Увод у математичку логику, јануар 2016, група 102
(3. фебруар 2016)
Решења

1. а) Природном дедукцијом доказати

$$a, b \Rightarrow \neg a \wedge c, \neg b \wedge c \Rightarrow \neg a \vdash \neg b \wedge \neg c.$$

1. a	претпоставка
2. $b \Rightarrow \neg a \wedge c$	претпоставка
3. $\neg b \wedge c \Rightarrow \neg a$	претпоставка
4. $\neg\neg a$	$\neg\neg_{\mathrm{U}}$, 1
5. $\neg\neg a \vee \neg c$	$\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{L}}$, 4
6. $\neg(\neg a \wedge c)$	DM, 5
7. $\neg b$	MT, 2, 6
8. $\neg(\neg b \wedge c)$	MT, 3, 4
9. $\neg\neg b \vee \neg c$	DM, 8
10. $\neg\neg\neg b$	$\neg\neg_{\mathrm{U}}$, 7
10. $\neg c$	DS, 9, 10
11. $\neg b \wedge \neg c$	$\wedge_{\mathrm{U}}$, 7, 10

б) На суђењу особама A, B, C, D и E, осумњиченим за исти злочин, утврђене су следеће чињенице:

i. Ако није крив D и јесте крив A, онда је крив и C.
ii. Ако је крив B, онда није крив A и јесте крив C.
iii. Ако није крив E и јесте крив A, онда није крив D.
iv. Ако није крив B и јесте крив C, онда није крив A.
v. Осумњичени A јесте крив.

Да ли је још неко крив осим особе A? Ко? Навести детаљно неформално образложење или одговарајући формални доказ.

Уз одговарајућу формализацију

i. Ако није крив D и јесте крив A, онда је крив и C – $\neg d \wedge a \Rightarrow c$
ii. Ако је крив B, онда није крив A и јесте крив C – $b \Rightarrow \neg a \wedge c$
iii. Ако није крив E и јесте крив A, онда није крив D – $\neg e \wedge a \Rightarrow \neg d$
iv. Ако није крив B и јесте крив C, онда није крив A – $\neg b \wedge c \Rightarrow \neg a$
v. Осумњичени A јесте крив – a

према доказу под а) следи да особе B и C нису криве, тј. важи $\neg b$ и $\neg c$.

Преостаје још да се утврди да ли су D и E криви или не.
Како је $\neg c$, из чињенице (i) (према MT и DM) следи да је d или $\neg a$, а како је a, закључујемо (према DS) да је d – дакле D је крив. Сада, из чињенице (iii) (према MT и DM) следи да је e или $\neg a$, а како је a, мора бити e – крив је и E.

Напомена: Природном дедукцијом се доказује слично као под а) да је $d \wedge e$ последица претпоставки (i)-(v).

2. Нека су p и r унарни релацијски симболи, а q бинарни релацијски симбол.

а) Природном дедукцијом доказати

$$\forall x \exists y\, \big(p(x) \Rightarrow \neg q(x,y)\big), \forall x \forall y\, \big(r(x) \Rightarrow q(x,y)\big) \vdash \exists x\, r(x) \Rightarrow \exists x \big(r(x) \wedge \neg p(x)\big).$$

