4.3. **Структуре првог реда**

Појам математичке структуре заузима централно место у савременој математици.[1] Уопштено говорећи, математичку структуру чини неки скуп, такозвани *домен*, *носач* или *универзум* структуре, **заједно са** релацијама и операцијама дефинисаним над доменом. Издвајамо један пример типичне структуре, коју чине:

[1] Иако се идеја структуре, у извесном смислу, среће и у радовима Лајбница, верује се да је Шредер 1895. године први пут дефинисао појам апстрактне структуре.

- скуп $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$,
- бинарне операције: сабирање $(+)$, множење $(\cdot)$, степеновање $(\uparrow)$, при чему ћемо уместо $m \uparrow n$ краће писати m^n, и
- константа 1.

Ову структуру краће означавамо као уређену петорку, наводећи све оно што је чини: $(\mathbb{N}^+, +, \cdot, \uparrow, 1)$. Средином шездесетих година, Алфред Тарски је проучавао законитости које важе у овој структури, полазећи од основних идентитета које је назвао *средњошколским идентитетима*:

HSI – High School Identities

$$(HSI)\ \begin{cases} \forall x \forall y (x + y = y + x) \\ \forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z) \\ \forall x (x \cdot 1 = x) \\ \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x) \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z) \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z) \\ \forall x (x^1 = x) \\ \forall x (1^x = 1) \\ \forall x \forall y \forall z (x^{y+z} = x^y \cdot x^z) \\ \forall x \forall y \forall z ((x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z) \\ \forall x \forall y \forall z ((x^y)^z = x^{y \cdot z}) \end{cases}$$

Занимљиво је да наведене идентитете задовољавају и разне друге структуре *истог типа*. Једна таква структура је $(\{0,1\}, +, \cdot, \uparrow, 1)$, са доменом $\{0, 1\}$ над којим су дате три бинарне операције (дефинисане наредним таблицама) и константа 1:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\uparrow$	0	1
0	1	0
1	1	1

Подсећамо на следеће парове еквивалентних исказних формула:
$x \vee y \equiv y \vee x$
$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$
$x \wedge 1 \equiv x$
$x \wedge y \equiv y \wedge x$
$x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$
$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$1 \Rightarrow x \equiv x$
$x \Rightarrow 1 \equiv 1$
$y \vee z \Rightarrow x \equiv (y \Rightarrow x) \wedge (z \Rightarrow x)$
$z \Rightarrow x \wedge y \equiv (z \Rightarrow x) \wedge (z \Rightarrow y)$
$z \Rightarrow (y \Rightarrow x) \equiv z \wedge y \Rightarrow x$

Није тешко уочити да операције $+$ и $\cdot$ заправо представљају редом дисјункцију и конјункцију над $\{0, 1\}$, а да $x \uparrow y$, тј. x^y одговара исказној формули $y \Rightarrow x$. Једноставно је проверовати да у структури $(\{0,1\}, +, \cdot, \uparrow, 1)$ важе све HSI законитости. Све структуре одговарајућег типа, које задовољавају HSI законитости називају се HSI алгебрама.

▼ Бројевне структуре

Најважније примере структура чине оне над скуповима бројева. Овај одељак садржи кратак опис две важне конструкције којима долазимо до важних бројевних структура.

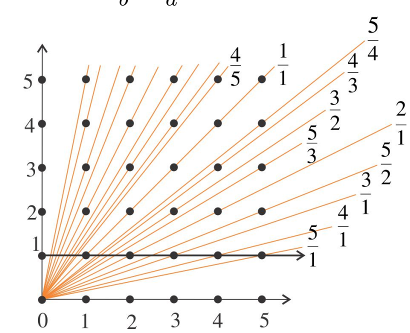
I Прва конструкција се односи на увођење **ненегативних рационалних бројева**. Да би детаљи конструкције били јаснији, поред ознака које су уведене током развоја теорије скупова, на маргини наводимо и опис основних корака преведен на уобичајене, познате ознаке које се користе у рачуну са разломцима.

На скупу $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^+$ дефинишемо бинарну релацију $\sim$:

$$(a,b)\sim(c,d) \;\Leftrightarrow\; a\cdot d=b\cdot c, \;\text{ за } (a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^+$$

У конструкцији коју описујемо, уређени пар $(a,b)\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{Z}$ представља разломак $\dfrac{a}{b}$. Релација $\sim$ је заправо једнакост међу разломцима:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\;\Leftrightarrow\; ad=bc.$$



Лема 1. *Релација $\sim$ је релација еквиваленције на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^+$.*

Доказ. (Р) Из $a\cdot b=b\cdot a$ следи $(a,b)\sim(a,b)$.

(С) Ако је $(a,b)\sim(c,d)$, онда је $a\cdot d=b\cdot c$, одн. $c\cdot b=d\cdot a$, па је $(c,d)\sim(a,b)$.

(Т) Нека је $(a,b)\sim(c,d)$ и $(c,d)\sim(e,f)$. Тада је $a\cdot d=b\cdot c$ и $c\cdot f=d\cdot e$. Ако је $c=0$, онда је и $a=e=0$ (јер је $b\neq 0$ и $d\neq 0$), па је $a\cdot f=b\cdot e$, тј. $(a,b)\sim(e,f)$. Претпоставимо да је $c\neq 0$. Тада је

$$(*)\qquad (a\cdot d)\cdot(c\cdot f)=(b\cdot c)\cdot(d\cdot e).$$

Применом комутативности и асоцијативности изводимо:

$$(a\cdot d)\cdot(c\cdot f)=\cdots=(a\cdot f)\cdot(c\cdot d) \;\text{ и }\; (b\cdot c)\cdot(d\cdot e)=\cdots=(b\cdot e)\cdot(c\cdot d).$$

Из једнакости $(*)$ и последње две једнакости добијамо

$$(a\cdot f)\cdot(c\cdot d)=(b\cdot e)\cdot(c\cdot d).$$

Најзад, применом закона скраћивања, јер је $c\cdot d\neq 0$: $a\cdot f=b\cdot e$. Дакле, $(a,b)\sim(e,f)$. □

Количнички скуп $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^+/\sim$ називамо скупом ненегативних рационалних бројева и означавамо $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$.

