НЕЈЕДНАКОСТИ И ПРОЦЕНЕ

0. Увод

Неједнакости су једна од неизоставних тема из елементарне математике. Као такве, оне се махом изучавају у средњој школи а неке од њих и на факултету. Често се појављују и на математичким такмичењима и олимпијадама управо због њихове разноврсности. У овом тексту је изложено неколико различитих типова неједнакости, као и бројни примери који их прате.

Важно је напоменути различитост појмова “неједнакост” и “неједначина”. Наиме, први од њих означава нпр. израз облика $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$. За такав израз можемо рећи да је тачан ако је он тачан када заменимо било које бројеве у изразу уместо a и b. Дакле, ми за неке неједнакости заправо дајемо суд, да ли су тачне, нетачне, или ниједно од та два. Нпр. неједнакост $a^2 + b^2 \geq 3ab$ је тачна за $\mathrm{a} = 1,\ b = 4$, док је за $\mathrm{a} = b = 1$ нетачна. Сходно томе, ми неједнакости *доказујемо,* тј. одређеним логичким поступцима верификујемо њихову тачност у одређеном, унапред задатом, скупу.

За разлику од њих, неједначине *решавамо*, то јест тражимо скуп у коме се променљиве које фигуришу у њима налазе, тако да задовољавају почетну неједначину. Тај скуп се онда назива *решењем* неједначине. Нпр. решење неједначине (у скупу реалних бројева)

$$x^3 + 1 \geq 9 \tag{1}$$

је $[2, \infty)$, јер за свако x које припада овом скупу неједначина (1) важи, док за свако x које му не припада иста неједначина не важи.

Сада када смо разјаснили ову терминологију, можемо навести неке основне неједнакости.

1. Неједнакости између средина

Све неједнакости, последично, потичу од фундаменталне неједнакости у скупу реалних бројева,

$$x^2 \geq 0 \tag{2}$$

при чему неједнакост важи *ако и само ако* је $x = 0$. Ова чињеница, иако тривијална, последично нам даје сијасет неједнакости. Ако заменимо $x = a - b$, добијамо

$$(\mathrm{a} - b)^2 \geq 0 \tag{3}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \tag{4}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \tag{5}$$

Неједнакост (5) се често среће и у следећем облику. Нека су $a и b$ ненегативни. Тада постоје $x = \sqrt{a}$ и $y = \sqrt{b}$ и из (5) директно следи да је

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}. \tag{6}$$

Ово је чувена неједнакост између аритметичке и геометријске средине. Притом *аритметичку средину* бројева x и y сматрамо левом, а *геометријску средину* десном страном неједнакости (6). Напоменимо да се она у пракси обично употребљава у облику

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}. \tag{7}$$

Такође, једна од неједнакости која се често користи и која је изведена из (5), када су aиb позитивни, је

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \tag{8}$$

коју једноставно добијамо дељењем неједнакости (5) са ab.

Када у (6) уместо x и y ставимо њихове реципрочне вредности ($\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$), респективно, добијамо

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}} \tag{9}$$

односно, посматрајући реципрочну неједнакост,

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}. \tag{10}$$

Неједнакост (10) се зове неједнакост између хармонијске и геометријске средине, будући да је *хармонијска средина* бројева x и y лева страна те неједнакости. И напослетку, ако на неједнакост (5) додамо са обе стране $a^2 + b^2$ добијамо да важи

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \tag{11}$$

што после дељења са 2 и кореновања постаје

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \tag{12}$$

Последња неједнакост је неједнакост између аритметичке и квадратне средине, будући да је *квадратна средина* бројева a и b лева страна те неједнакости.

Све заједно, доказали смо да за позитивне реалне бројеве a и b важи следећи ланац неједнакости:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{13}$$

Притом, јасно је да се у свакој од наведених неједнакости *једнакост достижеако и само ако су aиb једнаки*. То се најлакше може видети из неједнакости (3), из које (13) следи, а у којој се једнакост достиже акко је $a = b$. Такође, свака од наведених средина налази се између максимума и минимума ова два броја (ово је једноставно доказати и оставља се читаоцу да се у то сам увери). Све узевши, имамо:

$$\min(a,b) \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \max(a,b) \tag{14}$$

Неједнакости између хармонијске и геометријске, геометријске и аритметичке, аритметичке и квадратне средине скраћено зовемо ХГ, АГ и АК, респективно.

Следи неколико примера у којима се наведене неједнакости користе.

1. Доказати да за сваки реалан број x важи $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2$.

Решење:

Ову неједнакост можемо помножити са кореном у имениоцу разломка на левој страни. Тада неједнакост постаје:

$$x^2 + 2 \ge 2\sqrt{x^2+1},$$

што се види из $$x^2 + 2 = (x^2+1) + 1 \ge 2\sqrt{(x^2+1)\cdot 1},$$

као последица АГ примењене на x^2+1 и 1. Једнакост важи акко је $x^2+1=1$, односно када је $x=0$.

Напомена: При доказивању неједнакости у којима фигурише знак $\ge$ (или $\le$), увек је неопходно дискутовати и када се достиже једнакост (ако се достиже). То је важно, јер се неједнакости (у математици и ван ње) често користе ради процене одређених величина, и онда је неопходно знати када се достиже једнакост, специјално за које параметре се достиже максимум или минимум неке функције. Објаснимо то у следећем једноставном примеру.

2. Збир два позитивна броја је 10. Колика је максимална вредност њиховог производа? За које бројеве се тај максимум достиже?

Решење:

Нека су то бројеви x и y. Из АГ примењене на њих следи

$$5 = \frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy},$$

што после квадрирања даје $25 \ge xy$, те је 25 евентуална максимална вредност њиховог производа. Међутим, АГ достиже једнакост када су x и y једнаки, односно када је $x=y=5$, и тада је xy заиста 25.

Дакле, у разноразним процесима минимизације/максимизације када користимо неједнакости врло је важно знати када исте постају једнакости. Зато ћемо то дискутовати у сваком задатку у наредном тексту.

3. Доказати да за све реалне $a, b, c \ge 0$ важи $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$.

Решење:

Примећујемо да на левој страни имамо одређене збирове, а на десној производ. То нам указује на употребу АГ неједнакости, јер се у њој такође са стране која је већа или једнака налази збир, а са друге производ. Према томе, имамо следеће АГ неједнакости:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc},$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca},$$

и када их измножимо добијамо тражену неједнакост. Једнакост се достиже када важи у *све три* наведене неједнакости, а то је могуће акко је $a = b = c$.

4. Нека су дати бројеви $a_i > 0$, за $i = 0, .., n$ и нека је $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Доказати да онда важи $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$.

Решење:

Сличном дискусијом као у претходном задатку користимо АГ на сваки од парова 1 и a_i. То нам даје

$$1 + a_1 \geq 2\sqrt{a_i}, \tag{15}$$

за $i = 0, .., n$. Када све то измножимо добијамо

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n},$$

при чему из услова задатка имамо да је број испод корена на десној страни једнак 1, чиме добијамо тражену неједнакост. Једнакост се достиже када иста важи и у свакој од неједнакости (15), тј. акко су сви бројеви a_i једнаки 1.

5. Доказати да за све реалне бројеве $a, b, c, d \geq 0$ важи $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$

Решење:

Приметимо одмах да су у наведеној неједнакости појављује превише корена. То углавном покушавамо да избегнемо јер је рад са полиномима лакши. Зато квадрирајмо ову неједнакост,

$$(a + c)(b + d) \geq (\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 \tag{16}$$

што након множења даје

$$ab + ad + cb + cd \geq ab + cd + 2\sqrt{abcd},$$

и након скраћивања истих чланова са леве и десне стране добијамо

$$ad + cb \geq 2\sqrt{abcd}, \tag{17}$$

што је ништа друго до АГ између ad и cb. Дакле, неједнакост (17) је тачна, а из ње следи и неједнакост (16), јер је еквивалентна њој. Неједнакост коју треба доказати је такође еквивалентна са (16), јер су за ненегативне бројеве x и y неједнакости $x \geq y$ и $x^2 \geq y^2$ еквивалентне, што остављамо читаоцу да сам докаже. Једнакост у доказаној неједнакости важи акко важи и у (17), тј. акко је $ad = bc$.

6. Доказати да за све реалне бројеве a, b, c важи $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Већина неједнакости се може доказати на више различитих начина, са више различитих приступа. Зато ћемо на овом месту навести 2 доказа.

1. Решење:

Множећи са 2 и пребацујући све на леву страну неједнакости, добијамо еквивалентну

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \tag{18}$$

Примећујемо да се могу издвојити квадрати бинома на левој страни, из

$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, закључујемо да је (18) еквивалентно са

$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$,

што је очигледно тачно, уз једнакост акко је $a = b = c$.

2. Решење:

Као и раније, збир на страни неједнакости која је већа или једнака треба да нас асоцира на АГ. Такође, на десној страни неједнакости се појављују мешовити производи, који се такође појављују у (5) (која је такође АГ), па користећи ту неједнакост добијамо редом:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc,$$

$$c^2 + a^2 \geq 2ca.$$

Сабирајући ове неједнакости и дељењем са 2 добијамо тражену неједнакост. Једнакост важи акко важи у све три, дакле акко је $a = b = c$.

7. Доказати да за све реалне $a, b, c \geq 0$ важи $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Решење:

Овде се користи један познат идентитет,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca), \tag{19}$$

који када се први пут види делује застрашујуће. Међутим, када се више пута виде овакве формуле, као и многе друге (квадрат бинома, квадрат тринома, куб бинома, итд.) временом се присвоје “без размишљања”. Тако да се не треба уплашити овог као ни сличних израза који се могу појавити и које је врло корисно знати при раду са неједнакостима. Оставља се читаоцу да се увери да идентитет (19) заиста важи, множећи десну страну једнакости.

