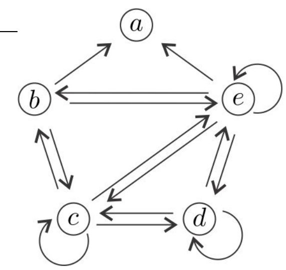
Име и презиме: ____



Максималан број поена је 5. У угластим заградама су наведени поени.

Задатак **1.** Слика десно дефинише бинарни предикат $R(\cdot,\cdot)$ на универзуму који чине a, b, c, d, e.

1.1. За које вредности променљиве x је тачна формула? (Само потпуно тачни одговори доносе поене.)

Формула $R(x,x) \Rightarrow \forall y\, R(x,y)$ је тачна за x: ____________________ [0.2]

Формула $\forall y\,(R(y,x) \Rightarrow R(x,y))$ је тачна за x: ____________________ [0.2]

Формула $\exists y\, R(y,x) \Rightarrow \exists y\, R(x,y)$ је тачна за x: ____________________ [0.2]

1.2. Одредити истинитосну вредност реченице, заокруживањем одговора:

Реченица $\exists x \forall y R(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x R(y,x)$ је: ТАЧНА НЕТАЧНА [0.2]

Реченица $\exists x \forall y \forall z (R(y,x) \vee R(z,x))$ је: ТАЧНА НЕТАЧНА [0.2]

Задатак **2.** Доказати $p \wedge q \Rightarrow r, r \Rightarrow s, q \wedge \neg s \vdash \neg p$ користећи само основна правила природне дедукције.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\,(\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{L}}) \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\,(\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}}) \qquad \frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}\,(\wedge_{\mathrm{U}}) \qquad \frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\,(\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{L}}) \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}\,(\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{D}})$$

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \left|\begin{array}{l}\alpha\\ \vdots\\ \gamma\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\beta\\ \vdots\\ \gamma\end{array}\right.}{\gamma}\,(\vee_{\mathrm{E}}) \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}\,(\Rightarrow_{\mathrm{E}}) \qquad \frac{\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \vdots\\ \beta\end{array}\right.}{\alpha \Rightarrow \beta}\,(\Rightarrow_{\mathrm{U}}) \qquad \frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\perp}\,(\neg_{\mathrm{E}}) \qquad \frac{\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \vdots\\ \perp\end{array}\right.}{\neg\alpha}\,(\neg_{\mathrm{U}}) \qquad \frac{\left|\begin{array}{l}\neg\alpha\\ \vdots\\ \perp\end{array}\right.}{\alpha}\,(\perp_{\mathrm{C}})$$

Доказ: [2]

Задатак **3.** Сабирање природних бројева је дефинисано једнакостима ($\overline{n}$ је следбеник броја n):

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{Rec1}) & m+0=m \\ (\mathrm{Rec2}) & m+\overline{n}=\overline{m+n} \end{array}$$

Доказати да је $(k+m)+n=k+(m+n)$, за све природне бројеве k, m и n.
Доказ: (Сваки корак објаснити.) [1]

Задатак **4.** Формална теорија $\mathcal{F}$ је одређена на следећи начин:
• алфабет садржи три симбола, $\{|,*,=\}$;
• формуле су све речи облика $x*y=z$, где су x, y, z речи записане само симболом $|$;
• једина аксиома је формула $||*|=|$;
• правила извођења су:

$$(\mathrm{R1})\ \frac{x*y=z}{x|*y=z|} \qquad (\mathrm{R2})\ \frac{x*y=z|}{x*y|=z}$$

4.1. Доказати $\vdash_{\mathcal{F}} |||||*|||=||$.
Доказ: [0.7]

4.2. Ако је $\vdash_{\mathcal{F}} \underbrace{||\cdots|}_{73\text{ пута}}*\underbrace{||\cdots|}_{37\text{ пута}}=\underbrace{||\cdots|}_{k\text{ пута}}$, онда је k једнако ______. [0.3]