Сабирање и множење на скупу $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ дефинишемо користећи својства дата у следећој леми. Да бисмо поједноставили запис, изостављамо ознаку множења природних бројева и подразумевамо приоритет множења над сабирањем.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Лема 2. *Ако је $(a,b)\sim(a_1,b_1)$ и $(c,d)\sim(c_1,d_1)$, онда је:*
(1) $(ad+bc,bd)\sim(a_1d_1+b_1c_1,b_1d_1)$
(2) $(ac,bd)\sim(a_1c_1,b_1d_1)$

Доказ. Доказ остављамо за вежбу. Истичемо само реформулацију тврђења које треба доказати: из претпоставки $ab_1=ba_1$ и $cd_1=dc_1$, треба извести:
(1) $(ad+bc)(b_1d_1)=(bd)(a_1d_1+b_1c_1)$;
(2) $(ac)(b_1d_1)=(bd)(a_1c_1)$. □

Сабирање и множење, $+_\mathbb{Q}, \cdot_\mathbb{Q} : \mathbb{Q}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Q}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ дефинишемо једнакостима:

$$[(a,b)]_\sim +_\mathbb{Q} [(c,d)]_\sim \overset{\text{def}}{=} [(ad+bc, bd)]_\sim, \quad [(a,b)]_\sim \cdot_\mathbb{Q} [(c,d)]_\sim \overset{\text{def}}{=} [(ac, bd)]_\sim.$$

Претходна лема заправо показује да су наведене дефиниција операција коректне. Наиме, операције су дефинисане у односу на изабране представнике класа еквиваленције. Лема показује да избор представника не зависи од избора представника: увека добијамо исти резултат, које год представнике да изаберемо. Ако је $(a,b) \sim (a_1,b_1)$ и $(c,d) \sim (c_1,d_1)$, тј. $[(a,b)]_\sim = [(a_1,b_1)]_\sim$ и $[(c,d)]_\sim = [(c_1,d_1)]_\sim$, онда је:

$$[(ad+bc, bd)]_\sim = [(a_1d_1+b_1c_1, b_1d_1)]_\sim \ \text{ и } \ [(ac,bd)]_\sim = [(a_1c_1, b_1d_1)]_\sim$$

Бинарну релацију $\leqslant_\mathbb{Q}$ уводимо на следећи начин:

$\frac{a}{b} \leqslant_\mathbb{Q} \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leqslant bc$

$$[(a,b)]_\sim \leqslant_\mathbb{Q} [(c,d)]_\sim \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ad \leqslant bc,$$

где је $\leqslant$ уређење природних бројева. Слично претходном, доказује се и коректност ове дефиниције, тј. да из $(a,b) \sim (a_1,b_1)$ и $(c,d) \sim (c_1,d_1)$ следи:

$$[(a,b)]_\sim \leqslant_\mathbb{Q} [(c,d)]_\sim \ \text{ акко } \ [(a_1,b_1)]_\sim \leqslant_\mathbb{Q} [(c_1,d_1)]_\sim.$$

Уобичајено је да се индекс $\mathbb{Q}$ изоставља у ознакама $+_\mathbb{Q}$, $\cdot_\mathbb{Q}$, $\leqslant_\mathbb{Q}$, тј. да за сабирање, множење и уређење целих бројева користе исте ознаке као за сабирање, множење и уређење природних бројева, што је давно усвојен обичај у случајевима када се *увођењем нових бројева, операција и релација са њима, поштују операције и релације старих бројева, тј. када је сачуван рад са старим бројевима.*[8]

[8] Ово начело проширивања скупова бројева познато је и као Хенкелов принцип перманенције.

Лема 3. *За произвољне $x, y, z \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$:*

$$\begin{array}{ll}
x+(y+z) = (x+y)+z & x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z \\
x+y = y+x & x\cdot y = y\cdot x \\
x+0 = x & x\cdot 1 = x,\ x\cdot 0 = 0 \\
 & x \neq 0 \Rightarrow (\exists! u \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0})\, x\cdot u = 1
\end{array}$$

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

$$x \leqslant x$$

$$x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$$

$$x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$$

$$x \leqslant y \vee y \leqslant x$$

$$x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+u \qquad x \leqslant y \Rightarrow x\cdot z \leqslant y\cdot z$$

Ако $\mathbb{Q}_{>0}$ означава скуп $\mathbb{Q}_{\geqslant 0} \setminus \{0\}$, није тешко уочити да сабирање и множење представљају и операције скупа $\mathbb{Q}_{>0}$ (збир и прозивод бројева различитих од нуле, такође су различити од нуле). Ослањајући се на особине из претходне леме, уводимо унарну операцију ${}^{-1} : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$, тзв. *реципрочну вредност.*

▼ Структуре и њихов вокабулар

Уопште, операцијско-релацијску структуру чини скуп заједно са неким својим операцијама, релацијама и елементима (константама).

$S^n = \underbrace{S \times \cdots \times S}_{n \text{ пута}}$ је скуп свих уређених n-торки елемената из S.

Дефиниција 1. *Нека је S произвољан непразан скуп и $n \geqslant 1$.*

(1) Свака функција из S^n у S, назива се n-арна операција скупа S. Посебно, функције из S у S називамо унарним операцијама; функције из $S \times S$ у S називамо бинарним операцијама.

(2) Сваки подскуп од S^n, назива се n-арна релација скупа S. Посебно, подскупове од S називамо унарним релацијама; подскупове од $S \times S$ називамо бинарним релацијама.

