УВОД У МАТЕМАТИЧКУ ЛОГИКУ

Небојша Икодиновић

Структура испитног листића

1. (e) + (u): Једно од питања 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 8;
2. (e) + (u): Једно од питања 9, 10, 11, 12, 13, 18 или 21;
3. (e)-део: једно од питања 14, 15, 16, 17
(u)-део: једно од питања 7, 19, 20, 22

Напомена: (e)-делови су елиминациони и оцењују се са 0 или 10 поена:

- 0 поена на (e)-деловима – испит није положен (без обзира на број поена на писменом);
- 10 поена на (e)-деловима – могућност да се закључи оцена без даљег одговарања под условом да је укупно остварено више од 50 поена (Тест 1 + Тест 2 + Писмени + 10 > 50) или наставак усменог одговарања на (u)-делове питања.

Испитна питања 2023/24

1. Исказне формуле

(e) Задатак: Доказати да је (испитати да ли је) дата формула таутологија. Нпр. Испитати да ли је формула $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge \neg(r \vee s) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow q)$ таутологија. У случају да није таутологија, наћи валуацију за коју је нетачна.

(u) Исказна алгебра; индуктивна дефиниција формула; дрво формуле; потформуле; валуације; задовољиве формуле; таутологије; важне таутологије

2. Еквивалентне трансформације

(e) Задатак: Доказати логички идентитет; испитати еквивалентност формула; одредити кнф и днф формуле. Нпр. Одредити нормалне форме (кнф и днф) формуле:
$((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow \neg p_1)) \Rightarrow (\neg p_2 \Rightarrow \neg p_3)$.

(u) Еквивалентне исказне формуле; теорема о замени еквивалената; нормалне форме

3. Принцип математичке индукције

(e) Принцип математичке индукције; индуктивне дефиниције основних операција

(u) Основне особине сабирања, множења, степеновања; докази основних особина

4. Формалне граматике

(e) Задатак: Извођење у задатој формалној граматици (палиндроми; бројевни изрази; исказне формуле). Нпр. Одредити граматику чији је језик скуп свих исказних формула у којима се користе слова p_n, $n \geq 0$, логичка константа $\bot$ и везници $\neg$, $\Rightarrow$.

(u) Појмови: алфабет, реч, правила за трансформацију; формална граматика; језик одређен формалном граматиком

5. Формалне теорије

(e) Задатак: Извођење у задатој формалној теорији.
Нпр. Над алфабетом $\Sigma = \{F, P, I, x, y, z, /, \min, \max, \leqslant\}$, скуп формула је одређен правилима:
$P \to x \mid y \mid z \mid P/ \qquad I \to P \mid \min(I, I) \mid \max(I, I) \qquad F \to I \leqslant I$

Аксиоме су формуле облика $A \leqslant A$, за било који израз A.
Правила извођења су:

$$\frac{A \leqslant C}{\min(A,B) \leqslant C}\ (\min_L) \qquad \frac{A \leqslant C \quad B \leqslant C}{\max(A,B) \leqslant C}\ (\max_L) \qquad \frac{\min(A,B) \leqslant C}{\min(B,A) \leqslant C}\ (\min_K)$$

$$\frac{A \leqslant B \quad A \leqslant C}{A \leqslant \min(B,C)}\ (\min_D) \qquad \frac{A \leqslant B}{A \leqslant \max(B,C)}\ (\max_D) \qquad \frac{A \leqslant \max(B,C)}{A \leqslant \max(C,B)}\ (\max_K)$$

$$\frac{A \leqslant B \quad B \leqslant C}{A \leqslant C}\ (T)$$

Доказати $\vdash x \leqslant \min(x, \max(x,y))$.

(u) формалне теорије; извођење у формалној теорији; извођење из хипотеза у формалној теорији

6. Исказни рачун Ł

(e) Формална теорија Ł: алфабет; формуле; аксиоме; правила извођења; пример извођења у Ł. Нпр. Доказати (уз евентуалну примену теореме дедукције) $\vdash_{Ł} \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))$.

(u) Теорема сагласности; теорема дедукције; докази теорема

7. Потпуност исказног рачуна Ł

(u) Теорема потпуности; доказ теореме потпуности

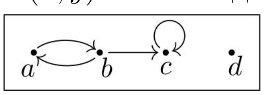
8. Природна дедукција у исказној логици

(e) Задатак: Доказати секвент применом правила природне дедукције. Нпр. Користећи само основна правила природне дедукције, доказати: $\vdash (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q)$.

