

# **Аксиоме припадања**

Никола Томовић 152/2011

Павле Васић 104/2011

Шта је тачка? Шта је права? Шта је раван?

Да бисмо се бавили геометријом (и не само геометријом), морамо увести основне појмове и полазна тврђења – аксиоме.

Основу чини непразан скуп  $S$  чије елементе зовемо тачкама и означавамо их великим латиничним словима ( $A, B, C \dots$ ).

Одређене подскупове скупа  $S$  зваћемо правим и означаваћемо их малим латиничним словима ( $a, b, c \dots$ ).

Одређене подскупове скупа  $S$  зваћемо равнима и означаваћемо их словима грчког алфабета ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ).

Шта значи да тачка лежи у равни? Шта значи да права лежи у равни?

Само увођење основних појмова није довољно за схватање геометрије. Ми замишљамо тачке, праве и равни у извесним међусобним односима и означавамо односима јер су нам у основној школи наставници дали представе о томе, али не кроз строг аксиоматски приказ. Аксиомама постижемо тачан и за математичке сврхе потпун опис ових односа основних објеката.

Шта су аксиоме?

Аксиоме су прости основни ставови помоћу којих објашњавамо законитости које важе међу основним појмовима. То нису дефиниције, већ полазне истине од којих се полази у заснивању теорије.

Зашто уводимо дефиницију, а не аксиоме?

Зато што су ово изведени појмови којима се само именују ситуације које важе. Дефиниције спадају у неку врсту неизбежне терминологије која поједностављује излагање садржаја.

Шта су то неколинеарне тачке?

Дефиниција. За тачке се каже да су колинеарне ако постоји права која их садржи. Иначе су оне неколинеарне.

У овој дефиницији само именујемо тачке за које постоји права која их садржи. Дајемо им име – „тачке су колинеарне“.

Уместо реченице „Тачке  $A, B, C$  су неколинеарне“, можемо да пишемо „Тачке  $A, B, C$  за које не постоји права која их садржи“. Свакако је лакше писати први облик, иако је разумљивији други начин. Други део реченице у дефиницији значи да ако не постоји права која садржи тачке, за њих кажемо да су неколинеарне.

Дефиниција. За тачке се каже да су компланарне ако постоји раван која их садржи. Иначе су оне некомпланарне.

Дефиниција. За праве се каже да се секу ако имају заједничку тачку једну тачку.

Дефиниција. За праву и раван кажемо да се секу ако имају заједничку тачку једну тачку.

Дефиниција. За разне равни кажемо да се секу ако имају заједничку тачку.

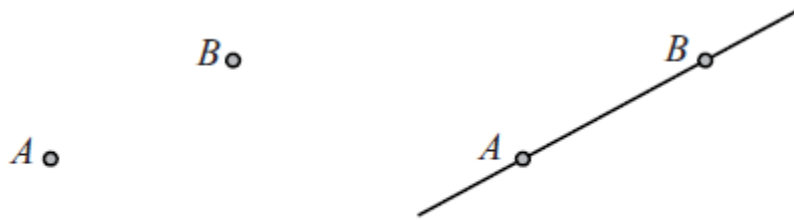
Дефиниција. За праве  $a$  и  $b$  се каже да су мимоилазне ако не постоји раван којој припадају обе те праве.

**АКСИОМА ПАРАЛЕЛНОСТИ.** За сваку праву  $a$  и сваку тачку  $A$  (ван те праве) постоји тачно једна права која садржи тачку  $A$  и паралелна је правој  $a$ .