Ако је $R \subseteq S^n$ и $a_1, \ldots, a_n \in S$, уместо $(a_1, \ldots, a_n) \in R$ пишемо $R(a_1, \ldots, a_n)$ и читамо 'елементи $a_1, \ldots, a_n$ су у релацији R'. Сваку n-арну релацију можемо посматрати као функцију из S^n у двочлани скуп $\{0, 1\}$ иснитосних вредности (0 за 'нетачно', 1 за 'тачно'), и самим тим исказе

$$\text{'}R(a_1, \ldots, a_n) \text{ је тачно'} \quad \text{и} \quad \text{'}R(a_1, \ldots, a_n) \text{ је нетачно'}$$

записати као једнакости

$$R(a_1, \ldots, a_n) = 1 \quad \text{и} \quad R(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Структуре задајемо тако што наведемо, у облику низа, све оно што је чини. Структуре често означавамо масним словима $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$, по потреби са индексима, при чему углавном користимо слова којима су означени домени (носачи) тих структура, $A, B, C, \ldots$, са одговарајућим индексима.

Пример:
Стандардну структуру природних бројева чини скуп природних бројева $\mathbb{N}$, заједно са релацијом уређења $\leqslant$, унарном операцијом следбеник $' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, (бинарним операцијама) сабиарњем и множењем $+, \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, и константом 0. Користећи структуру $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0)$ илуструјемо наредне појмове.

Вокабулар структуре
Симболи којима означавамо релације, операције и константе неке структуре називамо *вокабуларом* те структуре.

Вокабулар структуре $\mathbf{N}$ чине симболи: $\leqslant, ', +, \cdot, 0$

Вокабулар заједно са логичким симболима чине алфабет тзв. *језика првог реда* који користимо за описивање структуре:

логички симболи	вокабулар структуре
промењљиве:	*симболи константи*;
$x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$	*симболи операција*, при чему је за сваки симбол одређена његова дужина;
знак једнакости: $=$	*симболи релација*, при чему је за сваки симбол одређена његова дужина.
логичке константе: $\bot$, $\top$	
логички везници: (унарни) $\neg$, (бинарни) $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$	
квантификатори: $\forall$, $\exists$	
помоћни знаци: лева и десна заграда, запета	

Логички симболи су непромењљиви део језика првог реда, док симболе вокабулара одређује тип структуре коју посматрамо.

Изрази

Изразе градимо индуктивно, на уобичајен начин, користећи променљиве, симболе константи, симболе операција и помоћне знаке. Другим речима, користимо правила: $I \to c \mid v \mid F(I, \cdots, I)$, где је c симбол константе, v променљива, и F знак операције (наравно, примењен на одговарајући број једноставнијих израза).

Примери израза над вокабуларом структуре $\mathbf{N}$: $0,\ 0',\ 0' \cdot (0')',\ (x+0)',\ x+y,\ 0' \cdot (x+0'),\ x \cdot x + y \cdot y$, итд. Приликом записивања израза користимо уобичајене договоре о брисању заграда, нпр. попут усвајања приоритета међу операцијама и сл.

Ако је t неки израз, са $V(t)$ означићемо скуп оних променљивих које учествују у грађењу израза t. Наравно, за сваки израз t, скуп $V(t)$ је коначан:

- $V(v) = \{v\}$, за променљиву v; $V(c) = \emptyset$, за симбол константе c;
- $V(F(t_1, \ldots, t_n)) = V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n)$, за симбол операције F дужине n и изразе $t_1, \ldots, t_n$.

Атомске формуле

Логичке константе сматрамо атомским формулама, а сложеније *атомске формуле* добијамо повезивањем два израза знаком једнакости, одн. повезивањем одговарајућег броја израза симболом релације: $A \to \top \mid \bot \mid I = I \mid R(I, \ldots, I)$, где је R симбол релације.

Примери атомских формула над вокабуларом структуре $\mathbf{N}$: $0 = 0$, $0 \leqslant 0'$, $(x \cdot 0) \leqslant (x + 0)$, $x + y = y + x$ итд.

Формуле

Формуле дефинишемо индуктивно, полазећи од атомских формула и повезујући две формуле логичким везницима, и постављањем квантификатора са променљивом испред једне формуле: $F \to A \mid \neg F \mid (F * F) \mid \forall v\, F \mid \exists v\, F$, при чему је v променљива, а $* \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Примери формула над вокабуларом структуре $\mathbf{N}$: $0 = x$, $0 = 0 \wedge \neg 0' \leqslant 0$, $0' \leqslant x \Rightarrow x \leqslant (x \cdot x)$, $\neg \exists x (x + 0') = 0$, $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ итд.

Слободна и везана појављивања променљивих

Појављивање променљиве у формули може бити *слободно* или *везано*. Свако појављивање променљиве које није под дејством квантификатора назива се слободним, а она појављивања која јесу под дејством квантификатора називају се везаним.

Све променљиве које имају слободна појављивања у некој формули називају се **слободне променљиве** те формуле. Скуп свих слободних променљивих формуле α означавамо $\mathrm{Fr}(\alpha)$ и прецизно дефинишемо индукцијом по сложености формуле:

- $\mathrm{Fr}(\bot) = \mathrm{Fr}(\top) = \emptyset$;
- $\mathrm{Fr}(t_1 = t_2) = V(t_1) \cup V(t_2)$;
- $\mathrm{Fr}(R(t_1, \ldots, t_n)) = V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n)$;
- $\mathrm{Fr}(\neg\alpha) = \mathrm{Fr}(\alpha)$;
- $\mathrm{Fr}(\alpha * \beta) = \mathrm{Fr}(\alpha) \cup \mathrm{Fr}(\beta)$, $* \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$;
- $\mathrm{Fr}(\forall x \alpha) = \mathrm{Fr}(\exists x \alpha) = \mathrm{Fr}(\alpha) \setminus \{x\}$.