(u) Основна и изведена правила природне дедукције

9. Чист предикатски језик

(e) Задатак: Истинитост формула (реченица) при валуацијама над коначним универзумом. Нпр. На универзуму који чине a, b, c, d, дефинисан је бинарни предикат:
$E(x,y)$ – 'из x иде стрелица ка y'



(а) Одредити формулу $\alpha(x)$ која је тачна само када променљива x добије неку од вредности a, b и c (а нетачна је за d).

(б) Испитати тачност реченица $\exists x \forall y \neg E(x,y)$ и $\forall x(E(x,x) \wedge \neg \exists y E(y,x) \Rightarrow \forall z E(x,z))$

(u) Чист предикатски језик: нелогички и логички симболи; атомске и предикатске формуле; истинитосна вредност формуле

10. Правила природне дедукције за квантификаторе

(e) Задатак: Доказати секвент применом правила природне дедукције.
Нпр. Доказати $\forall x((A(x) \Rightarrow R(x)) \vee T(x)), \exists x(T(x) \Rightarrow P(x)), \forall x(A(x) \wedge \neg P(x)) \vdash \exists x R(x)$.

(u) Основна и изведена правила природне дедукције за квантификаторе; теореме предикатске логике

11. Аксиоме екстензионалности, празног скупа, пара, уније и партитивног скупа; схема издвајања

(е) Аксиоме екстензионалности, празног скупа, пара, уније и партитивног скупа; схема издвајања; инклузија међу скуповима; питања и задаци о једноставним последицама аксиома. Нпр. Која од следећих тврђења су тачна, за све a, b, c?
(а) Ако $a \in b$ и $b \in c$, онда $a \in c$.
(б) Ако $a \in b$ и $b \subseteq c$, онда $a \in c$.
(в) Ако $a \subseteq b$ и $b \in c$, онда $a \in c$.
(г) Ако $a \subseteq b$ и $b \subseteq c$, онда $a \subseteq c$.
Образложити одговоре.

(u) Егзистенција и јединственост скупова; непостојање скупа свих скупова; пресек непразног скупа

12. Булове операције и Декартов производ

(е) Питања и задаци о једноставним особинама Булових операција и Декартовог производа. Нпр. Доказати да за све скупове X и Y важи $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

(u) Унија, пресек, разлика скупова и везе са инклузијом; Де Органови закони; уређен пар, тројка, четворка, ...; Декартов производ (егзистенција и јединственост)

13. Релације и функције; композиције

(е) Дефиниције и основни примери; композиција релација; композиција две функције (доказ)

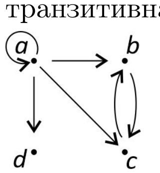
(u) особине композиције (композиције са дијагоналом, асоцијативност композиције)

14. Инверзне релације; 1-1 и на функције; бијекције

(е) Дефиниције и основни примери

15. Особине бинарних релација;

(е) Дефиниције: рефлексивне, ирефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне, линеарне релације. Задатак: испитати да ли задата релација има наведене особине. Нпр. Испитати да ли је приказана релација: рефлексивна, ирефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна, линеарна.



16. Релације еквиваленције

(е) Дефиниција релације еквиваленције; класе еквиваленције; количнички скуп; особине класа еквиваленције и докази тих особина

17. Релације уређења

(е) Строга, парцијална, линеарна уређења; веза између строгих и парцијалних уређења (доказ); највећи, најмањи, максимални, минимални елементи

18. Директне и индиректне слике

(е) Задатак: Одредити директне и индиректне слике дате функције Нпр. Одредити директне и индиректне слике функције $f : \{0, 1, 2\} \to \{a, b, c\}$ дате са $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & c & a \end{pmatrix}$.

(u) Директне и индиректне слике; особине и докази особина

19. Схема замене; аксиома регуларности; аксиома бесконачности; скуп природних бројева

(u) Схема замене; аксиома регуларности; аксиома бесконачности; индуктиван скуп; најмањи индуктиван скуп; доказ и примена принципа математичке индукције

20. Уређење и аритметичке операције скупа $\mathbb{N}$

(u) Уређење природних бројева; принцип потпуне индукције и последице (добро уређење); принцип рекурзије (без доказа); индуктивне дефиниције сабирања, множења и степеновања

21. Коначни скупови; Дирихлеов принцип

(e) Дирихлеов принцип (формулација) и последице; појам коначног скупа и основне особине

(u) Доказ Дирихлеовог принципа

22. Бесконачни скупови; теорема $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

(u) Упоређивање скупова по кардиналности; основна својства; доказ да је $|A| < |\mathcal{P}(A)|$; пребројиви и непребројиви скупови