jedan presek pravougaone kutije je pravilan šetougao. Dokazati da je kutija kocka.

Rešenje:



Ideja je da produžimo svaku drugu stranicu šestougla da bi dobili jednakostraničan trougao. Tačke K, L ,M ovog trougla leže na pravama AB, AA1 i AD kutije. Posmatrajmo trouglove ΔKLA i ΔLMA. KL=LM, ∢KAL=∢LAM=90° i AL je zajednička stranica. Zadovoljeni su uslovi stava SSU, pa je ΔKLA≅ ΔLMA. A iz podudarnosti ta dva trougla imamo da je KA=MA. Slično dobijamo da je KA=LA. Pošto je PQ=KM/3, ΔLPQ ~ΔLKM i ΔLPA1~ΔLKA. A odatle je AA1=2AL/3, AB=2AK/3 i AD=2AM/3, pa odatle sledi AB=AA1=AD.