Неједнакост коју треба доказати је еквивалентна са $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$, што директно следи из претходног задатка и (19), јер су чиниоци који фигуришу у десној страни једнакости (19) оба ненегативна, па је такав и њихов производ. Једнакост важи акко је $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$, односно ако је неки од наведених чиниоца једнак нули. Први од њих, $a + b + c$, је једнак нули акко $a = b = c = 0$, док је други једнак нули, према претходном задатку, акко је $a = b = c$. Закључујемо да једнакост важи акко је $a = b = c$.

Као последица претходног задатка је неједнакост између аритметичке и геометријске средине три броја. Наиме, ови појмови се директно уопштавају на више бројева:

Аритметичка средина бројева $a_i \geq 0, i = 0,..,n$ је $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, док је *геометријска средина* једнака $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Важи уопштење неједнакости (6), тј.

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$,

и оно ће бити доказано касније. Но, видимо да смо за $n = 3$, тј. неједнакост

$$\frac{x+y+z}{3} \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

већ доказали. Заиста, довољно је да ставимо $x = a^3, y = b^3, z = c^3$ у неједнакост из задатка **7**.

8. (Несбитова неједнакост) Нека су дати реални бројеви $a, b, c > 0$. Доказати да важи

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Решење:

Велики изрази у имениоцима разломака нам обично праве проблеме при доказивању неједнакости. Зато се трудимо да их некако уклонимо, проценимо нечим мање компликованим. Један од начина да то урадимо је *сменом*. Зато, уведимо смену

$x = b + c, y = c + a$ и $z = a + b$.

Из овог система једначина можемо изразити a, b *и* c преко x, y, z:

$a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{x+z-y}{2}$ и $c = \frac{x+y-z}{2}$. Када ово убацимо у Несбитову неједнакост добијамо да

$$\frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2},$$

што је, након множења са 2 и расчлањивања бројиоца у разломцима, еквивалентно

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6,$$

што груписањем реципрочних разломака даје

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\geq 6.$$

Последња једнакост је евидентна, из троструке примене неједнакости (8). Једнакост важи акко важи у неједнакости (8), која је еквивалентна АГ, па следи да мора бити $x=y=z$, што нам из начина на који смо увели смену даје $a=b=c$.

Наведимо сада један задатак у коме се користи метода поретка променљивих као и одговарајуће смене. Наиме, често у неједнакостима успоставимо неки одређени поредак између променљивих како бисмо је лакше доказали. Притом је (понекад) погодно употребити смену која прати овај поредак.

9. Доказати да за све реалне $a,b,c\geq 0$ важе следеће три неједнакости:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a);$$
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc;$$
$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc.$$

Решење:

На први поглед делује да ћемо имати пуно посла, јер треба да докажемо три неједнакости. Међутим, приметимо да у свакој од ове три неједнакости имамо моном abc (у првим двема неједнакостима тај моном је помножен коефицијентом 3, као и да у свакој од ових неједнакости учествују искључиво мономи трећег степена. Ослободимо сезаграда у овим неједнакостима, па да видимо шта ћемо добити. Од прве неједнакости добијамо:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$
$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2.$$

Од друге неједнакости добијамо:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$$
$$a^2b+a^2c-a^3+b^2c+b^2a-b^3+c^2a+c^2b-c^3\leq 3abc$$
$$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b\leq a^3+b^3+c^3+3abc.$$

Дакле, прва и друга неједнакост су еквивалентне. То значи да је довољно доказати само једну од њих, тј. ако важи једна неједнакост, важиће и друга.

Било би идеално када би и трећа неједнакост била еквивалентна с првом. Да видимо да ли је то тачно.

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc$$

Приметимо да је производ прва два чиниоца у ствари разлика квадрата b^2 и $(c-a)^2$, тј. имамо:

$$(b^2-c^2-a^2+2ca)(c+a-b)\le abc$$
$$b^2c+b^2a-b^3-c^3-c^2a+c^2b-a^2c-a^3+a^2b+2c^2a+2ca^2-2cab\le abc$$
$$b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+a^2c+a^2b\le a^3+b^3+c^3+3abc.$$

Дакле, и трећа неједнакост еквивалентна је са првом, па ће све три неједнакости бити доказане ако докажемо једну од њих. Докажимо нпр. прву неједнакост.

Приметимо да је прва једнакост симетрична по a,b,c, тј. уколико било како променимо места променљивима a,b,c (нпр. ставимо b уместо a, c уместо b и a уместо c), добијамо исту неједнакост. Стога можемо без умањења општости претпоставити да је $a\le b\le c$. Другим речима, довољно је доказати неједнакост у случају када је $a\le b\le c$. Заиста, уколико је нпр. $b\le c\le a$, означимо $a'=b$, $b'=c$ и $c'=a$. Тада имамо $a'\le b'\le c'$ и неједнакост гласи:

$$c'^3+a'^3+b'^3+3c'a'b'\ge c'a'(c'+a')+a'b'(a'+b')+b'c'(b'+c'),$$

што је у ствари почетна неједнакост са додатим знаком „прим“на сваку од променљивих a,b,c .Уколико почетна неједнакост важи у случају $a\le b\le c$, важиће неједнакост са „примовима“ у случају $a'\le b'\le c'$, што је неједнакост без „примова“ у случају $b\le c\le a$.

Ових неколико додатних реченица служи да се ученицима објасни шта значи израз „Можемо без умањења општости претпоставити да нешто важи.“

Такође, ова неједнакост је хомогена по a,b,c, тј. уколико је $a=ta'$, $b=tb'$ и $c=tc'$ за неко $t>0$ (неједнакост доказујемо само за $a,b,c\ge 0$, те мора бити $a',b',c'\ge 0$, па следи да је $t\ge 0$, а случај $t=0$ одбацујемо, јер је тада $a=b=c=0$, па је неједнакост очигледна), тада добијамо

$$t^3a'^3+t^3b'^3+t^3c'^3+3ta'tb'tc'\ge ta'tb'(ta'+tb')+tb'tc'(tb'+tc')+tc'ta'(tc'+ta').$$

Након скраћивања са $t^3>0$ добијамо

$$a'^3+b'^3+c'^3+3a'b'c'\ge a'b'(a'+b')+b'c'(b'+c')+c'a'(c'+a'),$$

што је у ствари почетна неједнакост са „примовима“. Зато можемо без умањења општости претпоставити да је $a=0$ или $a=1$, а b и c остају произвољни тако да важи $a\le b\le c$. Заиста, уколико докажемо неједнакост у ова два случаја, неједнакост ће важити и за произвољно $a\ge 0$. Уколико је $a=0$, имамо специјални случај који ћемо доказати, а уколико је $a>0$, узмимо $a'=1$, $b'=\dfrac{b}{a}$, $c'=\dfrac{c}{a}$ и почетна неједнакост ће након дељења са $a^3>0$ постати неједнакост са „примовима“ која је специјални случај $a'=1$.

Дакле, нека је $a=0$ и $0\le b\le c$. Тада прва неједнакост гласи $b^3+c^3\ge bc(b+c)$. Из формуле за збир кубова имамо да је $(b+c)(b^2-bc+c^2)-bc(b+c)\ge 0$, па извлачењем $b+c$ испред заграде добијамо $(b+c)(b^2-bc+c^2-bc)\ge 0$, тј.

$(b+c)(b-c)^2 \geq 0.$

Како је очигледно $b+c \geq 0$ и $(b-c)^2 \geq 0$, горња неједнакост је тачна.Преостаје нам још други случај.

Нека је сада $a=1$ и $1 \leq b \leq c$. Тада можемо написати $b=1+x$ и $c=1+y$ за неке $x, y \geq 0$. Добијамо да важи:

$$1+(1+x)^3+(1+y)^3+3(1+x)(1+y) \geq (1+x)(2+x)+(1+x)(1+y)(2+x+y)+(1+y)(2+y)$$
$$6+6x+3x^2+x^3+6y+3y^2+y^3+3xy \geq 6+6x+2x^2+6y+2y^2+4xy+x^2y+xy^2$$
$$x^3+x^2+y^3+y^2 \geq x^2y+xy+xy^2$$
$$x^3+y^3+x^2-xy+y^2-xy(x+y) \geq 0$$
$$x^3+y^3+(x-y)^2+xy-xy(x+y) \geq 0$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2-xy)+(x-y)^2+xy \geq 0$$
$$(x-y)^2(x+y+1)+xy \geq 0.$$

Последња неједнакост је тачна, јер је $(x-y)^2 \geq 0$, $x+y+1 \geq 1$ и $xy \geq 0$ за све $x, y \geq 0$. Стога је и полазна неједнакост тачна и у случају $a=1$, $1 \leq b \leq c$.

Како су овим обрађени сви случајеви, прва неједнакост је тачна за све $a,b,c \geq 0$. Такође, све три неједнакости су еквивалентне, па су самим тим доказане све три неједнакости.

Када важи једнакост? У случају $a=0$ и $0 \leq b \leq c$ једнакост важи ако и само ако је $b+c=0$ или $(b-c)^2=0$. У првом случају због $b,c \geq 0$ следи да је $b=c=0$, а у другом случају следи да је $b=c$. Дакле, свакако је $b=c$, те закључујемо да једнакост важи у случају када је $a=0$ и $b=c$.

У случају $a=1$ и $1 \leq b \leq c$ једнакост важи ако и само ако је $(x-y)^2=0$ и $xy=0$, тј. ако и само ако је $x=y$ и важи $x=0$ или $y=0$. Дакле, једнакост важи ако и само ако је $x=y=0$, тј. $b=c=1$.Како је и $a=1$, закључујемо да једнакост важи ако и само ако је $a=b=c=1$. Сетимо се да је неједнакост хомогена, тј. да смо без умањења општости у случају $a \neq 0$ претпоставили да је $a=1$. Дакле, у случају $a \neq 0$ имамо да једнакост важи ако и само ако је $a=b=c$.