За сваку формулу α, скуп $\mathrm{Fr}(\alpha)$ је коначан.

Вредност израза (функције)

Изразима, над вокабуларом неке структуре **S**, дефинишу се нове функције, заправо операције над S, на сасвим природан начин. Ако је $V(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, онда израз t означавамо $t(x_1, \dots, x_n)$ када желимо да истакнемо да су све променљиве које учествују у грађењу израза t неке од променљивих $x_1, \dots, x_n$. Додељујући променљивама $x_1, \dots, x_n$ редом неке вредности $a_1, \dots, a_n$ из S, добијамо јединствену вредност $t(a_1, \dots, a_n) \in S$:

$$S^n \ni (a_1, \dots, a_n) \mapsto t(a_1, \dots, a_n) \in S;$$

на овај начин је дефинисана једна функција (заправо n-арна операција) из S^n у S.

Над вокабуларом структуре **N**, наводимо вредности функције дефинисане изразом $t(x_1, x_2, x_3) = x_1' \cdot (x_2 + 0')$ за неке валуације променљивих:

- $t(2, 1, 4) = 2' \cdot (1 + 0') = 6$,
- $t(3, 3, 3) = 3' \cdot (3 + 0') = 16$,
- $t_5(7, 13, 31) = 7' \cdot (13 + 0') = 112$ итд.

Ако је $\mathrm{Fr}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, онда формулу α означавамо и са $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ када желимо да истакнемо чињеницу да су све слободне променљиве формуле α неке од променљивих $x_1, x_2, \dots, x_n$. Додељујући променљивама $x_1, \dots, x_n$ редом неке вредности $a_1, \dots, a_n$ из M, добијамо јединствену *истинитосну* вредност $\alpha(a_1, \dots, a_n)$:

$$S^n \ni (a_1, \dots, a_n) \mapsto \alpha(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\};$$

на овај начин је дефинисана једна функција из S^n у $\{0, 1\}$, тј. једна n-арна релација скупа S.

Истинитосна вредност формуле

Приликом одређивања истинитосне вредности сложенијих формула користимо таблице исказних везника и следећа правила за квантификаторе:

- ако је $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ формула облика $\forall x \theta(x, x_1, \dots, x_n)$, онда је за $a_1, \dots, a_n \in S$,

$$\alpha(a_1, \dots, a_n) = \min_{a \in S} \theta(a, a_1, \dots, a_n);$$

- ако је $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ формула облика $\exists x \theta(x, x_1, \dots, x_n)$, онда је за $a_1, \dots, a_n \in S$,

$$\alpha(a_1, \dots, a_n) = \max_{a \in S} \theta(a, a_1, \dots, a_n).$$

Примери релација дефинисаних изразима над вокабуларом структуре **N**:

- $\alpha_1(x, y)$ је $x' \leqslant y \Rightarrow x \leqslant y'$; нпр. $\alpha_1(0, 0)$, $\alpha_1(0, 1)$, $\alpha_1(1, 0)$, $\alpha_1(0, 2)$, $\alpha_1(2, 0)$ су тачни искази;
- $\alpha_2(x, y)$ је формула $\exists z\, (x + z = y)$; нпр. $\alpha_2(3, 0)$ је нетачно, $\alpha_2(0, 3)$ је тачно, итд.
- $\alpha_3(x)$ је формула $\forall y\, (x \cdot y = x)$; нпр. $\alpha_3(0)$ је тачно, $\alpha_3(1)$ је нетачно, итд.

Тачност реченице

Формула σ је **реченица** ако нема слободних променљивих, тј. ако је $\mathrm{Fr}(\alpha) = \emptyset$. На (не)истинитост реченице у некој структури не утичу валуације променљивих. Да је реченица σ тачна у некој структури **S**, записујемо $\mathbf{S} \models \sigma$ и кажемо да је структура **S** *модел* реченице σ. Ако реченица σ није тачна у **S** пишемо $\mathbf{S} \not\models \sigma$ и кажемо да је **S** *контрамодел* реченице σ. Приметимо да ако $\mathbf{S} \not\models \sigma$, онда $\mathbf{S} \models \neg\sigma$.

Пример 1. $(\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0) \models \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$
$(\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0) \models \forall x \forall y (x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \land y = 0)$
$(\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0) \models \forall x (\neg x = 0 \Rightarrow \exists y (x = y'))$
$(\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0) \models \exists y \forall x (x \cdot y = x)$
$(\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0) \models \neg \exists x (x \cdot x = 0'')$
$(\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0) \models \exists x (x \cdot x = 0'''')$
итд.

Најједноставнија класификација (операцијско-релацијских) структура врши се према вокабулару, тј. према броју и дужини релација и операција, као и броју константи које учествују у њиховој дефиницији. За структуре које имају исти вокабулар кажемо да су истог типа. Међу структурама истог типа издвајамо оне које задовољавају неке изабране особине, тј. задовољавају одређене *теорије*.

Дефиниција 2. *Теорија неког вокабулара јесте било који скуп реченица тог вокабулара.*

Издвајамо један, посебно важан пример теорије – **теорију уређених група**. Вокабулар уређених група чине следећи симболи: једне бинарне релације, једне бинарне операције, једне унарне операције и симбол једне константе; често се у општем случају користе следећи симболи: $\leq$, $*$, $^{-1}$, e. Теорију уређених група чине следеће реченице:
(R) $\forall x \ (x \leq x)$
(AS) $\forall x \forall y \ (x \leq y \land y \leq x \Rightarrow x = y)$
(T) $\forall x \forall y \forall y \ (x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z)$
(A) $\forall x \forall y \forall z \ (x * (y * z) = (x * y) * z)$
(N) $\forall x \ (x * e = x)$
(I) $\forall x \ (x * x^{-1} = e)$
(S) $\forall x \forall y \forall z \ (x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z \land z * x \leq z * y)$

Уређена група је свака структура $(G, \leq, *, ^{-1}, e)$ која задовољава наведене аксиоме. На пример, структура $(\mathbb{Q}_{>0}, \leqslant, \cdot, ^{-1}, 1)$ јесте пример уређене групе.

