Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Predmet:Metodika nastave i računarstva

Tema:Sličnost

Profesor **Student**

Nebojša Ikodinović **Marina Stanković 270/2011**

Anđela Milijašević 132/2011

Datum:15.12.2014

1.Proporcionalnost duži i Talesova teorema

Teorija:

Ako su date duži a, b, k gde je k jedinična duć i ako je $a = mk$, $b = nk$, tada količnik $m:n$, odnosno m/n nazivamo razmerom duži a i b, štooznačavamo sa $a : b = m : n$, oodnosno $a/b = m/n$.

Talesova teorema: ako su paralelne prave a i b transverzale pravih p i q i ako je $p \cap q\{S\}$, $a \cap p = \{A\}$, $a \cap q = \{A_1\}$, $b \cap p = \{B\}$, $b \cap q = \{B_1\}$, tada je

$$AA_1/BB_1 = SA/SB = SA_1/SB_1 = k$$

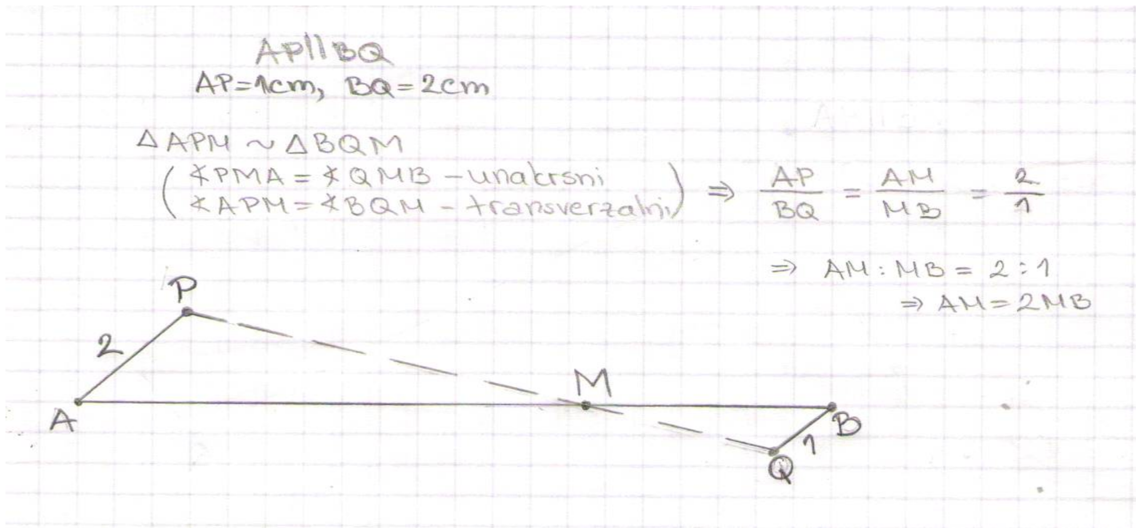
gde je k koeficijent sličnosti trouglova SAA_1 u SBB_1.

Zadaci

1.Data je duž AB.Odrediti na toj duži tačku M tako da je AM : MB = 2 : 1.

Rešenje:

Neka su P i Q tacke takve da je AP = 2, BQ = 1 i AP||BQ. Tada je M presek duži AB i PQ.

