Strukture prvog reda

Nebojša Ikodinović

UML 2022

Tarskijeva srednjoškolska algebra

$$(\mathbb{N}^+, +, \cdot, \uparrow, 1)$$

$$(HSI)\ \begin{cases} \forall x \forall y (x + y = y + x) \\ \forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z) \\ \forall x (x \cdot 1 = x) \\ \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x) \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z) \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z) \\ \forall x (x^1 = x) \\ \forall x (1^x = 1) \\ \forall x \forall y \forall z (x^{y+z} = x^y \cdot x^z) \\ \forall x \forall y \forall z ((x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z) \\ \forall x \forall y \forall z ((x^y)^z = x^{y \cdot z}) \end{cases}$$

Tarskijeva srednjoškolska algebra

$$(\mathbb{N}^+, +, \cdot, \uparrow, 1)$$
$$(\{0,1\}, +, \cdot, \uparrow, 1)$$

$$(HSI)\quad \begin{cases} \forall x \forall y (x + y = y + x) \\ \forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z) \\ \forall x (x \cdot 1 = x) \\ \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x) \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z) \\ \forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z) \\ \forall x (x^1 = x) \\ \forall x (1^x = 1) \\ \forall x \forall y \forall z (x^{y+z} = x^y \cdot x^z) \\ \forall x \forall y \forall z ((x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z) \\ \forall x \forall y \forall z ((x^y)^z = x^{y \cdot z}) \end{cases}$$

Tarskijeva srednjoškolska algebra

$$(HSI)\begin{cases}
\forall x\forall y(x+y=y+x)\\
\forall x\forall y\forall z(x+(y+z)=(x+y)+z)\\
\forall x(x\cdot 1=x)\\
\forall x\forall y(x\cdot y=y\cdot x)\\
\forall x\forall y\forall z(x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z)\\
\forall x\forall y\forall z(x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z)\\
\forall x(x^1=x)\\
\forall x(1^x=1)\\
\forall x\forall y\forall z(x^{y+z}=x^y\cdot x^z)\\
\forall x\forall y\forall z((x\cdot y)^z=x^z\cdot y^z)\\
\forall x\forall y\forall z((x^y)^z=x^{y\cdot z})
\end{cases}$$

$(\mathbb{N}^+, +, \cdot, \uparrow, 1)$
$(\{0,1\}, +, \cdot, \uparrow, 1)$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\uparrow$	0	1
0	1	0
1	1	1

[x^y je $y \Rightarrow x$]

Tarskijeva srednjoškolska algebra

$(\mathbb{N}^+, +, \cdot, \uparrow, 1)$ [$x \uparrow y$ je x^y]

$$x + y = y + x$$
$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x \cdot 1 = x$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$
$$x^1 = x$$
$$1^x = 1$$
$$x^{y+z} = x^y \cdot x^z$$
$$(x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z$$
$$(x^y)^z = x^{y \cdot z}$$

$(\{0,1\}, \vee, \wedge, \uparrow, 1)$ [$x \uparrow y$ je $y \Rightarrow x$]

$$x \vee y \equiv y \vee x$$
$$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$$
$$x \wedge 1 \equiv x$$
$$x \wedge y \equiv y \wedge x$$
$$x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$$
$$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$1 \Rightarrow x \equiv x$$
$$x \Rightarrow 1 \equiv 1$$
$$y \vee z \Rightarrow x \equiv (y \Rightarrow x) \wedge (z \Rightarrow x)$$
$$z \Rightarrow x \wedge y \equiv (z \Rightarrow x) \wedge (z \Rightarrow y)$$
$$z \Rightarrow (y \Rightarrow x) \equiv z \wedge y \Rightarrow x$$

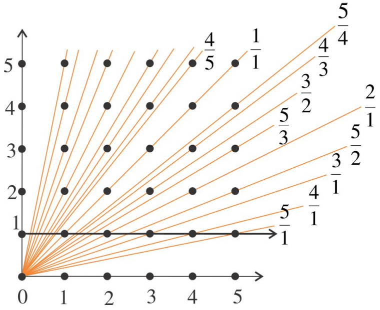
Racionalni brojevi

Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ definišemo binarnu relaciju $\sim$:

$$(a, b) \sim (c, d) \;\Leftrightarrow\; a \cdot d = b \cdot c$$

$(*)$ uredjeni par $(a, b) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{Z}$ predstavlja razlomak $\dfrac{a}{b}$, a relacija $\sim$ je jednakost medju razlomcima:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$



Racionalni brojevi

Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ definišemo binarnu relaciju $\sim$:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a \cdot d = b \cdot c$$

$(*)$ uredjeni par $(a, b) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{Z}$ predstavlja razlomak $\frac{a}{b}$, a relacija $\sim$ je jednakost medju razlomcima:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$

Lema

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$.