Коначни закључак је да у неједнакостима из текста задатка једнакост важи ако и само ако је најмањи од бројева a,b,c једнак 0 и преостала два су једнака међу собом или је $a=b=c$.

2. Коши-Шварцова неједнакост

Коши-Шварцова неједнакост је једна од најважнијих и најчешће примењиваних неједнакости у математици. Она тврди да за сваки природни број n и за све реалне бројеве $a_1,\ldots,a_n$ и $b_1,\ldots,b_n$ важи неједнакост

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \text{ тј. } (a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2).$$

Докажимо ову неједнакост.
Посматрајмо квадратни полином:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 = x^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Из записа с леве стране знака једнакости овог полинома видимо да за свако реално x овај полином узима ненегативне вредности. Да би то било могуће, мора бити испуњен један од следећа два услова. Први је да коефицијент уз x^2 мора бити строго позитиван и дискриминанта полинома негативна или нула, а други је да коефицијенти уз x^2 и x морају бити нула и слободни члан мора бити ненегативан. У првом случају је $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$ и $4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \le 0$. Другим речима, мора бар један од бројева a_i бити различит од нуле и мора важити неједнакост $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$, што је управо Коши-Шварцова неједнакост. У другом случају је $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge 0$. Из $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ следи да је $a_i = 0$ за све $1 \le i \le n$, чиме је $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$ испуњено за све b_i. Такође, неједнакост $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge 0$ је тачна за све b_i. Проверимо да ли тада важи Коши-Шварцова неједнакост.

Лева страна Коши-Шварцове неједнакости је $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = 0$, а десна је $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = 0 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$. Неједнакост $0 \le 0$ је очигледно тачна, па имамо да Коши-Шварцова неједнакост важи и у овом случају.

Нека су реални бројеви $a_1,\dots,a_n$ и $b_1,\dots,b_n$ координате вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ у некој ортонормираној бази. Тада Коши-Шварцову неједнакост *можемо лакше записати на следећи начин:* $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \le |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

Као и код сваке неједнакости, поставља се питање када важи једнакост? Уколико је $a_i = 0$ за све $1 \le i \le n$, важи једнакост. Претпоставимо зато да је бар један од бројева a_i различит од нуле. Тада једнакост важи ако и само ако је дискриминанта једнака нули, тј. ако и само ако полазни квадратни полином има јединствено решење $x = x_0$. Дакле, $x_0^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x_0^2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$, тј.

$\sum_{i=1}^{n}(a_i x_0 + b_i)^2 = 0$. Дакле, за свако $1 \le i \le n$ мора бити $a_i x_0 + b_i = 0$, тј. $b_i = \lambda a_i$, где је $\lambda = -x_0$. Уколико посматрамо векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$, последњи низ једнакости значи да је $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, тј. да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно зависни.

Како за сваки вектор $\vec{b}$ имамо да су $\vec{0}$ и $\vec{b}$ линеарно зависни, сједињавањем ова два случаја добијамо да *у Коши-Шварцовој неједнакости једнакост важи ако и само ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно зависни*.

Помоћу Коши-Шварцове неједнакости можемо доказати да за сваки природни број n важе неједнакости између аритметичке и квадратне средине (*квадратна средина* n бројева се уопштава на природан начин, слично аритметичкој). Нека су $a_1,\dots,a_n > 0$ произвољни позитивни бројеви. Следи:

$$\begin{aligned}&(1\cdot a_1 + \dots + 1\cdot a_n)^2 \le (1^2 + \dots + 1^2)(a_1^2 + \dots + a_n^2)\\&(a_1 + \dots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + \dots + a_n^2).\end{aligned}$$

Како су и лева и десна страна ненегативни реални бројеви, смемо извршити кореновање. Добијамо:

$$\begin{aligned}&\sqrt{(a_1 + \dots + a_n)^2} \le \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}\\&|a_1 + \dots + a_n| \le \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.\end{aligned}$$

Сви бројеви a_i су позитивни, те се можемо ослободити апсолутне вредности на левој страни неједнакости. Дељењем са n добијамо

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}},$$

што је тражена неједнакост између аритметичке и квадратне средине.

Наведимо још један пример у коме се користи неједнакост Коши-Шварца.

10. Нека су $a, b, c > 0$ реални бројеви. Доказати да онда важи неједнакост

$$abc(a+b+c) \le a^3b + b^3c + c^3a.$$

Решење:

Применимо Коши-Шварцову неједнакост на векторе:

$\left(\frac{a}{\sqrt{c}}, \frac{b}{\sqrt{a}}, \frac{c}{\sqrt{b}}\right)$ и $\left(\sqrt{c}, \sqrt{a}, \sqrt{b}\right)$. Тада добијамо:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{c} + \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} + \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b}\right)^2 \le \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)(c+a+b),$$

Након сређивања израза на левој и десној страни неједнакости, добијамо следећу импликацију:

$$(a+b+c) \le \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \quad => abc(a+b+c) \le a^3b + b^3c + c^3a,$$

чиме је тражена неједнакост доказана.

3.Неједнакости о преуређивању

У наредном задатку видећемо једну занимљиву и моћну теорему која нам омогућава да увидимо тачност многих неједнакости методом инспекције.

11. Посматрајмо низове $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ позитивних реалних бројева. Такође, нека имамо низ $c_1, \ldots, c_n$ који је нека од $n!$ пермутација низа $b_1, \ldots, b_n$. При којој од тих пермутација ће сума $S = a_1c_1 + \ldots + a_nc_n$ бити најмања, а при којој ће та сума бити највећа?

Пре него што урадимо овај задатак, размислимо мало о следећем проблему. Нека имамо четири кутије у којима се налази по шест новчаница од редом 100, 200, 500 и 1000 динара. Дозвољено нам је да из једне кутије извучемо три новчанице, из неке друге четири новчанице, из треће пет новчаница и из преостале кутије шест новчаница. Како да одаберемо из које кутије ћемо узети колико новчаница да бисмо добили највећу могућу суму?

Намеће нам се идеја да користимо тзв. *алгоритам за похлепне*, тј. да из кутије у којој се налазе новчанице са 1000 динара извучемо највише новчаница (свих шест), затим из кутије у којој се налазе новчанице од 500 динара узмемо пет новчаница, из кутије у којој се налазе новчанице од 200 динара узмемо четири новчанице и коначно из кутије у којој се налазе новчанице од 100 динара узмемо три новчанице. То је наравно једини начин на који можемо добити највећу суму новца. Запитајмо се сада како да узмемо најмању количину новца.

Одговор би требало да буде да користимо обрнуту логику од алгоритма за похлепне, тј. да из кутије у којој су новчанице од 100 динара узмемо највише, тј. свих шест новчаница, а из кутије у којој се налазе новчанице од 1000 динара узмемо најмање, тј. три новчанице. Наравно, одговор је тачан, тј. једино се на овај начин може добити најмања сума.

Вратимо се сада на полазни проблем и применимо овај начин размишљања. Формулишимо теорему, а затим је докажимо.

Теорема. *Сума* $S = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ *је највећа ако су оба низа* $a_1, \ldots, a_n$ *и* $b_1, \ldots, b_n$ *поређана на исти начин, тј. оба растуће или опадајуће. Сума* $S = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ *је најмања ако су низови* $a_1, \ldots, a_n$ *и* $b_1, \ldots, b_n$ *поређани на супротни начин, тј. један од њих поређан растуће, а други опадајуће.*

Доказ: Претпоставимо да је низ $a_1, \ldots, a_n$ растући. Прво докажимо ову теорему у случају када је $n = 2$. Тада постоје само две пермутације скупа $\{b_1, b_2\}$, па самим тим имамо само две могуће суме. Ако је $b_1 \leq b_2$, онда у неједнакости $a_1b_1 + a_2b_2 \geq a_1b_2 + a_2b_1$ пребацимо све на леву страну и након растављања на чиниоце добијамо $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0$, што је тачно.

Докажимо сада теорему у случају да је $n > 2$. Уколико је $a_1 = \ldots = a_n$, тада је за сваку пермутацију $c_1, \ldots, c_n$ низа $b_1, \ldots, b_n$ сума $S = a_1c_1 + \ldots + a_nc_n$ иста, па теорема у том случају важи. Нека $a_1, \ldots, a_n$ није константан низ и нека је $b_1, \ldots, b_n$ растући низ. Претпоставимо да сума $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ није највећа и нека је $c_1, \ldots, c_n$ пермутација низа $b_1, \ldots, b_n$ таква да је сума $S = a_1c_1 + \ldots + a_nc_n$ највећа. Свакако, $c_1, \ldots, c_n$ није растући (тј. није једнак са низом $b_1, \ldots, b_n$). Тада постоје неки индекси $i < j$ такви да је $c_i > c_j$. Ако је $a_i = a_j$, заменимо места елементима c_i и c_j. Новодобијени низ није растући, тј, није једнак низу $b_1, \ldots, b_n$, јер се сума није променила, а претпоставили смо да сума $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ није највећа. Према томе, пошто је сума са овим низом иста као и са почетним низом $c_1, \ldots, c_n$, па је самим тим највећа, могли смо за почетни низ одабрати баш овај. Због тога заборавимо на онај низ и означимо овај низ са $c_1, \ldots, c_n$. Дакле, постоје нека друга два индекса $i' < j'$ за које је $c_{i'} > c_{j'}$. Ако је и тада $a_{i'} = a_{j'}$, применимо поново претходно расуђивање. На крају ћемо добити неке индексе $r < s$ за које важи $c_r > c_s$ и $a_r \neq a_s$, јер низ $a_1, \ldots, a_n$ није константан и сума $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ није највећа. Но, посматрајмо тада суму $S' = a_1c_1 + \ldots + a_ic_j + \ldots + a_jc_i + \ldots + a_nc_n$. Важи да је $S' - S = (a_j - a_i)(c_i - c_j) > 0$, тј. $S' > S$. Међутим, ово је немогуће, јер смо добили суму S' која је већа од суме S за коју смо претпоставили да је највећа. Према томе, претпоставка да сума $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ није највећа јесте погрешна, тј. та сума је највећа. ■

На потпуно исти начин се доказује да је сума $S = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ најмања када је низ $b_1, \ldots, b_n$ опадајући.