▼ Семантичка и синтаксна последица

Један од најважнијих логичких концепата јесте појам *последице*. Уводимо две врсте последице – *семантичку последицу* и *синтаксну последицу*.

Дефиниција 3. *Нека је* Γ *нека теорија (скуп реченица). Реченица* α *је* ***семантичка последица*** *теорије* Γ*, у ознаци* $\Gamma \models \alpha$*, ако за сваку структуру* **S**,

$$\text{из } \mathbf{S} \models \gamma, \text{ за свако } \gamma \in \Gamma, \text{следи да } \mathbf{S} \models \alpha.$$

Уместо $\emptyset \models \alpha$ *пишемо* $\models \alpha$.

Формула α је **семантичка** последица скупа претпоставки Γ ако је α тачно у **свим структурама** у којима су тачне претпоставке из Γ.

Ако је $\models \alpha$, тј. α је тачно у свим структурама одговарајућег вокабулара, кажемо да је α ваљана реченица.

Посебно истичемо да знак $\models$ користимо двојако:

- као ознаку односа између структуре и реченице; $\mathbf{S} \models \alpha$ значи да је α **тачно** у структури $\mathbf{S}$;
- као ознаку односа између скупа реченица и једне реченице; $\Gamma \models \alpha$ значи да је α **семантичка последица** скупа формула Γ.

Пример 2. Трагање за особинама уређених група, тј. тврђењима која су тачна у свим уређеним групама представља потрагу за последицама претпоставки које се узете за аксиоме теорије уређених група. На пример, да ли у уређеним групама важи:

$$\forall x \forall y \forall z (x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y)$$

Ако Γ_{OG} означава теорију уређених група, а σ горњу реченицу, питање је да ли важи $\Gamma_{\mathrm{OG}} \models \sigma$. Одговор је потврдан.

Нека је $(G, \leq, *, ^{-1}, e)$ произвољна група.

1. Изаберимо произвољне x, y, z из G, такве да је $x * z \leq y * z$.

Тада је

2. $(x * z) * z^{-1} \leq (y * z) * z^{-1}$,

3. $x * (z * z^{-1}) \leq y * (z * z^{-1})$, [из претходног према закону асоцијативности]

4. $x * e \leq y * e$, [из претходног јер је $z * z^{-1} = e$]

5. $x \leq y$, [из претходног јер је $x * e = x$ и $y * e = y$]

6. $\forall x \forall y \forall z (x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y)$. [јер су x, y, z произвољни елементи]

Иако током овог доказа, замишљамо да радимо са неком конкретном (произвољно изабраном) уређеном групом, али ниједног тренутка нисмо имали потребу да прецизирамо о којој је заиста групи реч, већ смо искључиво користили законитости које група задовољава по дефиницији, као и добро позната својства једнакости и операција (функција). Другим речима, значајне су само аксиоме теорије група, док 'семантика' није од пресудног значаја.

Претходни пример указује на концепт синтаксне последице, који је већ разматран у систему природне дедукције. Наводимо кратак резиме правила природне дедукције која смо до сада разматрали и најављујемо нова правила за језик првог реда.

- Прво смо разматрали правила природне дедукције за *исказну логику* чије су формуле грађене од исказних слова, логичке константе $\perp$ и логичких везника $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$.
- Затим смо разматрања проширили на формуле *предикатске логике*, у којој су исказна слова замењена атомским формулама и додати су квантификатори $\forall$ и $\exists$; претходним правилима додата су и правила за квантификаторе.

- У наставку разматрамо формуле *језика првог реда*, које садрже богатији скуп атомских формула: релацијским симболима се повезују изрази (који могу да сарже и операцијске знаке, а не само променљиве и симболе константи, као у случају предикатске логике), и додатно, као атомске формуле се појављују и једнакости; уз одговарајућа уопштења правила за квантификаторе, додајемо и правила за једнакост.

Дефиниција 4. *Ако је Γ нека теорија (скуп реченица). Реченица α је* ***синтаксна последица*** *теорије Γ, ако се секвент $\Gamma \vdash \alpha$ може добити применом правила исказне логике (страна* **??***) и следећих правила за квантификаторе и једнакости, коначан број пута:*

$$(\forall x_{\mathrm{E}})\quad \frac{\forall x\alpha}{\alpha[x/t]} \qquad\qquad (\exists x_{\mathrm{U}})\quad \frac{\alpha[x/t]}{\exists x\alpha}$$

$$(\forall x_{\mathrm{U}})\quad \frac{\begin{array}{|l} v \\ \quad\vdots \\ \quad \alpha[x/v] \end{array}}{\forall x\alpha} \qquad\qquad (\exists x_{\mathrm{E}})\quad \frac{\exists x\alpha \quad \begin{array}{|l} v \quad \alpha[x/v] \\ \quad\vdots \\ \quad \gamma \end{array}}{\gamma}$$

$$(=_{\mathrm{U}})\quad \frac{}{t=t} \qquad\qquad (=_{\mathrm{E}})\quad \frac{\alpha[x/t] \quad t=u}{\alpha[x/u]}$$

Важно! (1) Формула $\alpha[x/t]$ означава формулу која је добија истовременом заменом свих слободних појављивања променљиве x у формули α изразом t, при чему се ниједна променљива израза t није везана.
(2) У поддоказима правила $(\forall x_{\mathrm{U}})$ и $(\exists x_{\mathrm{E}})$, појављује се тзв. *свежа променљива v* која се у формулама ван поддоказа не појављује слободно.