Racionalni brojevi

Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ definišemo binarnu relaciju $\sim$:

$$(a, b) \sim (c, d) \;\Leftrightarrow\; a \cdot d = b \cdot c$$

$(*)$ uredjeni par $(a, b) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{Z}$ predstavlja razlomak $\frac{a}{b}$, a relacija $\sim$ je jednakost medju razlomcima:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$

Lema

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$.

Definicija

Količnički skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ / \sim$ nazivamo skupom nenegativnih racionalnih brojeva i označavamo $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$.

Racionalni brojevi

Sabiranje i množenje na skupu $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ definišemo jednakostima:

$$[(a,b)]_\sim +_{\mathbb{Q}} [(c,d)]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} [(ad+bc, bd)]_\sim, \quad [(a,b)]_\sim \cdot_{\mathbb{Q}} [(c,d)]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} [(ac, bd)]_\sim$$

$$(*)\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Racionalni brojevi

Sabiranje i množenje na skupu $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ definišemo jednakostima:

$$[(a,b)]_\sim +_{\mathbb{Q}} [(c,d)]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} [(ad+bc,bd)]_\sim, \quad [(a,b)]_\sim \cdot_{\mathbb{Q}} [(c,d)]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} [(ac,bd)]_\sim$$

$(*)$ $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd} \quad \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

Binarnu relaciju $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ uvodimo na sledeći način:

$$[(a,b)]_\sim \leqslant_{\mathbb{Q}} [(c,d)]_\sim \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} ad \leqslant bc,$$

$(*)$ $\dfrac{a}{b} \leqslant_{\mathbb{Q}} \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leqslant bc$

Racionalni brojevi

Sabiranje i množenje na skupu $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ definišemo jednakostima:

$$[(a,b)]_\sim +_{\mathbb{Q}} [(c,d)]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} [(ad+bc,bd)]_\sim, \quad [(a,b)]_\sim \cdot_{\mathbb{Q}} [(c,d)]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} [(ac,bd)]_\sim$$

$(*)$ $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd} \quad \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

Binarnu relaciju $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ uvodimo na sledeći način:

$$[(a,b)]_\sim \leqslant_{\mathbb{Q}} [(c,d)]_\sim \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} ad \leqslant bc,$$

$(*)$ $\dfrac{a}{b} \leqslant_{\mathbb{Q}} \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leqslant bc$

Lema

Ako je $(a,b) \sim (a_1,b_1)$ i $(c,d) \sim (c_1,d_1)$, onda je:
(1) $(ad+bc,bd) \sim (a_1d_1+b_1c_1, b_1d_1)$
(2) $(ac,bd) \sim (a_1c_1, b_1d_1)$
(3) $[(a,b)]_\sim \leqslant_{\mathbb{Q}} [(c,d)]_\sim$ akko $[(a_1,b_1)]_\sim \leqslant_{\mathbb{Q}} [(c_1,d_1)]_\sim$

Racionalni brojevi

Lema

Za proizvoljne $x, y, z \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$:

$$
\begin{array}{ll}
x + (y + z) = (x + y) + z & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\
x + y = y + x & x \cdot y = y \cdot x \\
x + 0 = x & x \cdot 1 = x,\ x \cdot 0 = 0 \\
 & x \neq 0 \Rightarrow (\exists! u \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0})\, x \cdot u = 1
\end{array}
$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$x \leqslant x$$

$$x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$$

$$x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$$

$$x \leqslant y \vee y \leqslant x$$

$$
\begin{array}{ll}
x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + u & x \leqslant y \Rightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z
\end{array}
$$

Lema

Za proizvoljne $x, y, z \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$:

$$\begin{array}{ll} x+(y+z)=(x+y)+z & x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z \\ x+y=y+x & x\cdot y=y\cdot x \\ x+0=x & x\cdot 1=x,\ x\cdot 0=0 \\ & x\neq 0\Rightarrow(\exists! u\in\mathbb{Q}_{\geqslant 0})\, x\cdot u=1 \end{array}$$

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$$

$$x\leqslant x$$

$$x\leqslant y\wedge y\leqslant x\Rightarrow x=y$$

$$x\leqslant y\wedge y\leqslant z\Rightarrow x\leqslant z$$

$$x\leqslant y\vee y\leqslant x$$

$$x\leqslant y\Rightarrow x+z\leqslant y+u \qquad x\leqslant y\Rightarrow x\cdot z\leqslant y\cdot z$$

Ako $\mathbb{Q}_{>0}$ označava skup $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}\setminus\{0\}$, sabiranje i množenje predstavljaju i operacije skupa $\mathbb{Q}_{>0}$. Oslanjajući se na osobine iz prethodne leme, uvodimo unarnu operaciju $^{-1} : \mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{Q}_{>0}$, tzv. *recipročnu vrednost*.