Након доказа ове теореме, решење задатка постаје сасвим једноставно.

Решење:

Због комутативности сабирања, тј. могућности да мењамо редослед сабирака у суми, поређајмо сабирке у суми тако да њихови први чиниоци чине растући низ. Означимо тај низ са $a_1,\ldots,a_n$, а низ других чинилаца са $b_1,\ldots,b_n$. Из теореме следи да ће сума $a_1c_1+\ldots+a_nc_n$ бити највећа за ону пермутацију $c_1,\ldots,c_n$ низа $b_1,\ldots,b_n$ за коју је низ $c_1,\ldots,c_n$ растући. Слично, из теореме следи да ће сума $a_1c_1+\ldots+a_nc_n$ бити најмања за ону пермутацију $c_1,\ldots,c_n$ низа $b_1,\ldots,b_n$ за коју је низ $c_1,\ldots,c_n$ опадајући.

Пређимо сада на примене претходне теореме кроз неколико задатака.

12. Доказати да за сваки природни број n и за све позитивне реалне бројеве $x_1,\ldots,x_n$ важи неједнакост између њихове аритметичке и геометријске средине, тј. да је

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\le\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}. \qquad (20)$$

<u>*Решење*</u>**:**

Означимо $c=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$, $a_1=\dfrac{x_1}{c}$, $a_2=\dfrac{x_1x_2}{c^2},\ldots,a_n=\dfrac{x_1\cdots x_n}{c^n}=1$, $b_1=\dfrac{1}{a_1}$, $b_2=\dfrac{1}{a_2},\ldots,b_n=\dfrac{1}{a_n}=1$. Без умањења општости претпоставимо да је низ $a_1,\ldots,a_n$ растући (то можемо постићи преуређивањем низа $x_1,\ldots,x_n$ које због комутативности сабирања и множења неће променити вредности на левој и десној страни неједнакости (20)). Тада је низ $b_1,\ldots,b_n$ опадајући, па важи:

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n\le a_1b_n+a_2b_1+a_3b_2\ldots+a_nb_{n-1}$$

$$1+\ldots+1\le\frac{x_1}{c}+\ldots+\frac{x_n}{c}$$

$$n\le\frac{x_1+\ldots+x_n}{c}$$

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}=c\le\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}.$$

Овим је неједнакост између аритметичке и геометријске средине доказана.

13. (ИМО 1975) Нека су x_i, y_i $1\le i\le n$ реални бројеви, такви да је:
$x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n$ и $y_1\ge y_2\ge\cdots\ge y_n$.
Обележимо са $z_1,z_2,\ldots z_n$ неку пермутацију бројева $y_1,y_2,\ldots,y_n$. Тада важи следећа неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\le\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$$

Решење :
Развијањем квадрата сваког од сабирака на обема странама неједнакости добијамо следећу еквивалентну неједнакост:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2x_iy_i + y_i{}^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2x_iz_i + z_i{}^2$$

У овој неједнакости се на обе стране појављују исти чланови x_i, као и исти чланови y_i(на десној страни је z_i,што је само пермутација чланова y_i), па њих можемо да пократимо. Остају само средишњи чланови, па извлачењем -2 испред суме добијамо следећу еквивалентну неједнакост:

$$-2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leq -2\sum_{i=1}^{n} x_iz_i$$

Даље можемо скратити са обе стране елемент -2, што ће променити знак неједнакости, тј добијамо неједнакост:

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_iz_i$$

Али ова једнакост је управо варијанта неједнакости о преуређивању, јер је сума $\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ највећа од свих могућих комбинација сума производа x_i-ова и y_i-ова, јер су они сортирани на исти начин (опадајућим поретком), те је и већа или једнака и од $\sum_{i=1}^{n} x_iz_i$ (једнака је само у случају да суz_i поређани у опадајућем поретку).

14. (ИМО 1978) Нека је дат низ различитих строго позитивних бројева $\{a_k\}_{k\geq 0}$. Доказати да за свако n важи:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

.

Решење:

Поново ћемо применити неједнакост о преуређивању, али њен други део који каже да се минимум достиже када су низови обрнуто сортирани нпр. први растуће а други опадајуће. Нека је π пермутација таква да је низ $\{a_{\pi(k)}\}_{k\geq 0}$ сортиран растуће. С обзиром да $\frac{1}{k^2}$ опада имаћемо:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{\pi(k)}}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Остаје још да објаснимо другу неједнакост. Чињеница је да су $a_{\pi(k)}$ строго позитивни као и да је низ $a_{\pi(k)}$ строго растући (строго зато што су сви чланови низа различити). Одатле следи $a_{\pi(1)} \geq 1, a_{\pi(2)} \geq 2, \dots , a_{\pi(n)} \geq n$.

15. (Чебишевљева неједнакост) Нека су $a_1,\dots,a_n$ и $b_1,\dots,b_n$ низови позитивних реалних бројева поређани на исти начин, тј. оба растуће или оба опадајуће. Доказати да важи неједнакост:

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+\dots+b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1+\dots+a_nb_n}{n}.$$

Решење:

Из теореме о преуређивању знамо да важе следеће неједнакости:

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \geq a_1b_1 + a_2b_2 \ldots + a_nb_n,$$
$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \geq a_1b_2 + a_2b_3 \ldots + a_nb_1,$$
$$\vdots$$
$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \geq a_1b_n + a_2b_1 \ldots + a_nb_{n-1}.$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо:

$$n(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) \geq (a_1 + \ldots + a_n) \cdot (b_1 + \ldots + b_n).$$

Дељењем са $n^2 > 0$ добијамо Чебишевљеву неједнакост

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{n}.$$

Из доказа Чебишебљеве неједнакости видимо да на сличан начин можемо доказати да важи следеће. Ако су $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ низови позитивних реалних бројева поређани на супротан начин, тј. један растуће а други опадајуће, тада важи неједнакост

$$\frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}.$$

При раду са неједнакостима о преуређивању погодно и елегантније је користити скаларни производ. Присетимо се зато тог појма. Нека су дата два тродимензиона вектора $[a_1, a_2, a_3], [b_1, b_2, b_3] \in \mathbb{R}^3$. Тада дефинишемо њихов скаларни производ на следећи начин:

$$[a_1, a_2, a_3] \cdot [b_1, b_2, b_3] = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

16. а) Нека су a, b и c реални бројеви. Доказати да важи следећа неједнакост :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

б) Нека је $a, b, c \geq 0$. Доказати да важе следеће неједнакости:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\mathrm{b} + b^2\mathrm{c} + c^2a$$
$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\mathrm{c} + b^2\mathrm{a} + c^2\mathrm{b}$$

<u>*Решење*</u>**:**

а) Неједнакост је симетрична по променљивим $a, b, c,$ па можемо без умањења општости претпоставити да је $a \leq b \leq c$. Тада из неједнакости о преуређивању имамо да важи:

$$a^2 + b^2 + c^2 = [a, b, c] \cdot [a, b, c] \geq [a, b, c] \cdot [b, c, a] = ab + bc + ca,$$

што је и требало доказати.

Из неједнакости о преуређивању приликом следеће транспозиције важи следеће: $[a_1, a_2, a_3] \cdot [b_1, b_2, b_3] = [a_1, a_2, a_3] \cdot [b_2, b_1, b_3]$ *ако и само ако* је $a_1 = a_2$, а то важи и сваку другу траспозицију само променимо индексе (одабрана је произвољна транспозиција). Пошто је у нашој неједнакости коју доказујемо b отишло на место где је првобитно било a, а c на место где је првобитно било b извршили смо све транспозиције елемената па онда мора бити $a = b$ као и $b = c$. Дакле једнакост важи акко је $a = b = c$.

б) Можемо применити неједнакост о преуређивању (Е12):

$$a^3 + b^3 + c^3 = [a, b, c] \cdot [a^2, b^2, c^2] \geq [a, b, c] \cdot [c^2, a^2, b^2] = a^2 b + b^2 c + c^2 a$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = [a, b, c] \cdot [a^2, b^2, c^2] \geq [a, b, c] \cdot [b^2, c^2, a^2] = a^2 c + b^2 a + c^2 b$$

Аналогно као у Е15. а) једнакост важи акко је $\mathrm{a} = \mathrm{b} = \mathrm{c}$.

17. Доказати да за било која три позитивна реална броја a, b, c важе следеће неједнакости:

$$[a, b, c] \cdot \left[\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right] \geq [a, b, c] \cdot \left[\frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{c+b}\right]$$
$$[a, b, c] \cdot \left[\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right] \geq [a, b, c] \cdot \left[\frac{1}{a+b}, \frac{1}{c+b}, \frac{1}{c+a}\right].$$

<u>*Решење*</u>:

Слично као у претходном задатку решење следи директно из неједнакости о преуређивању. Једнакост важи *акко* је $\mathrm{a} = \mathrm{b} = \mathrm{c}$.