Лема 4. *1.* $\vdash \forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1)$

2. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3)$

Доказ. (1) Изводимо секвент $\vdash \forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1)$:

1.	x_1, x_2	Уводимо свеже променљиве да бисмо доказали $\forall x_1 \forall x_2 \cdots$;
2.	$x_1 = x_2$	додатна претпоставка;
		Нека је $\alpha(x)$ формула $x = x_1$;
3.	$x_1 = x_1$	$(=_{\mathrm{U}})$; једнакост $x_1 = x_1$ је заправо формула $\alpha[x/x_1]$;
4.	$x_2 = x_1$	$(=_{\mathrm{E}})$, 2, 3; једнакост $x_2 = x_1$ је заправо формула $\alpha[x/x_2]$;
5.	$x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1$	$(\Rightarrow_{\mathrm{U}})$, 2-4;
6.	$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1)$	$\forall x_{1\mathrm{U}}$, $\forall x_{2\mathrm{U}}$ 1-5

(2) Изводимо секвент $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3)$:

1.	x_1, x_2, x_3	Уводимо свеже променљиве;
2.	$x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3$	додатна претпоставка;
		Нека је $\alpha(x)$ формула $x_1 = x$;
3.	$x_1 = x_2$	$(\wedge^{\mathrm{L}}_{\mathrm{E}})$; једнакост $x_1 = x_2$ је формула $\alpha[x/x_2]$;
4.	$x_2 = x_3$	$(\wedge^{\mathrm{D}}_{\mathrm{E}})$;
5.	$x_1 = x_3$	$(=_{\mathrm{E}})$, 3, 4; једнакост $x_1 = x_3$ је формула $\alpha[x/x_3]$;
6.	$x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3$	$(\Rightarrow_{\mathrm{U}})$, 2-5;
7.	$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3)$	$\forall x_{1\mathrm{U}}$, $\forall x_{2\mathrm{U}}$, $\forall x_{3\mathrm{U}}$ 1-6

□

Изведена правила могу знатно да олакшају доказивање секвената. У наредној леми дајемо неколико изведених правила која се односе на једнакости.

Лема 5.

$$\frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}(=_{\mathrm{S}}) \qquad \frac{t_1 = t_2 \quad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}(=_{\mathrm{T}}) \qquad \frac{t_1 = t_2}{t[x/t_1] = t[x/t_2]}(=_{\mathrm{sup}})$$

Доказ. Наводимо само доказ правила $(=_{\mathrm{sup}})$. Наравно, $t[x/t_1]$ је израз добијен истовременом заменом свих појављивања променљиве x у t изразом t_1.

Нека је $\alpha(y)$ формула $t[x/t_1] = t[x/y]$.

1.	$t_1 = t_2$	претпоставка;
2.	$t[x/t_1] = t[x/t_1]$	$(=_{\mathrm{U}})$; једнакост $t[x/t_1] = t[x/t_1]$ је формула $\alpha[y/t_1]$;
3.	$t[x/t_1] = t[x/t_2]$	$(=_{\mathrm{E}})$, 1, 2; једнакост $t[x/t_1] = t[x/t_2]$ је заправо формула $\alpha[y/t_2]$. $\square$

Пример 3. Применом правила природне дедукције из теорије уређених група Γ_{OG} изводимо последицу $\forall x \forall y \forall z (x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y)$. Извођење секвента

$$\Gamma_{\mathrm{OG}} \vdash \forall x \forall y \forall z (x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y)$$

веома је блиско доказу који је дат у примеру 2, на страни 8. Издвајамо само неколико карактеристичних корака извођења.

1.	$\forall x \forall y \forall z (x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z \wedge z * x \leq z * y)$	претпоставка из Γ_{OG}
	$\vdots$	
$i.$	x, y, z	уводимо свеже променљиве;
$(i+1).$	$x * z \leq y * z$	додатна претпоставка;
	$\vdots$	
$j.$	$(x * z) * z^{-1} \leq (y * z) * z^{-1}$	из 1. $\forall x_E, [x/x]; \forall y_E, [y/z]; \forall z_E, [z/z^{-1}]; (\Rightarrow_E); (\wedge_E^D)$
	$\vdots$	
$n.$	$x \leq y$	
$(n+1).$	$x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y$	$(\Rightarrow_U)$, $(i+1).-n.$
	$\forall x \forall y \forall z (x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y)$	$\forall x_U, \forall y_U, \forall z_U$, $i.-(n+1).$

Иако су семантичка последица ($\models$) и синтаксна последица ($\vdash$) дефинисане на сасвим различите начине, поседују низ заједничких особина.

Теорема 1. [***Теорема сагласности***] *Ако је $\Gamma \vdash \alpha$, онда је $\Gamma \models \alpha$.*

[**Теорема сагласности**] Ако се формула α се може доказати (извести) из претпоставки Γ, онда је α тачно у свим моделима скупа Γ.

Специјално, ако је α формула $\perp$, онда:

$$\text{Из } \Gamma \vdash \perp \text{ следи } \Gamma \models \perp.$$

Ако $\Gamma \vdash \perp$, кажемо да је Γ *противречан* скуп формула; $\Gamma \models \perp$ значи да Γ нема модел, тј. не постоји структура у којој су тачне све формуле из Γ. Краће речено: *Противречан скуп формула нема модел.* Претходна теорема се често користи да би се показало да се нека реченица **не може** доказати из датих претпоставки. Теорему сагласности можемо формулисати и у овом облику:

$$\text{Ако } \Gamma \not\models \alpha, \text{ онда } \Gamma \nvdash \alpha.$$

$\Gamma \not\models \alpha$ значи да постоји структура $\mathbf{S}$ која задовољава све реченице скупа Γ, али не задовољава α, тј. $\mathbf{S} \models \Gamma$ и $\mathbf{S} \not\models \alpha$. На овај начин се на пример, доказује да чувена Аксиома паралелности није последица осталих аксиома еуклидске геометрије. Овом приликом наводимо знатно једноставнији пример: да комутативност није последица осталих аксиома теорије група.