Strukture i njihov vokabular

Definicija

Neka je S proizvoljan neprazan skup i $n \geqslant 1$.
(1) Svaka funkcija iz S^n u S, naziva se n-arna operacija skupa S. Posebno, funkcije iz S u S nazivamo unarnim operacijama; funkcije iz $S \times S$ u S nazivamo binarnim operacijama.
(2) Svaki podskup od S^n, naziva se n-arna relacija skupa S. Posebno, podskupove od S nazivamo unarnim relacijama; podskupove od $S \times S$ nazivamo binarnim relacijama.

Strukture i njihov vokabular

Definicija

Neka je S proizvoljan neprazan skup i $n \geqslant 1$.
(1) Svaka funkcija iz S^n u S, naziva se n-arna operacija skupa S. Posebno, funkcije iz S u S nazivamo unarnim operacijama; funkcije iz $S \times S$ u S nazivamo binarnim operacijama.
(2) Svaki podskup od S^n, naziva se n-arna relacija skupa S. Posebno, podskupove od S nazivamo unarnim relacijama; podskupove od $S \times S$ nazivamo binarnim relacijama.

Ako je $R \subseteq S^n$ i $a_1, \ldots, a_n \in S$, umesto $(a_1, \ldots, a_n) \in R$ pišemo $R(a_1, \ldots, a_n)$. Svaku n-arnu relaciju možemo posmatrati kao funkciju iz S^n u dvočlani skup $\{0, 1\}$ isnitosnih vrednosti (0 za 'netačno', 1 za 'tačno'), i samim tim iskaze

$$'R(a_1, \ldots, a_n) \text{ je tačno'} \quad \text{i} \quad 'R(a_1, \ldots, a_n) \text{ je netačno'}$$

zapisati kao jednakosti $R(a_1, \ldots, a_n) = 1$ i $R(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Strukture i njihov vokabular

Strukture zadajemo tako što navedemo, u obliku niza, sve ono što je čini. Strukture često označavamo masnim slovima $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$, po potrebi sa indeksima, pri čemu uglavnom koristimo slova kojima su označeni domeni (nosači) tih struktura, $A, B, C, \ldots$, sa odgovarajućim indeksima.

Strukture i njihov vokabular

Strukture zadajemo tako što navedemo, u obliku niza, sve ono što je čini. Strukture često označavamo masnim slovima $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$, po potrebi sa indeksima, pri čemu uglavnom koristimo slova kojima su označeni domeni (nosači) tih struktura, $A, B, C, \ldots$, sa odgovarajućim indeksima.

Standardnu strukturu prirodnih brojeva $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0)$ čini skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, zajedno sa relacijom uredjenja $\leqslant$, unarnom operacijom sledbenik $' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, (binarnim operacijama) sabiarnjem i množenjem $+, \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, i konstantom 0.

Strukture i njihov vokabular

Simboli kojima označavamo relacije, operacije i konstante neke strukture nazivamo *vokabularom* te strukture.
Vokabular strukture **N** čine simboli: $\leqslant, ', +, \cdot, 0$

Strukture i njihov vokabular

Simboli kojima označavamo relacije, operacije i konstante neke strukture nazivamo *vokabularom* te strukture.
Vokabular strukture **N** čine simboli: $\leqslant, ', +, \cdot, 0$

LOGIČKI SIMBOLI

promenljive:
$x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$

znak jednakosti: $=$
logičke konstante: $\perp$, $\top$
logički veznici: (unarni) $\neg$, (binarni) $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
kvantifikatori: $\forall$, $\exists$
pomoćni znaci: leva i desna zagrada, zapeta

VOKABULAR STRUKTURE

simboli konstanti;
simboli operacija, pri čemu je za svaki simbol odredjena njegova dužina;
simboli relacija, pri čemu je za svaki simbol odredjena njegova dužina.

Izrazi i formule

Izrazi: $I \to c \mid v \mid F(I, \cdots, I)$, gde je c simbol konstante, v promenljiva, i F znak operacije.

Izrazi i formule

Izrazi: $I \to c \mid v \mid F(I, \cdots, I)$, gde je c simbol konstante, v promenljiva, i F znak operacije.

Npr. izrazi nad vokabularom strukture $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0)$: 0, $0'$, $0' \cdot (0')'$, $(x + 0)'$, $x + y$, $0' \cdot (x + 0')$, $x \cdot x + y \cdot y$, itd.

Izrazi i formule

Izrazi: $I \to c \mid v \mid F(I, \cdots, I)$, gde je c simbol konstante, v promenljiva, i F znak operacije.

Npr. izrazi nad vokabularom strukture $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0)$: 0, $0'$, $0' \cdot (0')'$, $(x+0)'$, $x+y$, $0' \cdot (x+0')$, $x \cdot x + y \cdot y$, itd.