### **Аксиоме припадања**

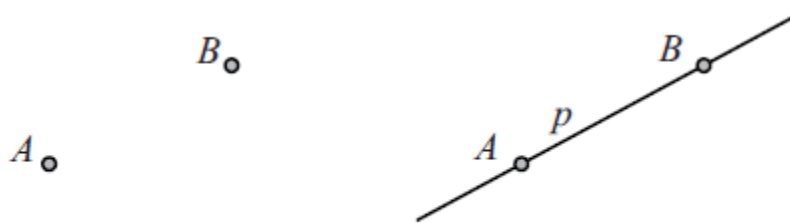
Аксиоме ове групе описују основне скуповне односе између тачака, правих и равни. За предавача је битно какав је скуп аксиома одабрао. Хилбертов скуп аксиома је најприкладнији. У уџбеницима које користе наши ученици постоје различити „скраћени“ системи аксиома са циљем олакшања материје. Свакако је лакше закључивати са шест правила него са девет, али се треба придржавати принципа научности па излагати материју онакву каква јесте.

1. За сваке две тачке постоји најмање једна права која их садржи.



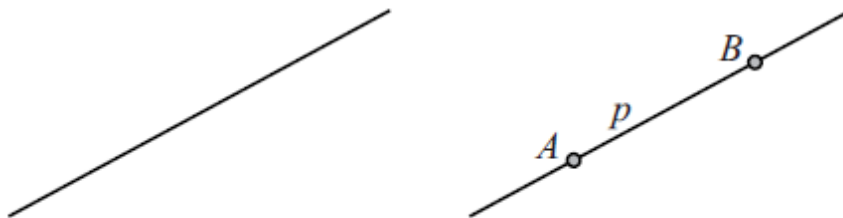
Сл. 1

2. За сваке две разне тачке постоји највише једна права која их садржи.



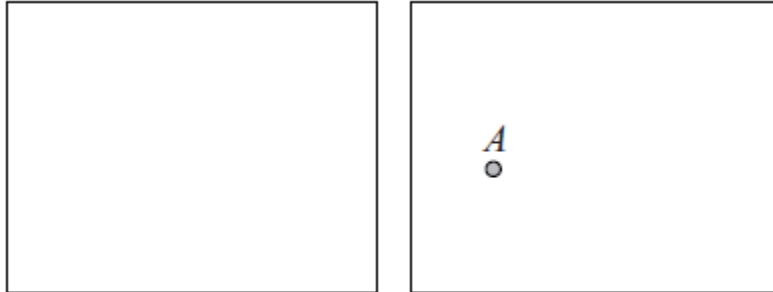
Сл. 2

3. Свака права садржи бар две различите тачке.



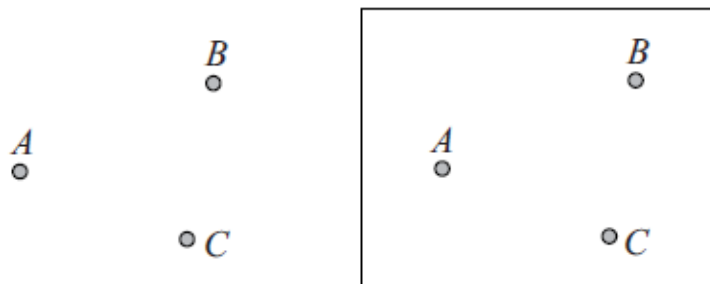
Сл. 3

4. Свака равна садржи бар једну тачку.



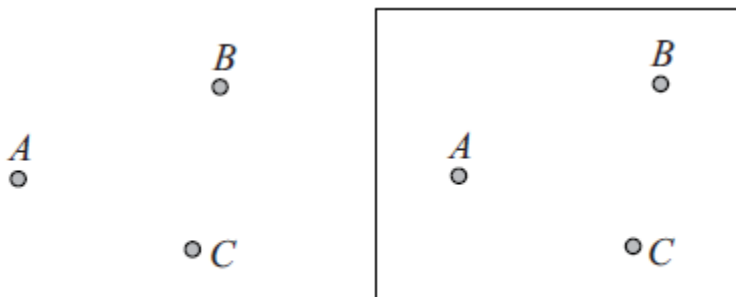
Сл. 4

5. Постоји бар једна равна која садржи три тачке.



