Име и презиме: ______________________

Максималан број поена је 5. У угластим заградама су наведени поени.

Задатак 1.

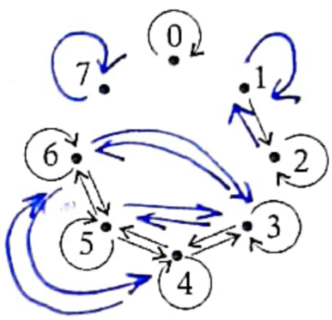
1.1 Одредити унију скупа:

$\bigcup\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\},\{\{\emptyset\}\}\} =$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ [0.2]

1.2 Одредити Декартов производ датих скупова:

$\{0,1\} \times \{0,\{0,1\}\} =$ $\{(0,0), (0,\{0,1\}), (1,0), (1,\{0,1\})\}$ [0.2]

1.3 На слици је приказана релација на скупу $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Доцртати најмањи број стрелица, и навести одговарајуће уређене парове тако да добијени граф представља релацију еквиваленције датог скупа. Одредити затим класе еквиваленције.



Уређени парови који одговарају доцртаним стрелицама су:

$(1,1), (2,1), (3,5), (5,3), (3,6), (6,3), (4,6), (6,4), (7,7)$

Класе еквиваленције су:

$\{0\}, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \{7\}$

[0.6] (само потпуно тачан одговор на 1.3 доноси поене)

Задатак 2. [1] Доказати природном дедукцијом

$\forall x\,(A(x) \Rightarrow B(x)), \exists x\,(A(x) \land C(x)) \vdash \exists x\,(B(x) \land C(x))$

1. $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$ претпоставка
2. $\exists x(A(x) \land C(x))$ претпоставка
3. | $c \quad A(c) \land C(c)$ д. претпоставка
4. | $A(c) \Rightarrow B(c)$ $\forall x_E$, 1
5. | $A(c)$ $\land^L_E$, 3
6. | $C(c)$ $\land^D_E$, 3
7. | $B(c)$ $\Rightarrow_E$, 5, 4
8. | $B(c) \land C(c)$ $\land_u$, 6, 7
9. | $\exists x(B(x) \land C(x))$ $\exists x_u$, 8
10. $\exists x(B(x) \land C(x))$ $\exists x_E$, 2, 3–9.

CamScanner

ЗАДАТАК **3.** Нека је $\emptyset \neq A \subset B$ (тј. A је непразан, строги подскуп од B) и $F : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ функција дата са $F(X) = X \cap A$, за $X \in \mathcal{P}(B)$.

3.1 Да ли је F 1-1 функција? Детаљно образложити одговор. [0.5]

Не. Из $A \subset B$ следи да постоји $b \in B \setminus A$.
Нека је $A_1 = A \cup \{b\}$. Тада је $A \neq A_1$ и
$F(A) = F(A_1) = A$.

3.2 Да ли је F на функција? Детаљно образложити одговор. [0.5]

Да. За свако $Y \in P(A)$, важи $Y \subseteq A \subset B$,
па $Y \in P(B)$ и
$F(Y) = Y \cap A = Y$.

ЗАДАТАК **4.** Да ли за било које скупове важе наведене једнакости? Уколико је одговор потврдан, навести доказ. У супротном, навести пример скупова за које једнакост није тачна.

4.1 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ [1]

Да. За свако x:

$$
\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg\, x \in B \cup C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg\, x \in B \wedge \neg\, x \in C \\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge \neg\, x \in C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C.
\end{aligned}
$$

4.2 $\mathcal{P}(A \setminus B) \setminus \{\emptyset\} = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ [1]

Не. Нека је $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$\{0, 1\} \in P(A) \setminus P(B)$

$\{0, 1\} \notin P(A \setminus B) \setminus \{\emptyset\}$.

CamScanner