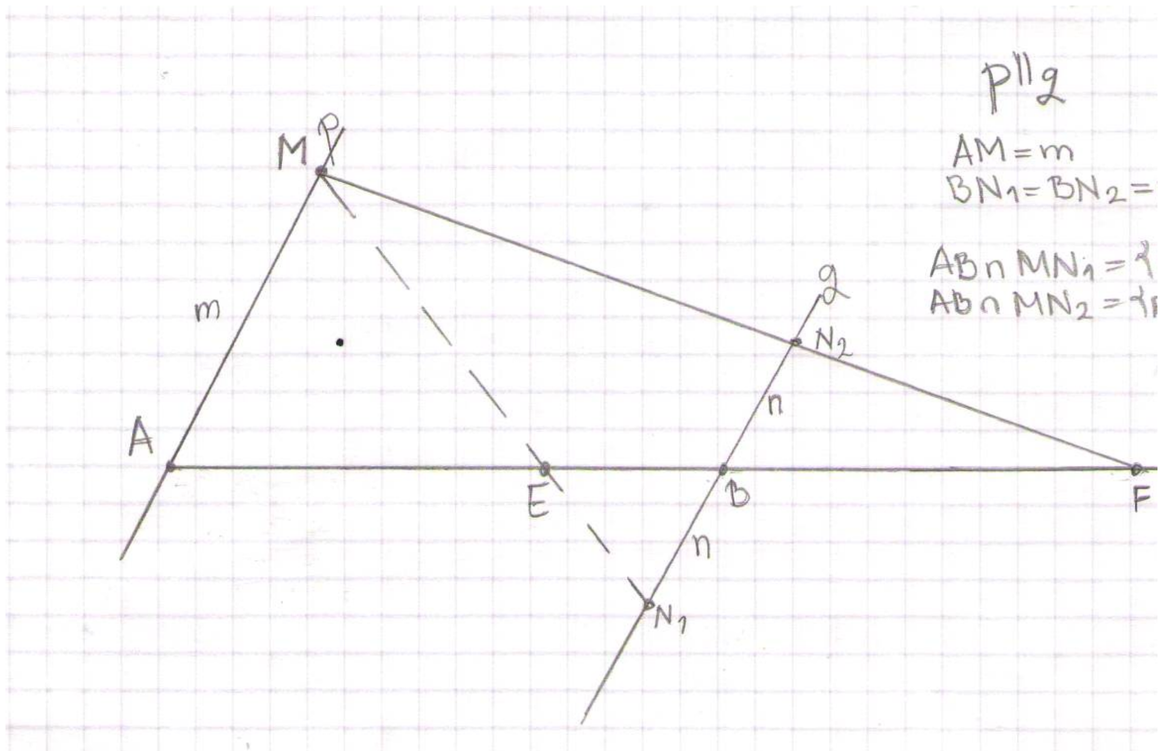


2.Data je duž AB. Naći tačke C i D, koje ovu duž dele unutrašnjom i spoljašnjom podelom u odnosu m : n.

Rešenje:

Neka su prave p i q паралелне, tako da prava p sadrži tačku A. a prava q sadrži tačku B,neka tačka M pripada pravoj p, a tačke N,N_1 i N_2tačke koje pripadaju pravoj q tako da je AM = m, $BN_1 = BN_2 = n$. Tada u preseku pravih MN_1 i AB nalazi se tačka C,a u preseku pravih MN_2 i AB nalazi se tačka D tako da važi:

$$AE/EB = AF/BF = m/n.$$

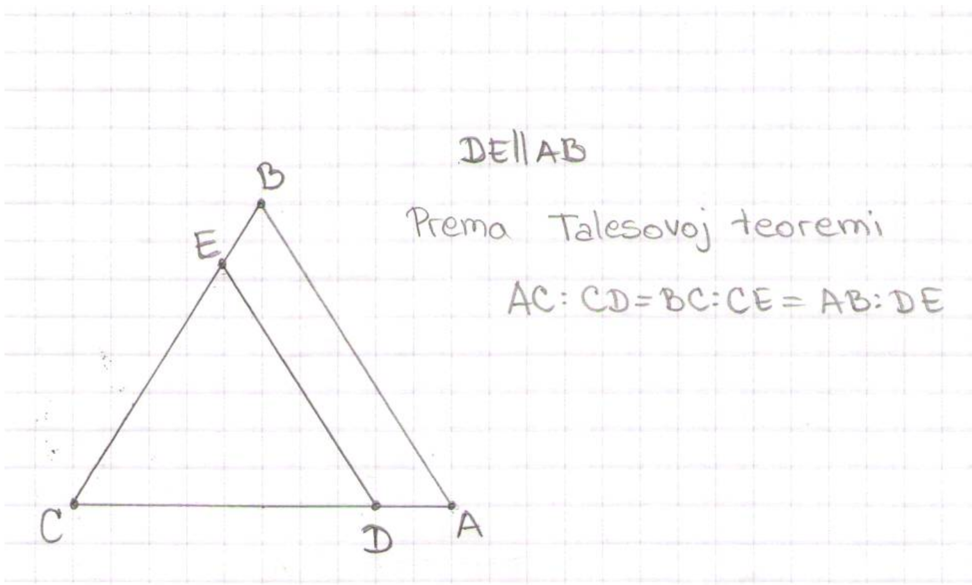


3.U datom trouglu ABC (vidi sliku) duž DE je paralelna sa AB. Naći :

a) CE, ako je AC = 12, CD = 4, BC = 24;

b) BE, ako je AC = 15, AD = 3, BC = 25;

c) BC, ako je AD = 6, CD = 14, CE = 7.



Rešenje:

Na osnovu Talesove teoreme, prema datoj slici, imamo razmere AC : CD = BC : CE = AB : DE. I odavde računamo tražene dužine.

a) Iz AC : CD = BC : CE dobijamo da je CE = (CD*BC)/AC = (4*24)/12 = 8;

b) Iz AC : CD = BC : CE, na osnovu osobina proporcija dobijamo (AC - CD) : (BC - CE) = AC : BC, odnosno AD : BE = AC : BC. Odavde je BE = (AD*BC)/AC = (3*25)/15 = 5;

c) Iz datih razmera u zadatku na osnovu osobina proporcija dobijamo da je
(AC - CD) : (BC - CE) = CD : (CD - CE) ,odnosno AD : BE = CD : CE.Odavde je
BE = (AD*CE)/CD = (6*7)/14 = 3, pa je BC = CE + BE = 7+3 = 10.

4. Na duži AB dužine 92 date cu tačke C i D, takve da važi AC/CD = 2/3 i CD/DB = 5/7. Odrediti dužine duži AC, CD i DB.

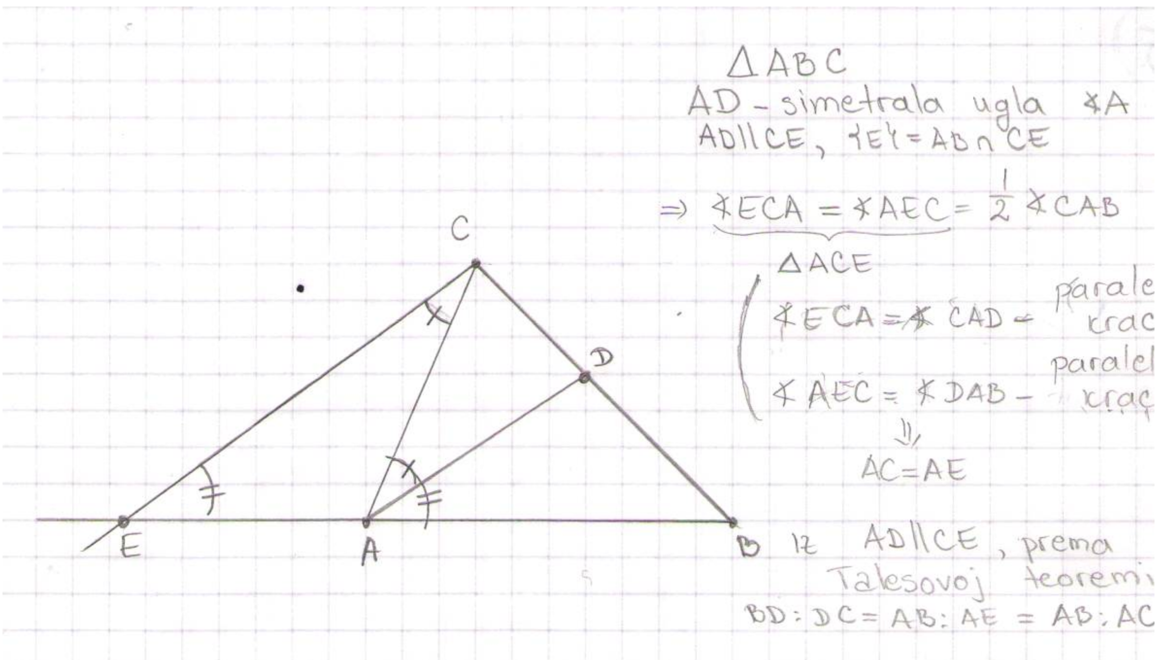
Rešenje:

Iz uslova zadatka sledi da je AC : CD : DB = 10 : 15 : 21 i AC + CD + DB = 92. Ako označimo AC = 10t, CD = 15t i DB = 21t, onda dobijamo da je 46t = 92 i odatle da je t = 2. I onda sledi da je AC = 20, CD = 30 i DB = 42.

5. Simetrala unutrasnjeg ugla trougla ABC kod temena A deli naspramnu stranicu BC na odsečke proporcionalne ostalim dvema stranicama tj. AB : AC. Dokazati.

Rešenje:

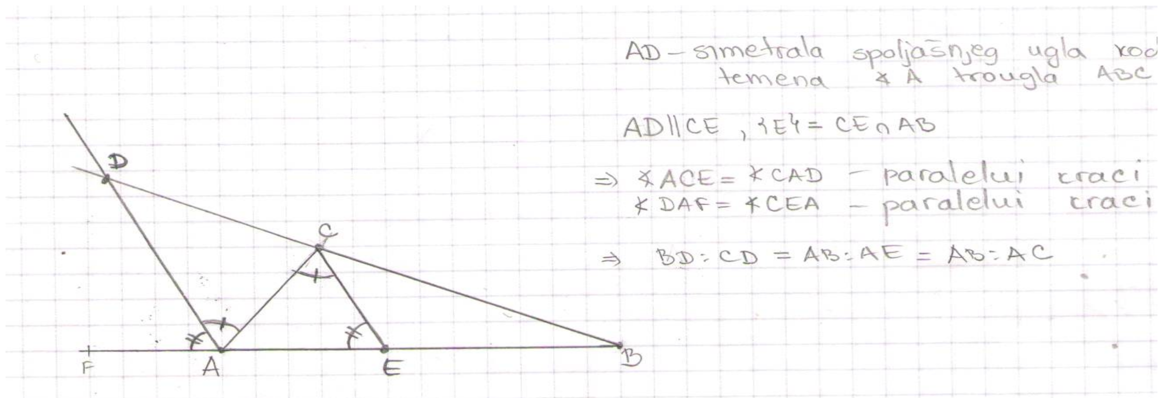
Neka je D presek simetrale ugla A i stranice BC i E presek prave koja sadrži tačku C, a paralelna je pravoj AD, sa pravom AB (vidi sliku). Tada su uglovi kod temena C i E trougla ACE jednaki polovini ugla A trougla ABC tj. taj trougao je jednakokraki. Zato je AC = AE. Dalje, zbog AD || CE, na osnovu Talesove teoreme dobijamo BD/DC = AB/AE = AB/AC.