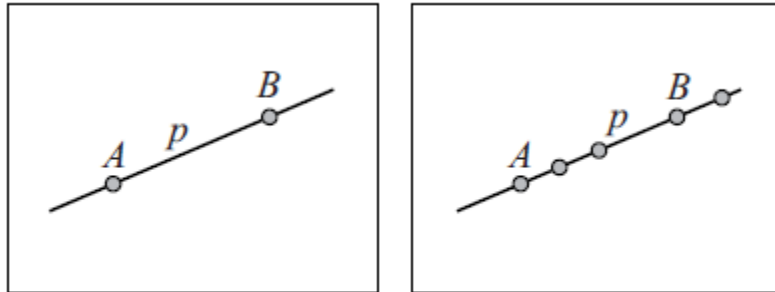
Сл. 5

6. Постоји највише једна равна која садржи дате три неколинеарне тачке.



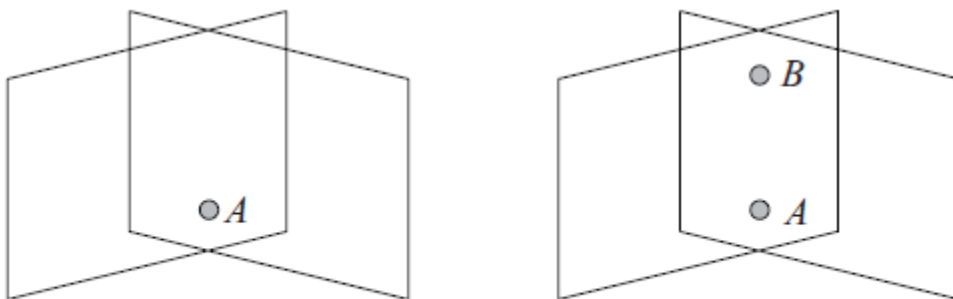
Сл. 6

7. Ако две разне тачке неке праве припадају некој равни, тада и све тачке те праве припадају тој равни.



Сл. 7

8. Ако две равни имају заједничку тачку, тада оне имају заједничку бар још једну тачку.



Сл. 8

9. Постоје четири некомпланарне тачке.

## Задаци

1. Доказати да права  $a$  и тачка  $A$  ван ње одређују једну раван.

Решење: На основу аксиоме 3 постојаће тачке  $B$  и  $C$  на правој  $a$ . Како су  $A$ ,  $B$  и  $C$  три неколинеарне тачке на основу аксиома 6,7 следи да ће постојати јединствена раван  $\alpha$  одређена овим тачкама тј. одређена тачком  $A$  и правом  $a$ .

2. Доказати да две праве које се секу одређују једну раван.

Решење: Нека се праве  $a$  и  $b$  секу у тачки  $S$ . На правој  $a$ , постоји по аксиоми 3 и тачка  $A \neq S$ . Сада посматрамо праву  $b$  и тачку  $A$  и резонујемо као у задатку 1.

3. Нека су  $a$  и  $b$  две различите праве. Доказати да оне имају највише једну заједничку тачку.

Решење: Претпоставимо супротно да  $a$  и  $b$  имају две различите заједничке тачке  $A$  и  $B$ . Међутим, онда би по аксиоми 2, било  $a = b$ , што је супротно услову задатка.

4. За сваке две мимоилазне праве постоји раван која сече сваку од њих.

Решење: По аксиоми 3, постоје тачке  $A$  и  $B$  које припадају редом правима  $a$  и  $b$ . Сада одаберемо произвољну тачку  $C$  такву да не припада ни  $a$  ни  $b$ . На основу аксиома 5 и 6 са ове три неколинеарне тачке одређена је тражена раван која сече праву  $a$  у тачки  $A$  и праву  $b$  у тачки  $B$ .

5. У равни је дато 6 тачака, од којих никоје три нису колинеарне. Колико правих одређују ове тачке?

Решење: Решење овог задатка баш и нема толико везе са геометријом, заправо ово је више комбинаторика. Из сваке тачке се може повући 5 правих, пошто имамо шест тачака, онда има  $6 \cdot 5$  правих. Међутим, треба обратити пажњу да смо сваку праву бројали два пута, тако да је број правих које су одређене овим тачкама 15.