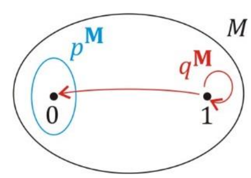
1.	$\forall x \exists y\, \big(p(x) \Rightarrow \neg q(x,y)\big)$	претпоставка
2.	$\forall x \forall y\, \big(r(x) \Rightarrow q(x,y)\big)$	претпоставка
3.	$\exists x\, r(x)$	додатна претпоставка
4.	$c \quad r(c)$	додатна претпоставка
5.	$\exists y\, \big(p(c) \Rightarrow \neg q(c,y)\big)$	$\forall x_E$, 1
6.	$\forall y\, \big(r(c) \Rightarrow q(c,y)\big)$	$\forall x_E$, 2
7.	$d \quad p(c) \Rightarrow \neg q(c,d)$	додатна претпоставка
8.	$r(c) \Rightarrow q(c,d)$	$\forall y_E$, 6
9.	$q(c,d)$	$\Rightarrow_E$, 4, 8
10.	$\neg\neg q(c,d)$	$\neg\neg_U$, 9
11.	$\neg p(c)$	MT, 10, 7
12.	$r(c) \wedge \neg p(c)$	$\wedge_U$, 4, 11
13.	$r(c) \wedge \neg p(c)$	$\exists x_E$, 5, $7-12$
14.	$\exists x \big(r(x) \wedge \neg p(x)\big)$	$\exists x_U$, 13
15.	$\exists x \big(r(x) \wedge \neg p(x)\big)$	$\exists x_E$, 3, $4-14$
16.	$\exists x\, r(x) \Rightarrow \exists x \big(r(x) \wedge \neg p(x)\big)$	$\Rightarrow_U, 3-15$

б) Конструисати контрамодел формуле

$$\forall x \exists y\, \big(p(x) \Rightarrow \neg q(x,y)\big) \wedge\ \forall x \forall y\, \big(r(x) \Rightarrow q(x,y)\big) \Rightarrow \exists x \big(r(x) \wedge \neg p(x)\big).$$

На основу дела а) уочавамо да интерпретација релације r мора бити празна, без обзира на скуп на коме се језик интерпретира. При таквој интерпретацији, у одговарајућем моделу, формула $\forall x \forall y\, \big(r(x) \Rightarrow q(x,y)\big)$ ће сигурно бити тачна, а $\exists x \big(r(x) \wedge \neg p(x)\big)$ нетачна.

Преостаје само да се на неком скупу интерпретирају p и q, тако да важи формула $\forall x \exists y\, \big(p(x) \Rightarrow \neg q(x,y)\big)$. Наводимо само једну од многобројних могућности.



Интерпретирајмо дати језик на скупу $M = \{0,1\}$ на следећи начин:

$$p^{\mathbf{M}} = \{0\}, r^{\mathbf{M}} = \emptyset, q^{\mathbf{M}} = \{(1,1),(1,0)\}.$$

Модел $\mathbf{M} = \big(M, p^{\mathbf{M}}, r^{\mathbf{M}}, q^{\mathbf{M}}\big)$ јесте контрамодел наведене формуле, што се веома једноставно проверава, јер M има само два елемента.
У наставку је наведен један доказ (у коме треба разликовати елементе склупа $M = \{0,1\}$ од истинитосних вредности 1 и 1).
Напомена: Постоје и други начини да се докаже да је конструисани модел заиста контрамодел одговарајуће формуле.

$$\Big(\forall x \exists y\, \big(p(x) \Rightarrow \neg q(x,y)\big)\Big)^{\mathbf{M}} = \min_{x \in M} \max_{y \in M} \big(p^{\mathbf{M}}(x) \Rightarrow \neg q^{M}(x,y)\big)$$

$$= \min\Big\{\max_{y \in M}\big(p^{\mathbf{M}}(0) \Rightarrow \neg q^{\mathbf{M}}(0,y)\big), \max_{y \in M}\big(p^{\mathbf{M}}(1) \Rightarrow \neg q^{\mathbf{M}}(1,y)\big)\Big\}$$

$$= \min\{\max\{p^{\mathbf{M}}(0) \Rightarrow \neg q^{\mathbf{M}}(0,0), p^{\mathbf{M}}(0) \Rightarrow \neg q^{\mathbf{M}}(0,1)\}, \max\{p^{\mathbf{M}}(1) \Rightarrow \neg q^{\mathbf{M}}(1,0), p^{\mathbf{M}}(1) \Rightarrow \neg q^{\mathbf{M}}(1,1)\}\}$$