Последица. Како је $[a, b, c] \cdot \left(\left[\frac{1}{a+b}, \frac{1}{c+b}, \frac{1}{c+a}\right] + \left[\frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{c+b}\right]\right) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} = \frac{a+c}{a+c} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{a+b}{a+b} = 3$, сабирајући прву и другу неједнакост из претходног задатка добијамо познату Несбитову неједнакост (задатак 7.),

$$2\left([a, b, c] \cdot \left[\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right]\right) \geq 3 \text{ за позитивне реалне бројеве } a, b, c.$$

На исти начин се добија и следећи резултат:

Нека је $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ и $a_k > 0, \forall k \in \{1, \ldots, n\}$. Тада је и

$$\left[a_1, a_2, \ldots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \ldots, \frac{1}{s-a_n}\right] \geq \left[a_1, a_2, \ldots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_2}, \frac{1}{s-a_3}, \ldots, \frac{1}{s-a_1}\right]$$
$$\left[a_1, a_2, \ldots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \ldots, \frac{1}{s-a_n}\right] \geq \left[a_1, a_2, \ldots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_3}, \frac{1}{s-a_4}, \ldots, \frac{1}{s-a_2}\right]$$
$$\vdots$$
$$\left[a_1, a_2, \ldots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \ldots, \frac{1}{s-a_n}\right] \geq \left[a_1, a_2, \ldots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_n}, \frac{1}{s-a_1}, \ldots, \frac{1}{s-a_{n-1}}\right]$$

18. Нека је $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ и $a_k > 0, \forall k \in \{1, \ldots, n\}$. Доказати следећу неједнакост:

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}$$

Решење:

Знамо да важи следеће:

$$\left[a_1, a_2, \dots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \dots, \frac{1}{s-a_n}\right] \geq \left[a_1, a_2, \dots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_2}, \frac{1}{s-a_3}, \dots, \frac{1}{s-a_1}\right]$$
$$\left[a_1, a_2, \dots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \dots, \frac{1}{s-a_n}\right] \geq \left[a_1, a_2, \dots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_3}, \frac{1}{s-a_4}, \dots, \frac{1}{s-a_2}\right]$$
$$\vdots$$
$$\left[a_1, a_2, \dots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \dots, \frac{1}{s-a_n}\right] \geq \left[a_1, a_2, \dots, a_n\right] \cdot \left[\frac{1}{s-a_n}, \frac{1}{s-a_1}, \dots, \frac{1}{s-a_{n-1}}\right]$$

Сабирајући ових $n-1$ неједнакости добијамо:

$$(n-1)\left(\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \dots + \frac{a_n}{s-a_n}\right) \geq \frac{a_1}{s-a_2} + \frac{a_2}{s-a_3} + \dots + \frac{a_n}{s-a_1} +$$
$$\frac{a_1}{s-a_3} + \frac{a_2}{s-a_4} + \dots + \frac{a_n}{s-a_2} +$$
$$\dots + \frac{a_1}{s-a_n} + \frac{a_2}{s-a_1} + \dots + \frac{a_n}{s-a_{n-1}} =$$
$$\frac{a_n + a_{n-1} + \dots + a_2}{s-a_1} + \frac{a_1 + a_n + \dots + a_3}{s-a_2} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1}{s-a_n} = n,$$

што доказује тврђење. Напоменимо да једнакост важи *акко* $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, и то се слично анализира као и у претходним задацима.

19. Нека су $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ реални бројеви, такви да је $\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 = 1$. Доказати да онда важи:

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{ab} + \mathrm{bc} + \mathrm{ac} \leq 1$$

Решење:

Десну страну неједнакости је лако доказати теоремом о преуређивању. Наиме из симетричности a,b,c можемо претпоставити да је $\mathrm{a} \leq \mathrm{b} \leq \mathrm{c}$. Тада је $\mathrm{ab} + \mathrm{bc} + \mathrm{ac} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}][\mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{a}] \leq [\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}][\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}] = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 = 1$, па је $\mathrm{ab} + \mathrm{bc} + \mathrm{ac} \leq 1$.

Леву страну доказујемо тако што покушавамо да је сведемо на $(\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c})^2$, јер ће се при његовом развоју јавити управо члан облика$(\mathrm{ab} + \mathrm{bc} + \mathrm{ac})$. Користимо следеће трансформације:

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{ab} + \mathrm{bc} + \mathrm{ac} \quad \Leftrightarrow$$
$$-1 \leq 2(\mathrm{ab} + \mathrm{bc} + \mathrm{ac}) \quad \Leftrightarrow$$
$$0 \leq 1 + 2(\mathrm{ab} + \mathrm{bc} + \mathrm{ac})$$

Даље, пошто је из услова задатка $1 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2$, добијамо:

$$0 \leq \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 + 2(\mathrm{ab} + \mathrm{bc} + \mathrm{ac})$$

$$0 \leq (\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c})^2$$

Трансформацијама смо добили еквивалентну неједнакост која је тривијално тачна, па је зато и полазна неједнакост тачна. Овиме је заокружен целокупан доказ.

20. Нека је су $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \ > 0$ реални бројеви. Доказати да тада важи следећа неједнакост

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

<u>Решење</u>:

Прво покушавамо да се ослободимо разломака из неједнакости. Сређивањем разломка на левој страни (дељењем сабирака бројиоца имениоцем) добијамо следећу еквивалентну неједнакост:

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Увођењем смене $a_1 = \frac{1}{a},\ b_1 = \frac{1}{b},\ c_1 = \frac{1}{c}$ добијамо еквивалентну неједнакост:

$$a_1 b_1 + \ b_1 c_1 + a_1 c_1 \leq {a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2$$

Због симетричности променљивих можемо претпоставити да је $a_1 \leq b_1 \leq c_1$.

Ова неједнакост је заправо само пример неједнакости о преуређивању, наиме важи следеће:

$$[a_1, b_1, c_1] \cdot [b_1, c_1, a_1] \ \leq \ [a_1, b_1, c_1] \cdot [a_1, b_1, c_1]$$

јер су на десној страни чланови поређани по растућем поретку у обе заграде, док у левој то не мора бити случај (не мора најмањи број бити упарен са најмањим итд). Такође из теореме о преуређивању закључујемо да једнакост важи ако и само ако је $a_1 = b_1 = c_1$, односно $a = b = c$.

21. Доказати да је $\frac{cos^3x}{sinx} + \frac{sin^3x}{cosx} \geq 1$, за $0 < x < {}^{\pi}\!/_{2}$, а затим наћи минимум функције на истом интервалу.

<u>*Решење*</u>:

Уочимо једну помоћну неједнакост. Нека су $a\ и\ b$ реални позитивни бројеви. Тада важи

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq a^2 + b^2. \tag{21}$$

Заиста, ако претпоставимо нпр. поредак $a \geq b$, онда имамо $a^3 \geq b^3$, као и $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$, те је неједнакост директна последица неједнакости о преуређивању, лева страна је $[a^3, b^3] \cdot \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$, док је десна $[a^3, b^3] \cdot \left[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right]$.

Из последње неједнакости сада знамо да је

$$\frac{cos^3x}{sinx} + \frac{sin^3x}{cosx} \geq cos^2x + sin^2x = 1.$$

Нађимо и минимум задате функције. У претходном извођењу једнакости важе ако и само ако је $a = b$. Дакле, једнакост важи ако и само ако је $cosx = sinx$, што је испуњено за $x = {}^{\pi}\!/_{4}$ када се за домен од x узме $(\ 0, {}^{\pi}\!/_{2})$. Минимална вредност је стога једнака 1.

22. Доказати неједнакост $a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ca+c^2ab$, за све реалне бројеве a,b,c.

Решење:

Ова неједнакост доста подсећа на неједнакост о преуређивању, па ћемо покушати управо њу да искористимо. Проблем би могао да буде то што a, b и c не морају да буду позитивни. Овде ћемо се послужити следећим триком: уместо a, b, c, посматраћемо њихове квадрате (који су увек позитивни).

Најпре ћемо искористити неједнакост о преуређивању за векторе (a^2,b^2,c^2) и (a^2,b^2,c^2) (дакле за два иста вектора), добијамо

$$a^4+b^4+c^4 = a^2a^2+b^2b^2+c^2c^2 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(a^2(b^2+c^2)+b^2(c^2+a^2)+c^2(a^2+b^2)\right) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}(a^2\cdot 2bc+b^2\cdot 2ca+c^2\cdot 2ab) = a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

где последња неједнакост следи из (троструке примене) АГ неједнакости.

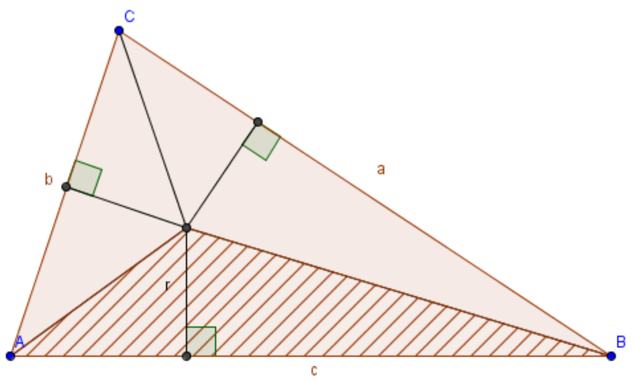
4. Геометријске неједнакости

Међу задацима из неједнакости неретко се појављују и такозване *геометријске неједнакости*, то јест неједнакости које садрже неке геометријске величине, обично параметре троугла (странице, површину, полупречник уписаног/описаног круга и др). Наведимо неколико примера.

23. Нека су R и r редом полупречници описаног и уписаног круга неког троугла. Доказати да тада важи $R \geq 2r$.

Решење:

Искористићемо површину троугла. Постоје разни начини да се она израчуна, један од њих је и следећи. Уочимо троугао ABC.



S је центар уписаног круга троугла. Како је $P(ABC)=P(ABS)+P(CBS)+P(ACS)$ и полупречник уписаног круга r је управан на странцама троугла a,b,c из S важи да је

$$P=\frac{cr}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}=\frac{r(a+b+c)}{2}=rs, \qquad s=\frac{a+b+c}{2}$$

$$P=rs$$

Затим, из синусне теореме $\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}=2R$, где су α,β,γ углови који одговарају редом страницама a,b,c, а R полупречник описаног круга, имамо

$$a=2R\sin\alpha$$

$$abc=2Rbc\sin\alpha=4R\frac{1}{2}bc\sin\alpha=4RP$$

$$R=\frac{abc}{4P}$$

$$R=\frac{sabc}{4P^2}=\frac{sabc}{4s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{4\left(\frac{(b+c-a)}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$
$$=\frac{2abc}{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}\geq\frac{2abc}{abc}=2$$

Дакле, $R\geq 2r$. Када важи једнакост?

$$a+b-c=a+c-b=b+c-a,$$

из чега следи $a=b=c$. Дакле, једнакост важи акко је троугао једнакостраничан.