6. Dokazati da simetrala spoljašnjeg ugla kod temena A trougla ABC deli stranicu BC u odnosu AB : AC (AB ≠ BC).

Rešenje:

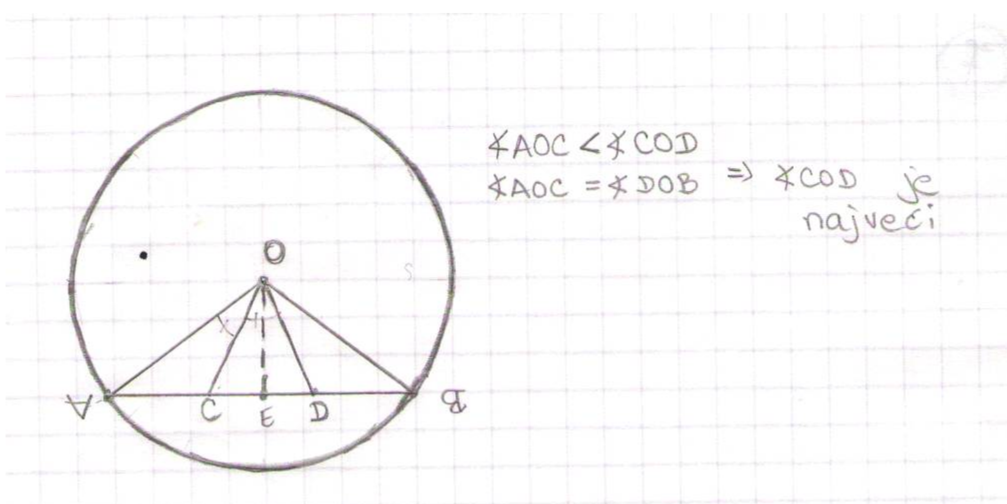
Neka je D presek simetrale spoljašnjeg ugla kod temena A trougla ABC sa pravom BC i E presek paralele sa AD, koja sadrži tačku C, sa pravom AB, (vidi sliku). Tada su uglovi kod temena C i E trougla ACE jednaki polovini spoljašnjeg ugla kod temena A trougla ABC pa sledi AE = AC. Dalje zbog AD || CE, sledi BD/CD = AB/AE = AB/AC.



7. Neka tačke C i D dele tetivu AB kruga na tri jednaka dela. Dokazati da je od tri dobijena centralna ugla ∢AOC, ∢COD, ∢DOB srednji najveći.

Rešenje:

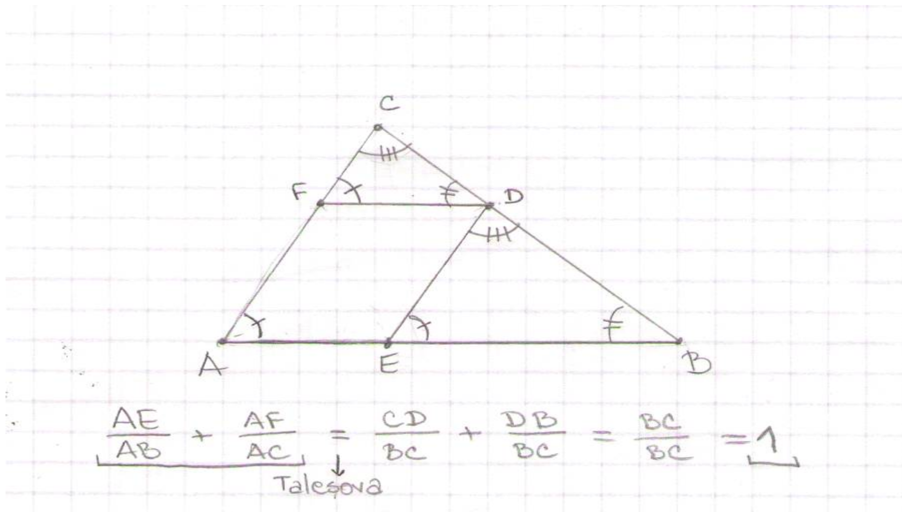
Označimo sa E podnožje normale iz O na AB (vidi sliku). Tada je OE visina, a OC medijana (odnosno srednja linija trougla) u trouglu AOD. Kako je bisektrisa (simetrala) ugla AOD između medijane i visine, to je ∢AOC< ∢COD, dok je ∢AOC = ∢DOB.



