# Deljivost

**1.** Ispitati kada izraz $(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3$,$n \in N$ nije deljiv sa 18.

*Rešenje:* Nazovimo naš izraz sa $I$.Važi $18|I \Leftrightarrow 2|I \wedge 9|I$ pa možemo da posmatramo deljivost $I$ sa 2 i 9.Iz oblika u kom je dat izraz možemo zaključiti da je $I$ paran ako je $n$ parno.Naime,brojevi $n-2$,$n$ i $n+2$ su iste parnosti,pa ako je $n$ parno i zbir njihovih kubova biće paran kao zbir tri parna broja.Pošto je naš izraz u stvari neki broj,a deljivost konkretnih brojeva se ispituje faktorizacijom,to ćemo uraditi i ovde:

$$I = n^3 - 3n^2 2 + 3n2^2 - 2^3 + n^3 + n^3 + 3n^2 2 + 3n2^2 + 2^3 = 3n(n^2 - 8)$$

Odavde vidmo da parnost $I$ povlači parnost $n$ što nam daje zajedno sa konstatacijom sa početka zadatka,da je izraz paran akko je $n$ parno.Takođe možemo zaključiti da će $I$ uvek biti deljiv sa 9,što zajedno sa pretpostavkom o deljivosti izraza sa 2 daje da izraz neće biti deljiv sa 18 ako je n neparan broj!Pretpostavimo suprotno,tj da izraz nije deljiv sa 9 što znači da ni jedan od izraza $n$ i $n^2+8$ nije deljiv sa 3 (u suprotnom će izraz biti deljiv sa 9 zbog trojke).Tada je ostatak pri deljenju broja $n$ sa tri 2 ili 1 pa oba slučaja treba opovrgnuti.Uradićemo prvi pošto je drugi analogan.Tada je $n = 3p+1$ a kad njega zamenimo u izraz $n^2+8$,dobiće se $9p^2 + 6p + 9$ a on je deljiv sa 3 što je u kontradikciji sa početnom pretpostavkom.■

**2.** Odretditi cifre $x$ i $y$ tako da:
a) broj $34x5y$ bude deljiv sa 36
b) broj $1993xy$ bude deljiv sa 8 i sa 9

*Rešenje:* a) Nazovimo naš broj sa $n$.Važi $36|n \Leftrightarrow 9|n \wedge 4|n$ pa možemo da posmatramo deljivost n sa 4 i 9.Broj je deljiv sa 4 ako mu je dvocifreni završetak deljiv sa 4 (posledica toga da je 100 deljivo sa 4).Prema tome,jedine dve mogućnosti za $y$ su 2 i 6.Iz uslova o deljivosti sa 9 odredićemo moguće $x$. Broj je deljiv sa 9 ako mu je zbir cifara deljiv sa 9 (posledica toga da je 10=9+1).Odatle je $9|3+4+x+5+y$ odnosno $9|3+x+y$.Pošto su $x$ i $y$ cifre,izraz $3+x+y$ može biti ili 9 ili 18. Za $y = 2$ $x$ će biti 4,a za $y = 6$ imamo dve mogućnosti 0 i 9.Imamo 3 rešenja za broj $n$ 34452,34056 i 34059.

b) Iz deljivosti broja sa 9 imamo $9|1+9+9+3+x+y$ tj $9|4+x+y$.Pošto su $x$ i $y$ cifre,dovoljno je da je zadovoljeno $x+y=5$ ili $x+y=14$ da bi broj bio deljiv sa 9.Broj je deljiv sa 8 ako mu je trocifreni završetak deljiv sa 8 (posledica toga da je 1000 deljivo sa 8).U našem slučaju trocifreni završetak je broj između 300 i 399 pa ćemo raspisati sve one deljive sa 8 pošto ih nema puno.To su brojevi: 304,312,320,328,336,344,352,360,368,376,384 i 392 a jedini koji zadovoljava neku od dve ranije ustanovljene relacije je 368 (6+8=14),pa je traženi broj 199368.■

**3.** Ako su u trocifrenom broju deljivom sa 7 dve poslednje cifre jednake,dokazati da je zbir cifara tog broja deljiv sa 7.

*Rešenje:* Naš broj je trocifren i ima dve poslednji cifre jednake pa je oblika $xyy$.Za ispitivanje deljivosti korisnije ga je gledati kao $100x+10y+y=100x+11y$.Iz $7|100x+11y$ odnosno $7|(98+2)x+(4+7)y$ sledi $7|2x+4y$.Pošto su 7 i 2 uzajamno prosti $7|x+2y$ što je upravo zbir cifara našeg broja.■

**4.** Dokazati da su za ma koji prirodan broj $n$ brojevi $21n+4$ i $14n+3$ uzajamno prosti.

*Rešenje:* Neka je prirodan broj $d$ najveći zajednički delilac datih brojeva. Tada je $21n+4=dk$ i $14n+3=dm$, gde su $k$ i $m$ prirodni brojevi. Množenjem prve jednačine sa 2, a druge sa 3, dobija se $42n+8=2dk$ i $42n+9=3dm$.
Oduzimanjem ovih jednačina dobijamo: $(3m-2k)d=1$. Odavde sledi $d=1$ (radimo u skupu prirodnih brojeva). Dakle, dati brojevi za ma koji prirodan broj $n$ imaju najveći zajednički delilac $d=1$, što znači da su oni uzajamno prosti.■

# Prosti brojevi

**1.** a) Da li postoji prost broj $p$ tako da su i brojevi $3p+1$ i $5p+1$ prosti?
b) Odrediti sve proste brojeve $p$ za koje je i broj $3^p + p^3$ takodje prost.