Atomske formule: $A \to \top \mid \bot \mid I = I \mid R(I, \ldots, I)$, gde je R simbol relacije.

Izrazi i formule

Izrazi: $I \to c \mid v \mid F(I, \cdots, I)$, gde je c simbol konstante, v promenljiva, i F znak operacije.

Npr. izrazi nad vokabularom strukture $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0)$: 0, $0'$, $0' \cdot (0')'$, $(x+0)'$, $x+y$, $0' \cdot (x+0')$, $x \cdot x + y \cdot y$, itd.

Atomske formule: $A \to \top \mid \bot \mid I = I \mid R(I, \ldots, I)$, gde je R simbol relacije.

Npr. atomske formule nad vokabularom strukture $\mathbf{N}$: $0 = 0$, $0 \leqslant 0'$, $(x \cdot 0) \leqslant (x+0)$, $x+y=y+x$ itd.

Izrazi i formule

Izrazi: $I \to c \mid v \mid F(I, \cdots, I)$, gde je c simbol konstante, v promenljiva, i F znak operacije.

Npr. izrazi nad vokabularom strukture $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0)$: 0, $0'$, $0' \cdot (0')'$, $(x+0)'$, $x+y$, $0' \cdot (x+0')$, $x \cdot x + y \cdot y$, itd.

Atomske formule: $A \to \top \mid \bot \mid I = I \mid R(I, \ldots, I)$, gde je R simbol relacije.

Npr. atomske formule nad vokabularom strukture $\mathbf{N}$: $0 = 0$, $0 \leqslant 0'$, $(x \cdot 0) \leqslant (x + 0)$, $x + y = y + x$ itd.

Formule: $F \to A \mid \neg F \mid (F * F) \mid \forall v\, F \mid \exists v\, F$, pri čemu je v promenljiva, a $* \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Izrazi i formule

Izrazi: $I \to c \mid v \mid F(I, \cdots, I)$, gde je c simbol konstante, v promenljiva, i F znak operacije.

Npr. izrazi nad vokabularom strukture $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0)$: 0, $0'$, $0' \cdot (0')'$, $(x+0)'$, $x+y$, $0' \cdot (x+0')$, $x \cdot x + y \cdot y$, itd.

Atomske formule: $A \to \top \mid \bot \mid I = I \mid R(I, \ldots, I)$, gde je R simbol relacije.

Npr. atomske formule nad vokabularom strukture $\mathbf{N}$: $0 = 0$, $0 \leqslant 0'$, $(x \cdot 0) \leqslant (x + 0)$, $x + y = y + x$ itd.

Formule: $F \to A \mid \neg F \mid (F * F) \mid \forall v\, F \mid \exists v\, F$, pri čemu je v promenljiva, a $* \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Npr. formule nad vokabularom strukture $\mathbf{N}$: $0 = x$, $0 = 0 \wedge \neg 0' \leqslant 0$, $0' \leqslant x \Rightarrow x \leqslant (x \cdot x)$, $\neg \exists x (x + 0') = 0$, $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ itd.

Vrednost izraza i formule

Svaki izraz $t(x_1, \dots, x_n)$ definiše funkciju (n-arnu operaciju) iz S^n u S:

$$S^n \ni (a_1, \dots, a_n) \mapsto t(a_1, \dots, a_n) \in S.$$

Vrednost izraza i formule

Svaki izraz $t(x_1, \dots, x_n)$ definiše funkciju (n-arnu operaciju) iz S^n u S:

$$S^n \ni (a_1, \dots, a_n) \mapsto t(a_1, \dots, a_n) \in S.$$

Npr. nad vokabularom strukture $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \leqslant, ', +, \cdot, 0)$, vrednosti funkcije definisane izrazom $t(x_1, x_2, x_3) = x_1' \cdot (x_2 + 0')$ za neke valuacije promenljivih:

- $t(2, 1, 4) = 2' \cdot (1 + 0') = 6$,
- $t(3, 3, 3) = 3' \cdot (3 + 0') = 16$,
- $t_5(7, 13, 31) = 7' \cdot (13 + 0') = 112$ itd.

Vrednost formule

Svaka formula $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ definiše jednu funkciju iz S^n u $\{0, 1\}$, tj. jednu n-arnu relaciju skupa S:

$$S^n \ni (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \alpha(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\};$$

Vrednost formule

Svaka formula $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ definiše jednu funkciju iz S^n u $\{0, 1\}$, tj. jednu n-arnu relaciju skupa S:

$$S^n \ni (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \alpha(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\};$$

Npr. nad vokabularom strukture **N**;

- $\alpha_1(x, y)$ je $x' \leqslant y \Rightarrow x \leqslant y'$; npr. $\alpha_1(0, 0)$, $\alpha_1(0, 1)$, $\alpha_1(1, 0)$, $\alpha_1(0, 2)$, $\alpha_1(2, 0)$ su tačni iskazi;
- $\alpha_2(x, y)$ je formula $\exists z\,(x + z = y)$; npr. $\alpha_2(3, 0)$ je netačno, $\alpha_2(0, 3)$ je tačno, itd.
- $\alpha_3(x)$ je formula $\forall y\,(x \cdot y = x)$; npr. $\alpha_3(0)$ je tačno, $\alpha_3(1)$ je netačno, itd.