Пример 4. Докажимо да се закон комутативности, тј. формула $\forall x \forall y (x * y = y * x)$ не може извести из аксиома теорије група T_{G}:
(A) $\forall x \forall y \forall z \ (x * (y * z) = (x * y) * z)$
(N) $\forall x \ (x * e = x)$
(I) $\forall x \ (x * x^{-1} = e)$.

Да бисмо доказали да $T_{\mathrm{G}} \nvdash \forall x \forall y (x * y = y * x)$, довољно је доказати да $T_{\mathrm{G}} \not\models \forall x \forall y (x * y = y * x)$, за шта је довољно да конструишемо групу чија бинарна операција није комутативна. Једна од њих је група $(S_3, \circ, ^{-1}, \sigma_1)$, где је S_3 скуп свих пермутација (бијекција) скупа $\{1, 2, 3\}$ чију су елементи:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Да група није комутативна показују једнакости:

$$\tau_3 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_2, \ \tau_2 \circ \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_3.$$

Тачан је обрат теореме теореме сагласности.

Теорема 2. [***Теорема потпуности***] *Ако је $\Gamma \models \alpha$, онда је $\Gamma \vdash \alpha$.*

Одељак завршавамо примерима који илуструју значај развоја дедуктивних система у различитим областима.

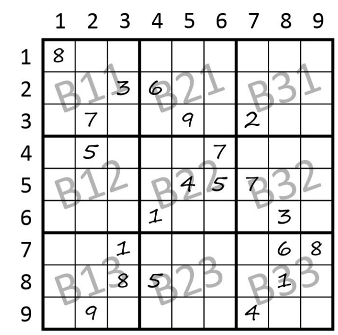
Пример 5. Занимљиву илустрацију уведених логичких концепата представља популарна игра Судоку. Подсећамо, 9×9 табелу, која је подељена и на девет 3 блокова, као на слици десно, треба попунити бројевима, од 1 до 9, тако да се сваки број појављује тачно једном у свакој колони, свакој врсти и сваком 3×3 блоку. Иницијално табела је делимично попуњена тако да се на јединствен начин може завршити. Основне идеје сасвим су сличне ситуацију из Примера ??, на страни ??.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8								
2			3	6					
3		7			9		2		
4		5				7			
5					4	5	7		
6				1				3	
7			1					6	8
8			8	5				1	
9		9					4		

Правила игре описаћемо на вокабулару који чини један релацијски симбол $<$, један операцијски симбол $*$ и симболи бројева од 1 до 9. Основна идеја је да значење ових симбола одреде одговарајућу структуру над $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, при чему:

• бројеви од означавају врсте, одн. колоне табеле;
• релација $<$ одређује поредак међу колонама, одн. врстама; $x < y$ значи: *колона* x *је лево од колоне* y, одн. *врста* x *је изнад врсте* y;
• операција $*$ одређује садржај поља; $x * y = z$ значи: *у поље* (x, y) *уписан је број* z, при чему прва координата x означава врсту у којој се поље налази, а друга координата y колону у којој се поље налази.

Почетни садржај појединих поља одређује следећи списак (атомских) једнакости, (AT):
$1*1=8$, $2*3=3$, $2*4=6$, $3*2=7$, $3*5=9$, $3*7=2$, $4*2=5$, $4*6=7$, $5*5=4$, $5*6=5$, $5*7=7$, $6*4=1$, $6*8=3$, $7*3=1$, $7*8=6$, $7*9=8$, $8*3=8$, $8*4=5$, $8*8=1$, $9*2=9$, $9*7=4$.



Поредак колона, одн. врста је заправо релација строгог линеарног уређења бројева од 1 до 9:
(U1) $\forall x\, \neg(x < x)$
(U2) $\forall x \forall y\, (x < y \Rightarrow \neg(y < x))$
(U3) $\forall x \forall y \forall z\, (x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$
(U4) $1 < 2 \wedge 2 < 3 \wedge 3 < 4 \wedge 4 < 5 \wedge 5 < 6 \wedge 6 < 7 \wedge 7 < 8 \wedge 8 < 9$

Правила да се у свакој врсти, одн свакој колони сваки број појављује тачно једном формулишемо на следећи начин:
(SV) $\forall x \forall y \forall z, (x * y = x * z \Rightarrow y = x)$
(SK) $\forall x \forall y \forall z, (x * z = y * z \Rightarrow x = y)$

Остаје још да изразимо правила које се односе на појединачне блокове 3×3. Да бисмо олакшали читање, блокове означамо B11, B12, B13, B21, B22, B23, B31, B32, B33.
(B11) $\forall x \forall y \forall u \forall v (x < 4 \wedge y < 4 \wedge u < 4 \wedge v < 4 \wedge x * u = y * v \Rightarrow x = y \wedge u = v)$
(B22) $\forall x \forall y \forall u \forall v (3 < x \wedge x < 7 \wedge 3 < y \wedge y < 7 \wedge 3 < u \wedge u < 7 \wedge 3 < v \wedge v < 7 \wedge x * u = y * v \Rightarrow$
$\Rightarrow x = y \wedge u = v)$
(B33) $\forall x \forall y \forall u \forall v (6 < x \wedge 6 < y \wedge 6 < u \wedge 6 < v \wedge x * u = y * v \Rightarrow x = y \wedge u = v)$
(B23) $\forall x \forall y \forall u \forall v (6 < x \wedge 6 < y \wedge 3 < u \wedge u < 7 \wedge 3 < v \wedge v < 7 \wedge x * u = y * v \Rightarrow x = y \wedge u = v)$
Корисно је запазити да су формуле за преостале блокове последице већ написаних својстава. Узимајући у обзир све ове претпоставке (At) – (B23) изводимо читаво решење: $1 * 2 = 1$, $1 * 3 = 2$, $1 * 4 = 7$ итд.