24. (ИМО 1961) Нека су a, b и c странице троугла и P његова површина. Доказати да важи $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}P$

1. Решење (преко Херонове формуле):

$$16P^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

На бројеве $-a+b+c$, $a-b+c$ и $a+b-c$ који су позитивни (обзиром да су a, b и c странице троугла) можемо да применимо А-Г неједнакост

$$\sqrt[3]{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\leq\frac{1}{3}\big((-a+b+c)+(a-b+c)+(a+b-c)\big)=$$
$$=\tfrac{1}{3}(a+b+c).$$

Одавде следи

$$16P^2\leq(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

$$4P\leq\frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\leq\sqrt{3}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

(последња неједнакост је примена А-К неједнакости). Одатле следи тражена неједнакост $4\sqrt{3}P\leq a^2+b^2+c^2$.

2. решење (преко косинусне теореме):

Претпоставимо супротно $a^2 + b^2 + c^2 < 4\sqrt{3}P$. Знамо да је $P = \frac{bc\sin\alpha}{2}$. Следи $2bc\sin\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2)$. С друге стране косинусна теорема нам даје

$$2bc\cos\alpha = -a^2 + b^2 + c^2.$$

$$4b^2c^2 = (2bc\sin\alpha)^2 + (2bc\cos\alpha)^2 > \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2 + (-a^2 + b^2 + c^2)^2$$
$$= \frac{1}{3}(4a^4 + 4b^4 + 4c^4 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2 + 8b^2c^2)$$

Аналогно добијамо $4c^2a^2 > \frac{1}{3}(4b^2 + 4c^2 + 4a^2 - 4bc - 4ba + 8ca)$ и

$4a^2b^2 > \frac{1}{3}(4c^2 + 4a^2 + 4b^2 - 4ca - 4cb + 8ab)$. Сумирајмо ове три неједнакости (и поделимо са 4):

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > a^2 + b^2 + c^2$$
$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 < 0$$

Контрадикција, дакле важи тражена формула.

3. решење (преко косинусне теореме):

$$2bc\cos\alpha = -a^2 + b^2 + c^2$$
$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}P = 2(b^2 + c^2) - 2bc\cos\alpha - 2\sqrt{3}bc\sin\alpha =$$
$$= 2\left[b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)\right] = 2\left[b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right] \geq$$
$$\geq 2[b^2 + c^2 - 2bc] = 2[b - c]^2 \geq 0.$$

Наведимо за крај ове секције још један пример примене неједнакости Коши-Шварца који се може повезати са геометријом.

25. (Карлсонова неједнакост)

Доказати да за све реалне бројеве $a_1, a_2, \dots, a_n$ који нису сви једнаки нули важи

$$(a_1 + \dots + a_n)^4 < \pi^2(a_1^2 + \dots + a_n^2)(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \dots + n^2a_n^2).$$

Решење:

Кренимо од неједнакости Коши-Шварца:

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 = \left(a_1c_1\left(\frac{1}{c_1}\right) + \dots + a_nc_n\left(\frac{1}{c_n}\right)\right)^2 \leq (a_1^2c_1^2 + \dots + a_n^2c_n^2)\left(\frac{1}{c_1^2} + \dots + \frac{1}{c_n^2}\right)$$

Означимо $C_n = \frac{1}{c_1^2} + \dots + \frac{1}{c_n^2}$, па

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq C_n(a_1^2c_1^2 + \dots + a_n^2c_n^2)$$

За $c_n = n$

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \le C_n(a_1^2 + 2^2 a_n^2 + \cdots + n^2 a_n^2)$$

Са $C_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6}, C_n \to \frac{\pi^2}{6}, n \to \infty$, добијамо

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 < \frac{\pi^2}{6}(a_1^2 + 2^2 a_n^2 + \cdots + n^2 a_n^2)$$

Ово је Карлсонова неједнакост (1934) и она не важи ни за коју константу мању од $\frac{\pi^2}{6}$.

Са $C_n = t + \frac{n^2}{t}$, добијамо

$$a_1^2 c_1^2 + \cdots + a_n^2 c_n^2 = a_1^2\left(t + \frac{1}{t}\right) + \cdots + a_n^2\left(t + \frac{n^2}{t}\right)$$

$$= t(a_1^2 + \cdots + a_n^2) + \frac{1}{t}(a_1^2 + 2^2 a_n^2 + \cdots + n^2 a_n^2)$$

$$P = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \; Q = a_1^2 + 2^2 a_n^2 + \cdots + n^2 a_n^2$$

$$a_1^2 c_1^2 + \cdots + a_n^2 c_n^2 = tP + \frac{1}{t}Q,$$

где

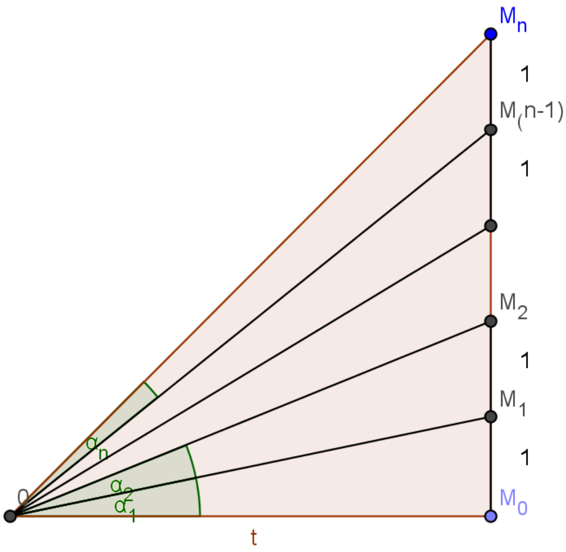
$$C_n = \frac{1}{t + \frac{1}{t}} + \frac{1}{t + \frac{2^2}{t}} + \cdots + \frac{1}{t + \frac{n^2}{t}} = \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{t}{t^2 + 2^2} + \cdots + \frac{t}{t^2 + n^2}.$$

Уочимо сада један правоугли троугао OM_0M_n са правим углом код темена M_0, $|OM_0| = t$, $|M_0M_n| = n$. Ако поделимо дуж M_0M_n на n једнаких делова, добијамо низ тачака $M_0, M_1, \ldots, M_n$ за који важи $|M_iM_{i+1}| = 1$. Означимо углове $\angle(OM_0, OM_1), \angle(OM_1, OM_2), \ldots, \angle(OM_{n-1}, OM_n)$ редом са $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. (Слика)

$$\frac{t}{2} = \frac{1}{2}|OM_{n-1}||OM_n|\sin(\alpha_n) = \frac{1}{2}\sqrt{(t^2 + (n-1)^2)}\sqrt{t^2 + n^2}\sin(\alpha_n)$$

$$\sin(\alpha_n) = \frac{t}{\sqrt{(t^2 + (n-1)^2)}\sqrt{t^2 + n^2}} > \frac{t}{t^2 + n^2}$$

$$\frac{t}{t^2 + n^2} < \sin(\alpha_n) < \alpha_n$$



$$C_n = \frac{t}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+2^2} + \cdots + \frac{t}{t^2+n^2} < \alpha_1 + \cdots + \alpha_n < \frac{\pi}{2}$$

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 < \frac{\pi}{2}(tP + \frac{Q}{t})$$

Поставимо $t = \sqrt{\frac{Q}{P}}$, добијамо $tP + \frac{Q}{t} = 2\sqrt{PQ}$. Тако

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 < \pi\sqrt{\mathrm{PQ}}$$

$$(a_1 + \cdots + a_n)^4 < \pi^2(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \cdots + n^2a_n^2)$$

Ово је друга од неколико Карлсонових неједнакости.

5. Јенсенова неједнакост *[1]

Да бисмо формулисали и доказали Јенсенову неједнакост биће нам потребан краћи теоријски увод који се тиче конвексних функција.

Верујемо да је читаоц већ упознат са следећим појмом.

Дефиниција. За скуп K кажемо да је конвексан ако за сваке две тачке A и B које припадају скупу K важи да тада и цела дуж припада скупу K.

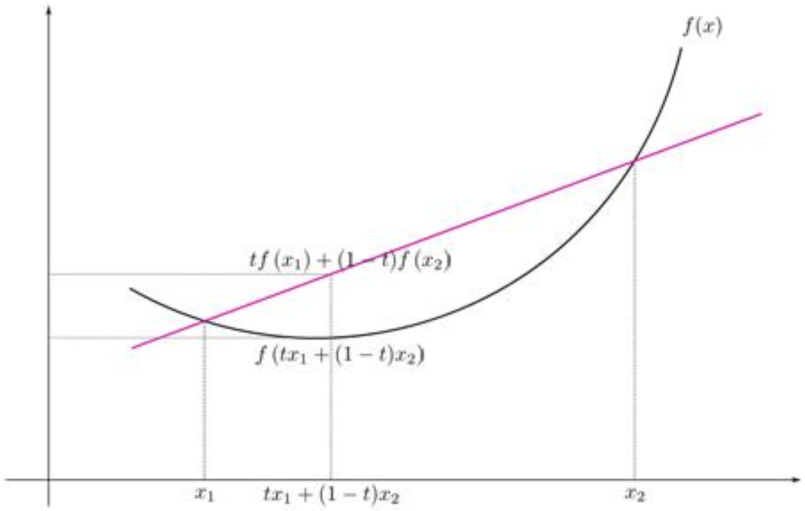
Нека је (a, b) интервал реалне праве и нека је $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ функција на том интервалу. Назовимо њеним надграфиком скуп

[1] Ово поглавље захтева познавање извода, тако да га препоручујемо само ученицима који су овај појам већ савладали.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in (a, b), y \geq f(x)\}.$$

Дефиниција. За функцију f кажемо да је **конвексна** на интервалу (a, b) ако је њен надграфик на том интервалу конвексан скуп.