Vrednost rečenice

Formula σ je **rečenica** ako nema slobodnih promenljivih. Na (ne)istinitost rečenice u nekoj strukturi ne utiču valuacije promenljivih. Da je rečenica σ tačna u nekoj strukturi **S**, zapisujemo $\mathbf{S} \models \sigma$ i kažemo da je struktura **S** *model* rečenice σ. Ako rečenica σ nije tačna u **S** pišemo $\mathbf{S} \not\models \sigma$ i kažemo da je **S** *kontramodel* rečenice σ. Primetimo da ako $\mathbf{S} \not\models \sigma$, onda $\mathbf{S} \models \neg\sigma$.

Vrednost rečenice

Formula σ je **rečenica** ako nema slobodnih promenljivih. Na (ne)istinitost rečenice u nekoj strukturi ne utiču valuacije promenljivih. Da je rečenica σ tačna u nekoj strukturi $\mathbf{S}$, zapisujemo $\mathbf{S} \models \sigma$ i kažemo da je struktura $\mathbf{S}$ *model* rečenice σ. Ako rečenica σ nije tačna u $\mathbf{S}$ pišemo $\mathbf{S} \not\models \sigma$ i kažemo da je $\mathbf{S}$ *kontramodel* rečenice σ. Primetimo da ako $\mathbf{S} \not\models \sigma$, onda $\mathbf{S} \models \neg\sigma$.

ZADATAK Koje od sledećih rečenica su tačne u $(\mathbb{N}, \leqslant, {}', +, \cdot, 0)$:

$\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))$
$\forall x \forall y (x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0)$
$\forall x (\neg x = 0 \Rightarrow \exists y (x = y'))$
$\exists y \forall x (x \cdot y = x)$
$\exists x (x \cdot x = 0'')$
$\exists x (x \cdot x = 0'''')$

Teorije; primer Γ_{OG}

Definicija

Teorija nekog vokabulara jeste bilo koji skup rečenica tog vokabulara.

Teorije; primer Γ_{OG}

Definicija

Teorija nekog vokabulara jeste bilo koji skup rečenica tog vokabulara.

Teoriju uredjenih grupa - vokabular uredjenih grupa čine sledeći simboli: jedne binarne relacije, jedne binarne operacije, jedne unarne operacije i simbol jedne konstante; često se u opštem slučaju koriste sledeći simboli: $\leq$, $*$, ${}^{-1}$, e; teoriju uredjenih grupa Γ_{OG} čine aksiome:

(R) $\forall x\,(x \leq x)$
(AS) $\forall x \forall y\,(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$
(T) $\forall x \forall y \forall y\,(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$
(A) $\forall x \forall y \forall z\,(x * (y * z) = (x * y) * z)$
(N) $\forall x\,(x * e = x)$
(I) $\forall x\,(x * x^{-1} = e)$
(S) $\forall x \forall y \forall z\,(x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z \wedge z * x \leq z * y)$

Teorije; primer Γ_{OG}

Definicija

Teorija nekog vokabulara jeste bilo koji skup rečenica tog vokabulara.

Teoriju uredjenih grupa - vokabular uredjenih grupa čine sledeći simboli: jedne binarne relacije, jedne binarne operacije, jedne unarne operacije i simbol jedne konstante; često se u opštem slučaju koriste sledeći simboli: $\leq$, $*$, $^{-1}$, e; teoriju uredjenih grupa Γ_{OG} čine aksiome:

(R) $\forall x\,(x \leq x)$
(AS) $\forall x \forall y\,(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$
(T) $\forall x \forall y \forall y\,(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$
(A) $\forall x \forall y \forall z\,(x * (y * z) = (x * y) * z)$
(N) $\forall x\,(x * e = x)$
(I) $\forall x\,(x * x^{-1} = e)$
(S) $\forall x \forall y \forall z\,(x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z \wedge z * x \leq z * y)$

Uredjena grupa je svaka struktura $(G, \leq, *, ^{-1}, e)$ koja zadovoljava navedene aksiome; npr. $(\mathbb{Q}_{>0}, \leqslant, \cdot, ^{-1}, 1)$

Semantička posledica

Definicija

Neka je Γ neka teorija (skup rečenica). Rečenica α je **semantička posledica** teorije Γ, u oznaci $\Gamma \models \alpha$, ako za svaku strukturu **S**,

$$\text{iz } \mathbf{S} \models \gamma, \text{ za svako } \gamma \in \Gamma, \text{sledi da } \mathbf{S} \models \alpha.$$

Umesto $\emptyset \models \alpha$ pišemo $\models \alpha$.