Пример 6. Претпоставимо да вокабулар садржи један бинарни операцијски знак, који ћемо означавати двема вертикалним цртама $|\,|$ (између којих долазе аргументи), и два тернарна знака које ћемо означавати са $\angle$ и $\triangle$ (и који очекују три аргумента са десне стране). Нека је T_{cong} теорија чије су аксиоме универзална затворења[15] следећих формула:

γ_1 $|xy| = |yx|$,

γ_2 $\angle xyz = \angle zyx$,

γ_3 $\triangle xyz = \triangle uvw \Rightarrow |xy| = |uv| \wedge |yz| = |vw| \wedge |zx| = |wu|$,

γ_4 $\triangle xyz = \triangle uvw \Rightarrow \angle xyz = \angle uvw \wedge \angle yzx = \angle vwu \wedge \angle zxy = \angle wuv$,

[15] Универзално затворење формуле $\alpha(x_1, \ldots, x_k)$ јесте реченица $\forall x_1 \ldots \forall x_k \alpha(x_1, \ldots, x_k)$.

γ_5 $|xy| = |uv| \wedge \angle xyz = \angle uvw \wedge |yz| = |vw| \Rightarrow \triangle xyz = \triangle uvw.$

Доказаћемо

$$T_{\text{cong}} \vdash |ab| = |ac| \Rightarrow \angle abc = \angle acb.$$

Према правилу ($\Rightarrow_{\text{U}}$), доказивање жељеног секвента сводимо на

$$T_{\text{cong}}, |ab| = |ac| \vdash \angle abc = \angle acb.$$

Дакле, скуп претпоставки Γ садржи γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5 и $|ab| = |ac|$.

1. $|ab| = |ac|$ претпоставка, тј. (ax)
2. $|ac| = |ab|$ из 1 према ($=_{\text{S}}$)
3. $|ab| = |ba|$ активирањем γ_1 правилом ($\forall_{\text{E}}$) при $[x/a]$, $[y/b]$
4. $|ba| = |ab|$ из 3 према ($=_{\text{S}}$)
5. $|ba| = |ac|$ из 4, 1 према ($=_{\text{T}}$)
6. $|ac| = |ca|$ активирањем γ_1 правилом ($\forall_{\text{E}}$) при $[x/a]$, $[y/c]$
7. $|ba| = |ca|$ из 5, 6 према ($=_{\text{T}}$)
8. $\angle bac = \angle cab$ активирањем γ_2 правилом ($\forall_{\text{E}}$) при $[x/b]$, $[y/a]$, $[z/c]$
9. $|ba| = |ca| \wedge \angle bac = \angle cab \wedge |ac| = |ab|$ из 7, 8, 2 применом ($\wedge_{\text{U}}$) два пута
10. $|ba| = |ca| \wedge \angle bac = \angle cab \wedge |ac| = |ab| \Rightarrow \triangle bac = \triangle cab$ активирањем γ_5 правилом ($\forall_{\text{E}}$) при $[x/b]$, $[y/a]$, $[z/c]$, $[u/c]$, $[v/a]$, $[z/b]$
11. $\triangle bac = \triangle cab$ из 9, 10 према ($\Rightarrow_{\text{E}}$)
12. $\triangle cab = \triangle bac$ из 11 према ($=_{\text{S}}$)
13. $\triangle cab = \triangle bac \Rightarrow \angle cab = \angle bac \wedge \angle abc = \angle acb \wedge \angle bca = \angle cba$, активирањем γ_4 правилом ($\forall_{\text{E}}$) при $[x/c]$, $[y/a]$, $[z/b]$, $[u/b]$, $[v/a]$, $[w/c]$
14. $\angle cab = \angle bac \wedge \angle abc = \angle acb \wedge \angle bca = \angle cba$ из 12, 13 према ($\Rightarrow_{\text{E}}$)
15. $\angle abc = \angle acb$ из 14 према ($\wedge^{\text{l}}_{\text{E}}$) и ($\wedge^{\text{d}}_{\text{E}}$).

Доста важних математичких истраживања и нових математичких области је настало управо због немогућности да се извесна тврђења докажу из неких датих претпоставки. Историја математике је пуна потрага за доказима, за које се испоставило да не постоје. Ипак, из тих безнадежних потрага за доказима често су се рађале сасвим нове математичке теорије. Илустрације ради, наводимо један занимљив проблем који се односи на HSI-алгебре поменуте на почетку овог поглавља. Тарски је крајем 60-их година прошлог века поставио проблем који је данас познат као Тарскијев средњошколски проблем: *Да ли се из HSI теорије може извести сваки идентитет који је тачан у $(\mathbb{N}^+, +, \cdot, \uparrow, 1)$?* Вилки је 1980. године дао негативан одговор тако што је показао да је идентитет

$$\big((1+x)^y + (1+x+x^2)^y\big)^x \cdot \big((1+x^3)^x + (1+x^2+x^4)^x\big)^y$$
$$= \big((1+x)^x + (1+x+x^2)^x\big)^y \cdot \big((1+x^3)^y + (1+x^2+x^4)^y\big)^x$$

тачан у $(\mathbb{N}^+, +, \cdot, \uparrow, 1)$, али није последица HSI теорије. Тарскијев проблем и Вилкијево решење покренули су разне, још увек актуелне правце истраживања HSI алгебри.

$$(HSI)\ \begin{cases} \forall x \forall y (x + y = y + x) \\ \forall x \forall y \forall z (x + (y+z) = (x+y)+z) \\ \forall x (x \cdot 1 = x) \\ \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x) \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z) \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z) \\ \forall x (x^1 = x) \\ \forall x (1^x = 1) \\ \forall x \forall y \forall z (x^{y+z} = x^y \cdot x^z) \\ \forall x \forall y \forall z ((x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z) \\ \forall x \forall y \forall z ((x^y)^z = x^{y \cdot z}) \end{cases}$$