Дефиниција нам каже да ако узмемо било које две тачке из надграфика функције, да ће тада и цела дуж која спаја те две тачке припадати надграфику. Специјално, ако узмемо две тачке са графика функције f, нпр. $f(x_1)$ и $f(x_2)$, за неке $x_1, x_2 \in (a, b)$, дуж која их спаја назива се сечицом графика функције f,а из дефиниције видимо, да уколико је функција конвексна да ће њен график увек бити ,,испод" сваке своје сечице (слика).



Када смо читаоцу интуитивно приближили појам конвексности функције, можемо да задамо оперативнију дефиницију овог појма, коју ћемо надаље користити. Наиме, нека су дате произвољне две тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ у равни, тада знамо да ће нека тачка $M(x, y)$ припадати дужи M_1M_2 ако за неко $t \in [0, 1]$ важи

$$x = tx_1 + (1-t)x_2 \qquad \text{и} \qquad y = ty_1 + (1-t)y_2.$$

Ово нас мотивише да уведемо,

Дефиниција. За функцију $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ кажемо да је **конвексна** на интервалу (a, b) ако за сваке две тачке $x_1, x_2 \in (a, b)$ и свака два ненегативна броја λ_1 и λ_2 таква да је $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ важи

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

За функцију f кажемо да је **конкавна** уколико важи

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Ако у претходним неједнакостима (при услову $x_1 \neq x_2$) једнакост важи само у случају када је $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$, за функцију f кажемо да је **строго конвексна** (односно **строго конкавна**).

Пример 1: Функција $f(x) = x^2$ је строго конвексна на $\mathbb{R}$, што следи из

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= {\lambda_1}^2 {x_1}^2 + 2\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2 + {\lambda_2}^2 {x_2}^2 = \lambda_1(1-\lambda_2){x_1}^2 + 2\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_2(1-\lambda_1){x_2}^2 \\ &= \lambda_1 {x_1}^2 + \lambda_2 {x_2}^2 - \lambda_1\lambda_2(x_1 - x_2)^2 < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \end{aligned}$$

за $\lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1,\ \lambda_2 > 0,\ x_1 \neq x_2$.

Према самој дефиницији конвексности јасно је да је тај појам уско везан са одређеним типом неједнакости. Уствари, чим за неку функцију докажемо да је конвексна (конкавна), аутоматски добијамо да важи одређена дефинициона неједнакост, тј. имамо неједнакост типа

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad (*)$$

за $\lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_1,\ \lambda_2 > 0$. Показаћемо и више, тј. да неједнакост (*) важи и за комбинације више сабирака.

Теорема (Јенсенова неједнакост). Нека је $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ конвексна функција и нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ненегативни бројеви , такви да је $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Тада за све $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$ важи неједнакост

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Уколико је функција строго конвексна, тада једнакост важи ако и само ако су сви x_i , једнаки међу собом, или су сви λ_i , сем једног једнаки нули. Одговарајућа тврђења важе и та конкавне функције.

Доказ:

Тврђење ћемо доказати математичком индукцијом. За $n = 2$ ово се своди на дефинициону неједнакост конвексне функције и важи по претпоставци. Претпоставимо сада да тврђење важи за произвољних $n - 1$ коефицијената λ_i чији је збир 1. Нека су дати произвољни елементи $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a,b)$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ за које је $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Означимо $\mu = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i$. Тада су $\frac{\lambda_2}{\mu}, \dots, \frac{\lambda_n}{\mu}$ позитивни бројеви (њих $n - 1$) чији је збир једнак 1, па важи

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f\left(\lambda_1 x_1 + \mu \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i\right) \leq \lambda_1 f(x_1) + \mu f\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i\right) \leq \lambda_1 f(x_1) + \mu \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} f(x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

при чему прва неједнакост следи на основу дефиниционе неједнакости конвексности, а друга по индуктивној претпоставци. Једнакост важи (у случају строге конвекстности) ако и само ако су сви x_i једнаки међу собом, или су сви λ_i , сем једног једнаки нули.

Јенсенова неједнакост је основа за доказивање многих других. Навешћемо одмах једну од најпознатијих неједнакости која директно следи из Јенсенове.

Последица (Тежинска неједнакост између аритметичке и геометријске средине). Ако су x_i позитивни, а λ_i ненегативни реални бројеви, $i = 1, \dots, n$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ тада важи

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Једнакост важи ако и само ако су сви x_i једнаки међу собом, или су сви λ_i , сем једног једнаки нули. Специјално, ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, добијамо класичну неједнакост између аритметичке и геометријске средине, коју смо већ доказивали.

Доказ:

Примењујући Јенсенову неједнакост на строго конвексну функцију $f(x) = e^x$ и бројеве $\ln x_1$, $\ln x_2$, … , $\ln x_n$, добијамо

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln x_i} \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

У доказу претходне последице видели смо једну директну примену Јенсенове неједнакости, а сада ћемо кроз пар задатака да покушамо да још више овладамо применом ове неједнакости у конкретним примерима. Напоменимо још да ћемо често у задацима при испитивању конвексности (односно конкавности) користити следеће познато тврђење

Став. Нека је дата функција $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ класе $C^2(a, b)$. Да би f била конвексна (конкавна) на (a, b) неопходно је и довољно да буде $f''(x) \ge 0$ $(f''(x) \le 0)$, за свако $x \in (a, b)$. Уколико је $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ тада је f строго конвексна (строго конкавна) на (a, b).

26. За позитивне бројеве $x_1, x_2, \dots, x_n$ доказати неједнакост

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \le \frac{x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 + \dots + x_n \ln x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}.$$

Решење:

Множењем обе стране изразом $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ (који је позитиван) добијамо

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \le x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 + \dots + x_n \ln x_n,$$

а затим множењем обе стране са $\frac{1}{n}$ добијамо

$$\frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} \ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \le \frac{x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 + \dots + x_n \ln x_n}{n}, \qquad (1)$$

одакле интуитивно закључујемо да треба да посматрамо функцију $f(x) = x \ln x$ на итервалу $(0, +\infty)$, јер су сви x_i позитивни. Рачунањем другог извода ове функције добијамо $f''(x) = \frac{1}{x}$, па је $f''(x) > 0$ на $(0, +\infty)$, па је функција $f(x) = x \ln x$ конвексна на овом интервалу. Применом Јенсенове неједнакости на f, бројеве $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ добијамо неједнакост (1), која је еквивалентна полазној, чиме смо решили задатак.

27. ***а)*** Испитати конвексност функције $f(x) = x^2 e^{-x}$.

б) Доказати да за $a, b \in \left[2 - \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2}\right]$ важи неједнакост

$$a^2 e^{\frac{b-a}{2}} + b^2 e^{\frac{a-b}{2}} \le \frac{1}{2}(a + b)^2.$$

Решење:

а) За испитивање конвексности функције користићемо наведени став. Рачунањем извода дате функције, добијамо $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$, $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, па како је увек $e^{-x} > 0$, док је $x^2 - 4x + 2 \geq 0$ на $(-\infty, 2 - \sqrt{2}\,) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$, а $x^2 - 4x + 2 \leq 0$ на интервалу $\left[2 - \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2}\right]$, видимо да је f конвексна на интервалу $(-\infty, 2 - \sqrt{2}\,) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$,а конкавна на $\left[2 - \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2}\right]$.

б) Како нам је већ задата функција $f(x) = x^2 e^{-x}$ и како нас израз на левој страни неједнакости, коју треба да покажемо, подсећа на ову функцију, логично је да посматрамо баш њу. У делу под *а)* смо доказали да је f конкавна на $\left[2 - \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2}\right]$, па применом Јенсенове неједнакости на f (конкавни случај), бројеве a и b и коефицијенте $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ добијамо

$$\frac{a^2}{2} e^{-a} + \frac{b^2}{2} e^{-b} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 e^{-\frac{a+b}{2}}.$$

Множењем обе неједнакости са $2e^{-\frac{a+b}{2}}$ (експоненцијална функција је увек позитивна, па се не мења знак неједнакости) добијамо

$$a^2 e^{\frac{b-a}{2}} + b^2 e^{\frac{a-b}{2}} \leq \frac{1}{2}(a+b)^2,$$

што је баш неједнакост коју смо требали да докажемо.

28. Доказати неједнакост

$$\sqrt[44]{tg\ 1^\circ \cdot tg\ 2^\circ \cdot \ldots \cdot tg\ 44^\circ} < tg\ 22^\circ 30' < \frac{1}{44}\left(tg\ 1^\circ + tg\ 2^\circ + \cdots + tg\ 44^\circ\right).$$

Решење:

Прво ћемо доказати десну неједнакост. У овом случају је јасно да треба посматрати функцију $f(x) = tg\ x$ и приметимо да све вредности које нам фигуришу, у горњим изразима, припадају интервалу $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$. Рачуном добијамо да је $f''(x) = \frac{2\sin x}{cos^3 x} > 0$ на интервалу $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$, па је f конвексна на овом интервалу. Применом Јенсенове неједнакости на функцију f, вредности $1^\circ, 2^\circ, \ldots, 44^\circ$ и коефицијенте $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{44} = \frac{1}{44}$ добијамо

$$tg\left(\frac{1^\circ + 2^\circ + \cdots + 44^\circ}{44}\right) < \frac{1}{44}\left(tg\ 1^\circ + tg\ 2^\circ + \cdots + tg\ 44^\circ\right),$$

тј. добијамо

$$tg\ 22^\circ 30' < \frac{1}{44}\left(tg\ 1^\circ + tg\ 2^\circ + \cdots + tg\ 44^\circ\right),$$

а важи строга неједнакост зато што је функција строго конвексна, а нпр. $1^\circ \neq 2^\circ$. Овиме смо показали десну неједнакост.