Ako je $\models \alpha$, tj. α je tačno u svim strukturama odgovarajućeg vokabulara, kažemo da je α valjana rečenica.

Semantička posledica

Definicija

Neka je Γ neka teorija (skup rečenica). Rečenica α je **semantička posledica** teorije Γ, u oznaci $\Gamma \models \alpha$, ako za svaku strukturu $\mathbf{S}$,

$$\text{iz } \mathbf{S} \models \gamma, \text{ za svako } \gamma \in \Gamma, \text{sledi da } \mathbf{S} \models \alpha.$$

Umesto $\emptyset \models \alpha$ pišemo $\models \alpha$.

Ako je $\models \alpha$, tj. α je tačno u svim strukturama odgovarajućeg vokabulara, kažemo da je α valjana rečenica.

PRIMER

$$\Gamma_{\mathrm{OG}} \models \forall x \forall y \forall z (x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y)$$

Sintaksna posledica

Ako je Γ neka teorija (skup rečenica). Rečenica α je **sintaksna posledica** teorije Γ, ako se sekvent $\Gamma \vdash \alpha$ može dobiti primenom pravila iskazne logike i sledećih pravila za kvantifikatore i jednakosti, konačan broj puta:

$$(\forall x_{\mathrm{E}}) \quad \frac{\forall x \alpha}{\alpha[x/t]} \qquad\qquad (\exists x_{\mathrm{U}}) \quad \frac{\alpha[x/t]}{\exists x \alpha}$$

$$(\forall x_{\mathrm{U}}) \quad \frac{\begin{array}{|l} v \\ \quad\vdots \\ \quad \alpha[x/v] \end{array}}{\forall x \alpha} \qquad\qquad (\exists x_{\mathrm{E}}) \quad \frac{\exists x \alpha \quad \begin{array}{|ll} v & \alpha[x/v] \\ & \vdots \\ & \gamma \end{array}}{\gamma}$$

$$(=_{\mathrm{U}}) \quad \frac{}{t = t} \qquad\qquad (=_{\mathrm{E}}) \quad \frac{\alpha[x/t] \quad t = u}{\alpha[x/u]}$$

Posledice pravila za jednakost

Lema

1. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1)$
2. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3)$

Lema

$$\frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}(=_{\mathrm{S}}) \qquad \frac{t_1 = t_2 \quad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}(=_{\mathrm{T}}) \qquad \frac{t_1 = t_2}{t[x/t_1] = t[x/t_2]}(=_{\mathrm{sup}})$$

Primer

PRIMER

$\Gamma_{\mathrm{OG}} \models \forall x \forall y \forall z (x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y)$ ✓

$\Gamma_{\mathrm{OG}} \vdash \forall x \forall y \forall z (x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y)$?

Primer

PRIMER

$\Gamma_{\mathrm{OG}} \models \forall x \forall y \forall z (x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y)$ ✓

$\Gamma_{\mathrm{OG}} \vdash \forall x \forall y \forall z (x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y)$?

$$
\begin{array}{ll}
1. & \forall x \forall y \forall z (x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z \wedge z * x \leq z * y) \\
 & \vdots \\
i. & x, y, z \\
(i+1). & x * z \leq y * z \\
 & \vdots \\
j. & (x * z) * z^{-1} \leq (y * z) * z^{-1} \\
 & \vdots \\
n. & x \leq y \\
(n+1). & x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y \\
 & \forall x \forall y \forall z (x * z \leq y * z \Rightarrow x \leq y)
\end{array}
$$

Teorema saglasnosti i teorema potpunosti

Teorema saglasnosti

Ako je $\Gamma \vdash \alpha$, onda je $\Gamma \models \alpha$.

Teorema potpunosti

Ako je $\Gamma \models \alpha$, onda je $\Gamma \vdash \alpha$.

Primer

Zakon komutativnosti, tj. formula $\forall x \forall y (x * y = y * x)$ ne može izvesti iz aksioma teorije grupa T_{G}:

(A) $\forall x \forall y \forall z \; (x * (y * z) = (x * y) * z)$
(N) $\forall x \; (x * e = x)$
(I) $\forall x \; (x * x^{-1} = e)$

Primer

Zakon komutativnosti, tj. formula $\forall x \forall y (x * y = y * x)$ ne može izvesti iz aksioma teorije grupa T_{G}:

(A) $\forall x \forall y \forall z \, (x * (y * z) = (x * y) * z)$

(N) $\forall x \, (x * e = x)$

(I) $\forall x \, (x * x^{-1} = e)$

$T_{\mathrm{G}} \nvdash \forall x \forall y (x * y = y * x)$ akko $T_{\mathrm{G}} \not\models \forall x \forall y (x * y = y * x)$