$$= \min\{\max\{1 \Rightarrow \neg 0, 1 \Rightarrow \neg 0\}, \max\{0 \Rightarrow \neg 1, 0 \Rightarrow \neg 1\}\}$$

$$= \min\{\max\{1,1\}, \max\{1,1\}\} = 1$$

$$\left(\forall x \forall y\left(r(x) \Rightarrow q(x, y)\right)\right)^{\mathbf{M}} = \min_{x \in M} \min_{y \in M}\left(r^{\mathbf{M}}(x) \Rightarrow q^{\mathrm{M}}(x, y)\right)$$
$$= \min\left\{\min_{y \in M}\left(r^{\mathbf{M}}(0) \Rightarrow q^{\mathbf{M}}(0, y)\right), \min_{y \in M}\left(r^{\mathbf{M}}(1) \Rightarrow q^{\mathbf{M}}(1, y)\right)\right\}$$
$$= \min\{\min\{r^{\mathbf{M}}(0) \Rightarrow q^{\mathbf{M}}(0,0), r^{\mathbf{M}}(0) \Rightarrow q^{\mathbf{M}}(0,1)\}, \min\{r^{\mathbf{M}}(1) \Rightarrow q^{\mathbf{M}}(1,0), r^{\mathbf{M}}(1) \Rightarrow q^{\mathbf{M}}(1,1)\}\}$$
$$= \min\{\min\{0 \Rightarrow \neg 0, 0 \Rightarrow \neg 0\}, \min\{0 \Rightarrow \neg 1, 0 \Rightarrow \neg 1\}\}$$
$$= \min\{\min\{1, 1\}, \min\{1, 1\}\} = 1$$

$$\left(\exists x\left(r(x) \land \neg p(x)\right)\right)^{\mathbf{M}} = \max_{x \in M}\left(r^{\mathbf{M}}(x) \land \neg p^{\mathbf{M}}(x)\right) = \max\{r^{\mathbf{M}}(0) \land \neg p^{\mathbf{M}}(0), r^{\mathbf{M}}(1) \land \neg p^{\mathbf{M}}(1)\}$$
$$= \max\{0 \land \neg 1, 0 \land \neg 0\} = \max\{0,0\} = 0$$

Дакле,
$$\left(\forall x \exists y\left(p(x) \Rightarrow \neg q(x, y)\right) \land \forall x \forall y\left(r(x) \Rightarrow q(x, y)\right) \Rightarrow \exists x\left(r(x) \land \neg p(x)\right)\right)^{\mathbf{M}}$$
$$= \left(\forall x \exists y\left(p(x) \Rightarrow \neg q(x, y)\right)\right)^{\mathbf{M}} \land \left(\forall x \forall y\left(r(x) \Rightarrow q(x, y)\right)\right)^{\mathbf{M}} \Rightarrow \left(\exists x\left(r(x) \land \neg p(x)\right)\right)^{\mathbf{M}}$$
$$= (1 \land 1 \Rightarrow 0) = 0,$$
што значи да $\mathbf{M} \nvDash \forall x \exists y\left(p(x) \Rightarrow \neg q(x, y)\right) \land \forall x \forall y\left(r(x) \Rightarrow q(x, y)\right) \Rightarrow \exists x\left(r(x) \land \neg p(x)\right)$.

3. Нека је $f : X \to Y$. Доказати да све $A \subseteq X$ и све $B \subseteq Y$ важи еквиваленција:
$$f[A] \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \cap f^{-1}[B] \neq \emptyset.$$

($\Rightarrow$) Нека је $f[A] \cap B \neq \emptyset$.
Изаберимо $y \in Y$ такав да $y \in f[A] \cap B$. Тада $y \in f[A]$ и $y \in B$. Из $y \in f[A]$ следи да је $y = f(a)$, за неко $a \in A$. Из $f(a) = y \in B$ закључујемо да $a \in f^{-1}[B]$. Дакле, $a \in A \cap f^{-1}[B]$, па је самим тим $A \cap f^{-1}[B] \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Нека је $A \cap f^{-1}[B] \neq \emptyset$.
Изаберимо $x \in X$ такав да $x \in A \cap f^{-1}[B]$. Тада $x \in A$ и $x \in f^{-1}[B]$. Из $x \in f^{-1}[B]$ следи да $f(x) \in B$, а из $x \in A$ следи $f(x) \in f[A]$. Дакле, $f(x) \in f[A] \cap B$, па је $f[A] \cap B \neq \emptyset$.