За доказ леве неједнакости ћемо морати да уочимо један трик које се често користи. Наиме, применићемо природни логаритам на обе стране, а знак неједнакости ће се очувати, јер је логаритам строго растућа функција. Тада нам је неједнакост коју треба да докажемо еквивалентна са

$$\frac{1}{44}\left(\ln tg\ 1^\circ + \ln tg\ 2^\circ + \cdots + \ln tg\ 44^\circ\right) < \ln tg\ 22^\circ 30'. \qquad (2)$$

Уочимо да смо овиме успели да добијемо збир на левој страни, уместо производа са почетка, и ово је чест трик када хоћемо ово да постигнемо при доказивању разних неједнакости. Природно нам се намеће да у овој ситуацији посматрамо функцију $g(x) = \ln tg\ x$. За њу важи да је конкавна на $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$, јер је $g''(x) = -\frac{\cos 2x}{sin^2 2x} < 0$ на $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$. Па сада применом Јенсенове неједнакости на функцију g, вредности $1^\circ, 2^\circ, \ldots\ , 44^\circ$ и коефицијенте $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{44} = \frac{1}{44}$ добијамо

$$\frac{1}{44}\left(\ln tg\ 1^\circ + \ln tg\ 2^\circ + \cdots + \ln tg\ 44^\circ\right) < \ln tg\ \left(\frac{1^\circ + 2^\circ + \cdots + 44^\circ}{44}\right),$$

што је еквивалентно неједнакости (2), а самим тим и левој неједнакости полазне. Дакле, важиће и

$$\sqrt[44]{tg\ 1^\circ \cdot tg\ 2^\circ \cdot \ldots \cdot tg\ 44^\circ} < tg\ 22^\circ 30'.$$

Једнакост неће важити из истих разлога као у првом случају. Овиме смо комплетирали решење задатка.

6. Некласичне неједнакости

За крај овог штива наведимо и некласичне примере неједнакости. То су изрази који не потпадају у неформалну дефиницију неједнакости наведену на првој страни, али су ипак неједнакости, зато што их доказујемо. У овом ширем смислу неједнакост је и израз $2 < 3$, и то тачна. Док је нпр. израз $2 > 3$ неједнакост која није тачна. Овде нећемо користити неку претерану теорију, већ само познавање особина целих бројева.

29. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Решење:

Кључна ствар у овом задатку је очигледна неједнакост $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$. За $n = 1, 2, 3, \ldots$ добијамо да је

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{2}{3} < \frac{3}{4}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \ldots\ , \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

Нека је $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100}$. Због претходних неједнакости важиће $A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{101}$ и $A > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99}$.

Видимо да у обе неједнакости десне стране доста ,,личе" на $\frac{1}{A}$. Зато ћемо их помножити са A, следи:

$$\frac{1}{200} < A^2 < \frac{1}{101}$$

Сада хоћемо да коренујемо ово, било би згодно да имамо квадрате, зато ћемо мало поправити претходну процену:$\frac{1}{225} < \frac{1}{200} < A^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$. Одакле следи $\frac{1}{15} < A < \frac{1}{10}$.

30. Доказати следећу неједнакост:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}\,, \qquad n > 1.$$

<u>Решење</u>.

Неједнакост са леве стране је очигледна. Наиме, видимо да важи:

$$\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+n)}$$
$$> \frac{1}{(n+n)} + \frac{1}{(n+n)} + \cdots + \frac{1}{(n+n)} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Десну неједнакост ћемо доказати на следећи начин:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2n^2} + \frac{3n}{2n^2 + (n-1)} + \cdots + \frac{3n}{2n^2}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2n^2} + \cdots + \frac{3n}{2n^2}\right) < \frac{3}{4} + \frac{1}{n}$$

Одузимајући $\frac{1}{n}$ са леве и десне стране последње неједнакости добијамо и доказујемо тражену неједнакост.

При раду са целим бројевима често се користи метод индукције, па је овде приказана примена овог метода специјално за доказивање неједнакости.

31. Индукцијом доказати следећу неједнакост:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \qquad n \geq 1$$

<u>Решење</u>.

Неједнакост важи за <u>$n = 1$</u>. Претпоставимо да неједнакост важи за <u>свако n</u>.

Ако докажемо да важи $\frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}}$, неједнакост ће важити и за $n+1$.

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}} \Leftrightarrow \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 \leq \frac{3n+1}{3n+4} \Leftrightarrow (4n^2 + 4n + 1)(3n + 4)$$

$$\leq (4n^2 + 8n + 4)(3n + 1) \Leftrightarrow 12n^3 + 28n^2 + 19n + 4$$

$\leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4 \Leftrightarrow$

$0 \leq n$, што важи јер је n природан број.

Применом индуктивне хипотезе добијамо да неједнакост важи и за $n + 1$. Дакле, неједнакост важи за свако n.

32. Нека је $\mathrm{Q_n} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{n}^2}$. Тада је, за $\mathrm{n} \geq 3$:

$$\frac{19}{12} - \frac{1}{\mathrm{n}+1} < \mathrm{Q_n} < \frac{7}{4} - \frac{1}{\mathrm{n}}$$

Решење:

Доказиваћемо леву и десну страну неједнакости одвојено, индукцијом по броју n. Прво ћемо доказати леву страну неједнакости:

База индукције(n=3):

$$\mathrm{Q_3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$$

$$\frac{19}{12} - \frac{1}{3+1} = \frac{16}{12} = \frac{48}{36} < \frac{49}{36} = \mathrm{Q_3}$$

Индуктивни корак ($\mathrm{n} \to \mathrm{n} + 1$):

Из индуктивне претпоставке знамо да важи $\frac{19}{12} - \frac{1}{\mathrm{n}+1} < \mathrm{Q_n}$. Ако додамо обема странама неједнакости члан $\frac{1}{(\mathrm{n}+1)^2}$ добијамо еквивалентну неједнакост $\frac{19}{12} - \frac{1}{\mathrm{n}+1} + \frac{1}{(\mathrm{n}+1)^2} < \mathrm{Q_n} + \frac{1}{(\mathrm{n}+1)^2} = \mathrm{Q_{n+1}}$. Даљим сређивањем се добија:

$$\frac{19}{12} - \frac{\mathrm{n}+1}{(\mathrm{n}+1)^2} + \frac{1}{(\mathrm{n}+1)^2} < \mathrm{Q_{n+1}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{19}{12} - \frac{\mathrm{n}+1-1}{(\mathrm{n}+1)^2} < \mathrm{Q_{n+1}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{19}{12} - \frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1)^2} < \mathrm{Q_{n+1}}$$

Да би доказали неједнакост до краја погодно би било доказати неједнакост $-\frac{1}{\mathrm{n}+2} < -\frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1)^2}$, јер би додавањем ове неједнакости на претходну изгубили члан $-\frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1)^2}$ и убацили члан $-\frac{1}{\mathrm{n}+2}$, те добили тражени облик. Ова неједнакост се једноставно своди на$(\mathrm{n}+1)^2 > n(n+2)$, тј скраћивањем на $1 > 0$, што је тривијално тачно. Додавањем ове неједнакости на неједнакост $\frac{19}{12} - \frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1)^2} < \mathrm{Q_{n+1}}$ добија се

$\frac{19}{12} - \frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1)^2} - \frac{1}{\mathrm{n}+2} < \mathrm{Q_{n+1}} - \frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1)^2}$, тј скраћивањем $\frac{19}{12} - \frac{1}{\mathrm{n}+2} < \mathrm{Q_{n+1}}$, што је и требало доказати.

Десну страну докаујемо на исти начин.

База индукције(n=3):

$$Q_3 = \frac{49}{36}$$

$$\frac{7}{4} - \frac{1}{3} = \frac{17}{12} = \frac{51}{36} > \frac{49}{36} = Q_3$$

Индуктивни корак $(n \to n+1)$: Индуктивна хипотеза је да је$Q_n < \frac{7}{4} - \frac{1}{n}$. Прво додајемо на обе стране $\frac{1}{(n+1)^2}$ да би добили Q_{n+1}. Тиме добијамо неједнакост $Q_{n+1} < \frac{7}{4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$. Да би добили облик неједнакости који тражимо неопходно је да скратимо са десне стране чланове $-\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{(n+1)^2}$, као и да додамо у неједнакост члан $-\frac{1}{n+1}$. То би постигли управо додавањем неједнакости $0 < \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1}$. Остало је још да докажемо ову неједнакост. Прерасподелом чланова добијамо: $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, и даљим решавањем:

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\frac{n}{n} \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow$$
$$n < n+1 \quad \Leftrightarrow$$
$$0 < 1\,,$$

што је очигледно тачно. Према томе, неједнакост тражена у задатку је доказана.

7. Закључак и литература

У изложеном тексту су приказане основне неједнакости заједно са разноврсним применама. Надамо се да смо у претходних тридесетак страна успели да уверимо читаоца у лепоту и разноврсност техника које се користе при доказивању неједнакости. Литература коришћена за овај текст је 7. глава књиге “Problem solving strategies” од А. Енгела. Знатижељни читалац који жели да продуби своје знање из ове области математике упућује се на првом месту на књигу “Неједнакости” у издању Друштва математичара Србије, као и на многе друге стране књиге из ове области.

Списак аутора:

Филип Живановић (228/2011)

Димитрије Шпадијер (21/2011)

Владимир Јаковљевић (24/2011)

Драган Ђокић (19/2011)

Немања Радета (19/2008)

Стефан Лапчевић (112/2010)

Милица Милојевић (250/2011)

Стефан Даничић (56/2011)

Невена Милановић (119/2011)

Алекса Станковић (73/2011)

Душан Јоксимовић (76/2011)

Миодраг Антонијевић (22/2009)

Никола Капетановић (35/2011)

Сања Радојчић (100/2011)

Небојша Миљков (65/2009)

Београд, 16.12.2014.