Primer

Zakon komutativnosti, tj. formula $\forall x \forall y (x * y = y * x)$ ne može izvesti iz aksioma teorije grupa T_{G}:
(A) $\forall x \forall y \forall z\ (x * (y * z) = (x * y) * z)$
(N) $\forall x\ (x * e = x)$
(I) $\forall x\ (x * x^{-1} = e)$

$T_{\mathrm{G}} \nvdash \forall x \forall y (x * y = y * x)$ akko $T_{\mathrm{G}} \not\models \forall x \forall y (x * y = y * x)$

Treba pokazati konstruisati grupu (model za T_{G}), čija binarna operacija nije komutativna. Npr. $(S_3, \circ, ^{-1}, \sigma_1)$, gde je S_3 skup svih permutacija (bijekcija) skupa $\{1, 2, 3\}$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primer

Npr. $(S_3, \circ, {}^{-1}, \sigma_1)$, gde je S_3 skup svih permutacija (bijekcija) skupa $\{1, 2, 3\}$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da grupa nije komutativna pokazuju jednakosti:

$$\tau_3 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_2, \; \tau_2 \circ \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_3.$$

Tarskijev srednjoškolski problem

Tarski 1960-ih: Da li se iz *HSI* teorije može izvesti svaki identitet koji je tačan u $(\mathbb{N}^+, +, \cdot, \uparrow, 1)$?

Tarskijev srednjoškolski problem

Tarski 1960-ih: Da li se iz *HSI* teorije može izvesti svaki identitet koji je tačan u $(\mathbb{N}^+, +, \cdot, \uparrow, 1)$?

Vilki 1980. god: Identitet

$$\big((1+x)^y + (1+x+x^2)^y\big)^x \cdot \big((1+x^3)^x + (1+x^2+x^4)^x\big)^y$$
$$= \big((1+x)^x + (1+x+x^2)^x\big)^y \cdot \big((1+x^3)^y + (1+x^2+x^4)^y\big)^x$$

je tačan u $(\mathbb{N}^+, +, \cdot, \uparrow, 1)$, ali nije posledica *HSI* teorije.

Logička igra

Pravila igre opisaćemo na vokabularu: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $<$, $*$.
Značenje ovih simbola odredié strukturu nad $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, pri čemu:

- brojevi od označavaju vrste, odn. kolone tabele;
- relacija $<$ odredjuje poredak medju kolonama, odn. vrstama; $x < y$ znači: *kolona* x *je levo od kolone* y, odn. *vrsta* x *je iznad vrste* y;
- operacija $*$ odredjuje sadržaj polja; $x * y = z$ znači: *u polje* (x, y) *upisan je broj* z.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8								
2			3	6					
3		7			9		2		
4		5				7			
5					4	5	7		
6				1				3	
7			1					6	8
8			8	5				1	
9		9					4		

Logička igra

Početni sadržaj pojedinih polja odredjuje sledeći spisak (atomskih) jednakosti, (AT):
$1 * 1 = 8$, $2 * 3 = 3$, $2 * 4 = 6$, $3 * 2 = 7$,
$3 * 5 = 9$, $3 * 7 = 2$, $4 * 2 = 5$, $4 * 6 = 7$,
$5 * 5 = 4$, $5 * 6 = 5$, $5 * 7 = 7$, $6 * 4 = 1$,
$6 * 8 = 3$, $7 * 3 = 1$, $7 * 8 = 6$, $7 * 9 = 8$,
$8 * 3 = 8$, $8 * 4 = 5$, $8 * 8 = 1$, $9 * 2 = 9$,
$9 * 7 = 4$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8								
2			3	6					
3		7			9		2		
4		5				7			
5					4	5	7		
6				1				3	
7			1					6	8
8			8	5				1	
9		9					4		

$(\mathrm{U1})$ $\forall x\, \neg(x < x)$
$(\mathrm{U2})$ $\forall x \forall y\, (x < y \Rightarrow \neg(y < x))$
$(\mathrm{U3})$ $\forall x \forall y \forall z\, (x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$
$(\mathrm{U4})$ $1 < 2 \wedge 2 < 3 \wedge 3 < 4 \wedge 4 < 5 \wedge 5 < 6 \wedge 6 < 7 \wedge 7 < 8 \wedge 8 < 9$