*Rešenje:* a) Postoji. To je broj $p = 2$, jer su tada brojevi $3 \cdot 2 + 1 = 7$ i $5 \cdot 2 + 1 = 11$ zaista prosti. Više od ovog ne bi bilo moguće, jer bi za bilo koji drugi prost broj $p \geq 3$, zbog njegove neparnosti, brojevi $3p+1$ i $5p+1$ bili parni, a samim tim i složeni.

b) Za $p = 2$ je i broj $3^2 + 2^3$ takodje prost. Za sve ostale proste brojeve $p > 2$ važi da su neparni, pa će zbir $3^p + p^3$ biti zbir dva neparna broja, dakle paran broj, a samim tim i složen. Sledi da je broj $3^p + p^3$ prost jedino za $p = 2$.■

**2.** Svaki prost broj veći od 3 je oblika $6k+1$ ili $6k+5$ za neki prirodan broj k. Dokazati.

*Rešenje:* Sve prirodne brojeve možemo predstaviti na jedan od sledećih šest načina (za $k \in N_0$): $6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5, 6k$.
Brojevi $6k+2, 6k+4, 6k$ su parni, dakle, složeni su. Takodje, broj $6k+3$ je složen, jer je deljiv sa 3. Zaista, ostaju samo brojevi oblika $6k+1$ i $6k+5$, medju kojima su svi prosti brojevi, pa je tvrdjenje dokazano. Obrnuto ne važi.■

**3.** Ako su $p_1, p_2, ..., p_n$ medjusobno različiti prosti brojevi,dokazati da broj

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n}$$

nije ceo.

*Rešenje:* Dati broj možemo zapisati u sledećem obliku

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n} = \frac{p_2p_3...p_n + p_1p_3...p_n + ... + p_1p_2...p_{n-1}}{p_1p_2...p_n}$$

Da bi broj bio ceo,imenilac mora deliti brojilac.Posmatrajmo neki element skupa $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$,npr. $p_1$(analogno se razmatraju i ostali slučajevi).Vidimo da je $p_1$ jedan od delilaca imenioca,ali nasuprot tome svi sabirci brojioca su delivi brojem $p_1$ sem prvog.To upravo znači da brojioc nije deljiv brojem

$p_1$,pa ne deli imenilac.Dati broj ne može biti ceo. ■

**4.** Neka su rešenja jednačine $x^2 + ax + b + 1 = 0$ celi brojevi,različiti od nule,gde su $a, b \in \mathbb{Z}$.Dokazati da je $a^2 + b^2$ složen broj.

*Rešenje:* Označimo rešenja date jednačine sa $x_1$ i $x_2$.Na osnovu $\underline{Vietovihformula}$

| |
|---|
| Za kvadratnu jednačinu $AX^2 + BX + 1 = 0$ sa rešenjima $x_1$ i $x_2$ važi:<br>$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$<br>$x_1 x_2 = \frac{C}{A}$ |

imamo da je $x_1 + x_2 = -a$ i $x_1 x_2 = b + 1$.

$$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + 1 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$$

Dakle, $a^2 + b^2$ je složen broj.■

# Kongruencije

**1.** a) Naći ostatak pri deljenju broja $3^{100}$ sa 13.
b)Dokazati da za sve prirodne brojeve $n$ važi

$$2^{5n} - 1 \equiv 0 (\text{mod } 31).$$

*Rešenje:* a) Kako je $3 \equiv 3(\text{mod } 13)$,dobijamo da je $3^3 \equiv 27(\text{mod } 13)$.
Ostatak pri deljenju broja 27 sa 13 je 1,pa je $3^3 \equiv 1(\text{mod } 13)$.
Odatle je $(3^3)^{33} \equiv 1^{33}(\text{mod } 13)$,tj. $3^{99} \equiv 1(\text{mod } 13)$.
Na kraju,vidimo da je $3^{99} \cdot 3 \equiv 3(\text{mod } 13)$.
Kako je $0 \leqslant 3 < 13$ zaključujemo da je ostatak pri deljenju broja $3^{100}$ sa 13,upravo 3.

b)Znamo da je $2^5 \equiv 32(\text{mod } 31)$,tj. $2^5 \equiv 1 \ (\text{mod } 31)$.
Stepenovanjem ove jednačine sa $n$ dobijamo da je
$2^{5n} \equiv 1(\text{mod } 31)$,a to upravo znači da je $2^{5n} - 1 \equiv 0(\text{mod } 31)$,što je i trebalo pokazati.■