6. Ако су  $a$  и  $b$  две мимоилазне праве и  $A_1, A_2$  две разне тачке праве  $a$  и  $B_1, B_2$  две разне тачке праве  $b$ , доказати да су праве  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  такође мимоилазне.

Решење: Задатак ћемо решити тако што ћемо претпоставити супротно и довести до контрадикције. Дакле, претпоставимо супротно да праве  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  припадају једној равни. На основу аксиоме 7 све тачке праве  $a$  и  $b$  ће тада припадати равни  $\alpha$  па те праве неће бити мимоилазне што је у супротности са претпоставком задатка.

7. Колико равни одређују пет тачака од којих никоје четири нису копланарне?

Решење: Решење овог задатка је такође комбинаторичке природе. Има  $5 \cdot 4 / 2 = 10$  равни.

8. У скупу од седам тачака постоји тачно шест тројки колинеарних тачака и не постоје четири тачке које су колинеарне. Колико различитих правих одређују ове тачке?

Решење: Три неколинеарне тачке одређују 3 праве, а три колинеарне само једну. Дакле, тачкама датог скупа одређено је укупно  $\frac{6 \cdot 7}{2} - 6 \cdot 2 = 9$  правих.

9. Дат је скуп од  $n$  тачака, међу којима не постоје четири копланарне тачке. Колико тачака има овај скуп ако је број свих равни одређених овим тачкама 12 пута већи од највећег броја правих које могу бити одређене тим тачкама?

Решење:

Из  $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2} = \frac{12 \cdot n \cdot (n-1)}{2}$  добијамо да је  $n = 38$ .

10. Праве  $a$  и  $b$  мимоилазне су са правом  $c$  а међусобно су паралелне. Ако су тачке  $A, B$  и  $C$  такве да је  $A \in a, B \in b$  и  $C \in c$ , колико је највише равни одређено тачкама  $A, B, C$  и правама  $a, b, c$ ?



Решење:

Одређено је 6 равни и то:  $\{a, b\} \subset \alpha_1$  (из дефиниције паралелности јасно је да је са  $a$  и  $b$  одређена тачно једна раван),  $\{A, B, C\} \subset \alpha_2$ ,  $\{a, C\} \subset \alpha_3$ ,  $\{b, C\} \subset \alpha_4$ ,  $\{c, A\} \subset \alpha_5$ ,  $\{c, B\} \subset \alpha_6$ . Искористили смо аксиоме 5 и 6 и први задатак.

11. Праве  $a$  и  $b$  се секу у тачки  $P$ . Праве  $a$  и  $c$  су паралелне, а праве  $b$  и  $c$  мимоилазне. Ако су тачке  $A, B$  и  $C$  такве да је  $A \in a$  и  $A \neq P$ ,  $B \in b$  и  $B \neq P$ , а  $C \in c$  колико је равни одређено тачкама  $A, B, C$  и правама  $a, b, c$ ?

Решење:

Одређено је 5 равни и то:  $\{a, C\} \subset \alpha_1$ ,  $\{A, B, C\} \subset \alpha_2$ ,  $\{a, b\} \subset \alpha_3$ ,  $\{b, C\} \subset \alpha_4$ ,  $\{c, B\} \subset \alpha_5$ . Користили смо аксиоме 5 и 6 и први задатак.

12. Праве  $a$  и  $b$  припадају равни  $\alpha$  и секу се. Какав положај према равни  $\alpha$  може имати права  $c$  која сече праве  $a$  и  $b$ ?

Решење:

На основу аксиоме 7 можемо једноставно да закључимо  $c \subset \alpha$ .

## Литература

1. Зоран Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Графити и Математички факултет, Београд 1994.
2. Вене Богославов, *Збирка решених задатака из Математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2001.
3. <http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/nm/227/3.pdf>
4. [http://matematika-milutin.weebly.com/uploads/1/5/8/3/15837518/aksiome\\_pripadanja.pdf](http://matematika-milutin.weebly.com/uploads/1/5/8/3/15837518/aksiome_pripadanja.pdf)