Logička igra

Početni sadržaj pojedinih polja odredjuje sledeći spisak (atomskih) jednakosti, (AT):
$1 * 1 = 8$, $2 * 3 = 3$, $2 * 4 = 6$, $3 * 2 = 7$,
$3 * 5 = 9$, $3 * 7 = 2$, $4 * 2 = 5$, $4 * 6 = 7$,
$5 * 5 = 4$, $5 * 6 = 5$, $5 * 7 = 7$, $6 * 4 = 1$,
$6 * 8 = 3$, $7 * 3 = 1$, $7 * 8 = 6$, $7 * 9 = 8$,
$8 * 3 = 8$, $8 * 4 = 5$, $8 * 8 = 1$, $9 * 2 = 9$,
$9 * 7 = 4$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8								
2			3	6					
3		7			9		2		
4		5				7			
5					4	5	7		
6				1				3	
7			1					6	8
8			8	5				1	
9		9					4		

$(\mathrm{U1})\ \forall x\, \neg(x < x)$
$(\mathrm{U2})\ \forall x \forall y\, (x < y \Rightarrow \neg(y < x))$
$(\mathrm{U3})\ \forall x \forall y \forall z\, (x < y \land y < z \Rightarrow x < z)$
$(\mathrm{U4})\ 1 < 2 \land 2 < 3 \land 3 < 4 \land 4 < 5 \land 5 < 6 \land 6 < 7 \land 7 < 8 \land 8 < 9$
$(\mathrm{SV})\ \forall x \forall y \forall z, (x * y = x * z \Rightarrow y = x)$
$(\mathrm{SK})\ \forall x \forall y \forall z, (x * z = y * z \Rightarrow x = y)$

Logička igra

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8								
2			3	6					
3		7			9		2		
4		5				7			
5					4	5	7		
6				1				3	
7			1					6	8
8			8	5				1	
9		9					4		

(B11) $\forall x \forall y \forall u \forall v (x < 4 \wedge y < 4 \wedge u < 4 \wedge v < 4 \wedge x * u = y * v \Rightarrow x = y \wedge u = v)$

(B22)

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (3 < x \wedge x < 7 \wedge 3 < y \wedge y < 7 \wedge 3 < u \wedge u < 7 \wedge 3 < v \wedge v < 7 \wedge x * u = y * v \Rightarrow \Rightarrow x = y \wedge u = v)$$

(B33) $\forall x \forall y \forall u \forall v (6 < x \wedge 6 < y \wedge 6 < u \wedge 6 < v \wedge x * u = y * v \Rightarrow x = y \wedge u = v)$

(B23)

$$\forall x \forall y \forall u \forall v (6 < x \wedge 6 < y \wedge 3 < u \wedge u < 7 \wedge 3 < v \wedge v < 7 \wedge x * u = y * v \Rightarrow x = y \wedge u = v)$$

Logička igra

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8								
2			3	6					
3		7			9		2		
4		5				7			
5					4	5	7		
6				1				3	
7			1					6	8
8			8	5				1	
9		9					4		

$$(\mathrm{At}) - (\mathrm{B23}) \vdash 1 * 2 = 1 \wedge 1 * 3 = 2 \wedge 1 * 4 = 7 \wedge \cdots$$

Vokabular sadrži: jedan binarni operacijski znak $|\cdots\cdot|$ i dva ternarna znaka koje ćemo označavati sa $\angle$ i $\triangle$. Neka je T_{cong} teorija čije su aksiome univerzalna zatvorenja formula:

- γ_1 $|xy| = |yx|$
- γ_2 $\angle xyz = \angle zyx$
- γ_3 $\triangle xyz = \triangle uvw \Rightarrow |xy| = |uv| \wedge |yz| = |vw| \wedge |zx| = |wu|$
- γ_4 $\triangle xyz = \triangle uvw \Rightarrow \angle xyz = \angle uvw \wedge \angle yzx = \angle vwu \wedge \angle zxy = \angle wuv$
- γ_5 $|xy| = |uv| \wedge \angle xyz = \angle uvw \wedge |yz| = |vw| \Rightarrow \triangle xyz = \triangle uvw$

ZADATAK Dokazati $T_{\text{cong}} \vdash |ab| = |ac| \Rightarrow \angle abc = \angle acb$.

Analiza

$$(\forall \varepsilon > 0)\exists N(\forall n \geqslant N)\ (a_n < \varepsilon) \ \Leftrightarrow\ (\forall \varepsilon > 0)\exists N(\forall n \geqslant N)\ (a_n < \varepsilon/2)$$

Analiza

$$(\forall \varepsilon > 0)\exists N(\forall n \geqslant N)\ (a_n < \varepsilon) \ \Leftrightarrow\ (\forall \varepsilon > 0)\exists N(\forall n \geqslant N)\ (a_n < \varepsilon/2)$$

$(\Rightarrow)$

1. $(\forall \varepsilon > 0)\exists N(\forall n \geqslant N)\ (a_n < \varepsilon)$ pretpostavka
2. ε sveža promenljiva
3. $\exists N(\forall n \geqslant N)\ (a_n < \varepsilon/2)$ $\forall \varepsilon_E$, $[\varepsilon/(\varepsilon/2)]$