4. Доказати да је $|\mathbf{2} \times \mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$, при чему је $\mathbf{2} = \{0,1\}$, $\mathbb{N}$ скуп природних бројева и $2\mathbb{N}$ скуп парних природних бројева.

Дефинишимо функцију $f : \mathbf{2} \times \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ на следећи начин: за $(k, x) \in \mathbf{2} \times \mathbb{N}$,
$$f(k, x) = \begin{cases} 4x & , k = 0, \\ 4x + 2, & k = 1. \end{cases}$$
Докажимо да је f бијекција.

<u>f је 1-1 функција</u>

Нека је $f(k_1, x_1) = f(k_2, x_2)$. Ако би било $k_1 \neq k_2$, имали бисмо да је
$$4x_1 = 4x_2 + 2 \text{ или } 4x_1 + 2 = 4x_2.$$
Ниједна од наведених једнакости није могућа, јер је једна страна сваке од њих дељива са 4, а друга страна није. Према томе, $k_1 = k_2$, па важи једна од једнакости
$$4x_1 = 4x_2 \text{ или } 4x_1 + 2 = 4x_2 + 2.$$
Из обе једнакости закључујемо да је $x_1 = x_2$.
Дакле, $(k_1, x_1) = (k_2, x_2)$.

f је на функција

Нека је $y \in 2\mathbb{N}$ произвољан. Тада је $y = 2n$, за неки природан број n. Нека је k остатак при дељењу броја n са 2 ($k = \mathrm{rest}_2(n)$), а x количник при дељењу n са 2 ($x = \left[\frac{n}{2}\right]$). Другим речима, x и k су јединствени природни бројеви такви да је $n = 2x + k$ и $0 \leq k < 2$. Докажимо да је $f(k, x) = y$:

- ако је $k = 0$, онда је $n = 2x$, па је $f(k, x) = 4x = 2n = y$;
- ако је $k = 1$, онда је $n = 2x + 1$, па је $f(k, x) = 4x + 2 = 2 \cdot (2x + 1) = 2n = y$.

5. Нека је $* : X \times X \to X$ бинарна операција скупа X таква да за све $x, y, z \in X$ важи:

I. $x * x = x$,
K. $x * y = y * x$,
A. $x * (y * z) = (x * y) * z$.

Бинарна релација $\leq$ скупа X дефинисана је на следећи начин: за све $x, y \in X$

$$x \leq y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x * y = x.$$

а) Доказати да је $\leq$ релација поретка.

(R) За свако $x \in X$ је (према I.) $x * x = x$, па према дефиницији релације $\leq$ важи $x \leq x$.
(AS) Нека је $x \leq y$ и $y \leq x$. Тада је $x * y = x$ и $y * x = y$. Због комутативности операције $*$ важи $x = x * y = y * x = y$.
(T) Нека је $x \leq y$ и $y \leq z$. Тада је $x * y = x$ и $y * z = y$. Треба доказати да је $x \leq z$, тј. $x * z = z$. Ову једнакост добијамо применом асоцијативности:

$$x * z = (x * y) * z = x * (y * z) = x * y = x.$$

б) Доказати да за све $x, y, z \in X$, из $z \leq x$ и $z \leq y$ следи $z \leq x * y$.

Нека је $z \leq x$ и $z \leq y$. Тада је $z * x = z$ и $z * y = z$. Треба доказати да је $z * (x * y) = z$:

$$z * (x * y) = (z * x) * y = z * y = z.$$