**2.** Proveriti da li važi:

a) $13|2^{70}+3^{70}$

b) $2^{6k+2} \equiv_{18} 4$

*Rešenje:* a)Na osnovu male Fermaove teoreme zaključujemo da je
$2^{12} \equiv 1(mod 13)$
Pošto je množenje kongruencija dozvoljeno, jasno je da važi:
$2^{60} \equiv 1(mod 13)$. Poznato je da je $2^{10} = 1024$, a deljenjem ovog broja sa 13 dobijamo :
$2^{10} \equiv -3(mod 13)$. Dakle, važi
$2^{70} \equiv -3(mod 13) \quad (1)$
Sa druge strane, očigledno je da važi $3^3 \equiv 1(mod 13)$ odnosno,
$3^{69} \equiv 1(mod 13)$, odakle je
$3^{70} \equiv 3(mod 13) \quad (2)$
Iz relacija (1) i (2) dobijamo da je $2^{70} + 3^{70} \equiv 0(mod 13)$, odnosno važi $13|2^{70} + 3^{70}$.

b) Posmatraćemo ostatak broja $2^{6k+2}$ pri deljenju sa 2 i sa 9.
$2^{6k+2} \equiv_2 0$
$2^{6k+2} \equiv_9 ?$
Brojevi 2 i 9 su uzajamno prosti, što znači da je ispunjen uslov Ojlerove teoreme koju ćemo ovde primeniti $\Rightarrow 2^{\varphi(9)} \equiv_9 1$ .
$\varphi(9) = \varphi(3^2) = 3^2 - 3 = 6$, dakle $2^6 \equiv_9 1$

$2^{6k+2} \equiv_9 2^{6k} \cdot 4 \equiv_9 1 \cdot 4 = 4.$
Traženi broj se nalazi u skupu $\{0, 1, 2, ..., 17\}$, paran je i pri deljenju sa 9 dalje ostatak 4. Rešenje je broj 4, čime smo dokazali da važi $2^{6k+2} \equiv_{18} 4$ ■

**3.** Broj je deljiv brojem 3 ako je zbir njegovih cifara deljiv sa 3. Dokazati.

*Rešenje:* Neka ne N neki prirodan broj. Možemo ga predstaviti u sledećem obliku:
$N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$ , gde su $a_0, a1, ..., a_n$ njegove cifre, tj. elementi skupa $\{0, 1, ..., 9\}$
Ispitujemo kada je N deljiv brojem 3. Poznato nam je da je $10 \equiv 1(mod 3)$.
Zbog množenja kongruencija biće $10^k \equiv 1(mod 3)$, za svako $k = 1, 2, ...$

Označimo $P = a_0 + a_1 + ... + a_n$.
Tada je $N - P = a_0(10^n - 1) + a_1(10^{n-1} - 1) + ... + a_{n-1}(10 - 1)$.
Zbog činjenice da je $10^k - 1 \equiv 0(mod3)$, zaključujemo da je $N - P \equiv 0(mod3)$, odnosno $N \equiv P(mod3)$. Brojevi P i N su kongruentni po modulu 3, tj. imaju isti ostatak kada se podele sa 3. Specijalno ako je P deljiv brojem 3 , onda je i N deljiv brojem 3, a to je i trebalo dokazati.■

**4.** Rešiti sistem kongruencija:

$x \equiv 2(mod3)$
$x \equiv 5(mod4)$
$x \equiv -3(mod7)$

*Rešenje:* Brojevi 3, 4 i su uzajamno prosti, što znači da je uslov Kineske teoreme ispunjen. Postoji jedinstveno rešenje po modulu $N = 3 \cdot 4 \cdot 7$.
Na osnovu prve relacije x mozemo zapisati : $x = 3k + 2$, a to zamenimo u drugu
$3k + 2 \equiv 5(mod4)$
$3k \equiv 3(mod4) / \cdot 3$
$9k \equiv 9(mod4)$
$k \equiv 1(mod4)$
$\Rightarrow k = 4t + 1 \Rightarrow x = 3(4t + 1) + 2 = 12t + 5$

Dobili smo da je $x = 12t + 5$, pa to ubacimo u trecu relaciju:
$12t + 5 \equiv -3(mod7)$
$12t \equiv -8(mod7)$
$5t \equiv -1(mod7)$
$5t \equiv 6(mod7) / \cdot 3$
$15t \equiv 18(mod7)$
$t \equiv 4(mod7)$
$\Rightarrow t = 7s + 4 \Rightarrow x = 12(4 + 7s) + 5 = 84s + 53$
Dakle, $x = 84s + 53$, odnosno jedinstveno rešenje po modulu 84 je 53.■

Petar Mileusnić 181/2012
Katarina Dimitrijević 76/2012
Katarina Halaj 69/2012
Marija Stekić 64/2012