8. Dat je trougao ABC i tačka D na stranici BC. Prava koja sadrži tačku D i paralelna je stranici AC seče stranicu AB u tački E, a prava koj asadrći tačku D i paralelna je stranici AB seče stranicu AC u tački F. Dokazati da je AE/AB + AF/AC = 1.

Rešenje:

Na osnovu Talesove teoreme imamo da je AE/AB + AF/AC = CD/BC + DB/BC = BC/BC = 1. Dakle dokazana je jednakost.



2.Homotetija

Teorija:

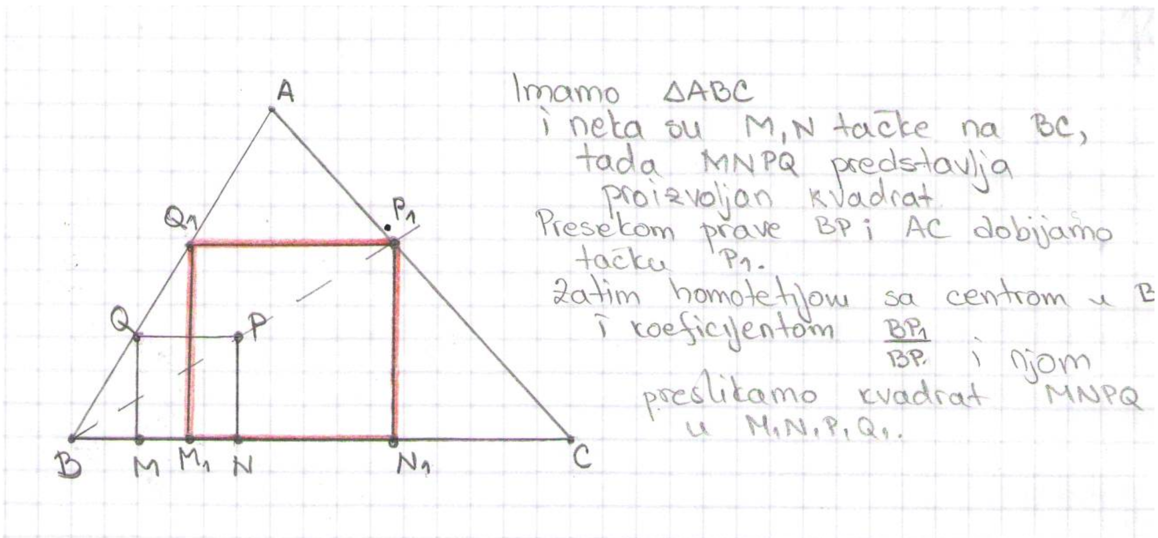
Neka je O data tačka i k dati broj različit od nule. Preslikavanje H_O figure F_1 pri kojoj svakoj tački M koja pripada figuri F odgovara tačka M_1 koja pripada figuri F_1, tako da je $OM_1 = kOM$, naziva se homotetijom sa centrom O i koeficijentom k. Pišemo $H_O(F) = F_1$.

Zadaci

9. Dat je oštrougli trougao ABC. Konstruisati kvadrat čija dva temena pripadaju stranici BC, a po jedno teme stranicama AB i AC.

Rešenje:

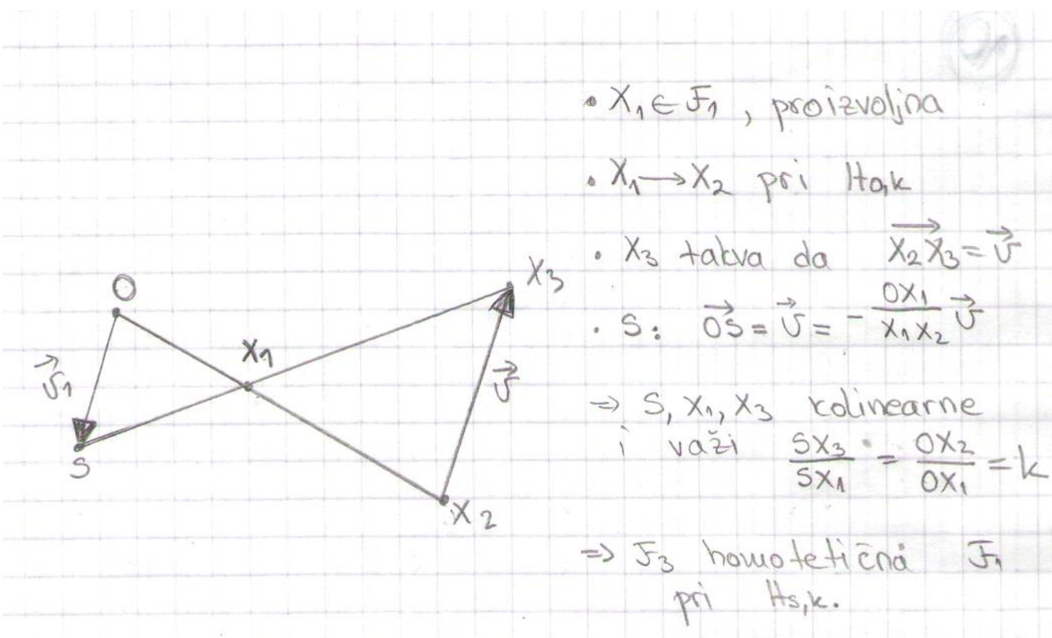
Neka je MNPQ proizvoljan kvadrat takav da temena M i N pripadaju pravoj BC i Q pripada pravoj AB, (vidi sliku). Neka je P_1 presek prave BP i prave AC. Homotetija sa centromB i koeficijentom BP_1/BP preslikava kvadrat MNPQ u traženi kvadrat $M_1N_1P_1Q_1$.



10. Data je figura F_1. Neka je figura F_2 homotetična datoj pri homotetiji $H_{O,k}$. Neka se figura F_3 dobija translacijom figure F_2 za vektor v. Dokazati da je figura F_3 homotetična figuri F_1 i odrediti centar i koeficijent te homotetije.

Rešenje:

Neka je X_1 proizvoljna tačka figure F_1, X_2 slika tačke X_1 pri homotetiji $H_{O,k}$, X_3 tačka određena sa vektori X_1X_2 i v su jednaki tj. $X_1X_2 = v$ i S tačka određena uslovom $OS = v = -(OX_1/X_1X_2)*v$. Tada su tačke C, X_1 i X_3 kolinearne što se vidi na slici i važi $SX_3/SX_1 = OX_2/OX_1 = k$. Prema tome figura F_3 jeste homotetična figuri F_1 pri homotetiji $H_{S,k}$.



11. Dokazati da je figura homotetična pravoj - prava.

Rešenje:

Neka je O centar homotetije $H_{O,k}$ i neka su X i Y proizvoljne tačke prave p, a X_1 i Y_1 slike tih tačaka pri homotetiji $H_{O,k}$. Tada vayi sledeća jednakost vektora :
$X_1Y_1 = X_1O + OY_1 = kXO + kOY = k(XO + OY) = kXY$. Prema tome, tačke X_1 i Y_1 pripadaju pravoj p_1 koja je paralelna sa pravom p. Sledi da je svaka tačka prave p_1 slika neke tačke prave p.Neka je M_1 proizvoljna tačka prave p_1 i neka je tačka M određena uslovom $OM = 1/kOM_1$. Tada je $OM_1 = kOM$ i $X_1M_1 = kXM$. Prema tome tačka M pripada pravoj p, a njena slika pri datoj homotetiji je tačka M_1.

3.Sličnost. Sličnost trouglova

Teorija:

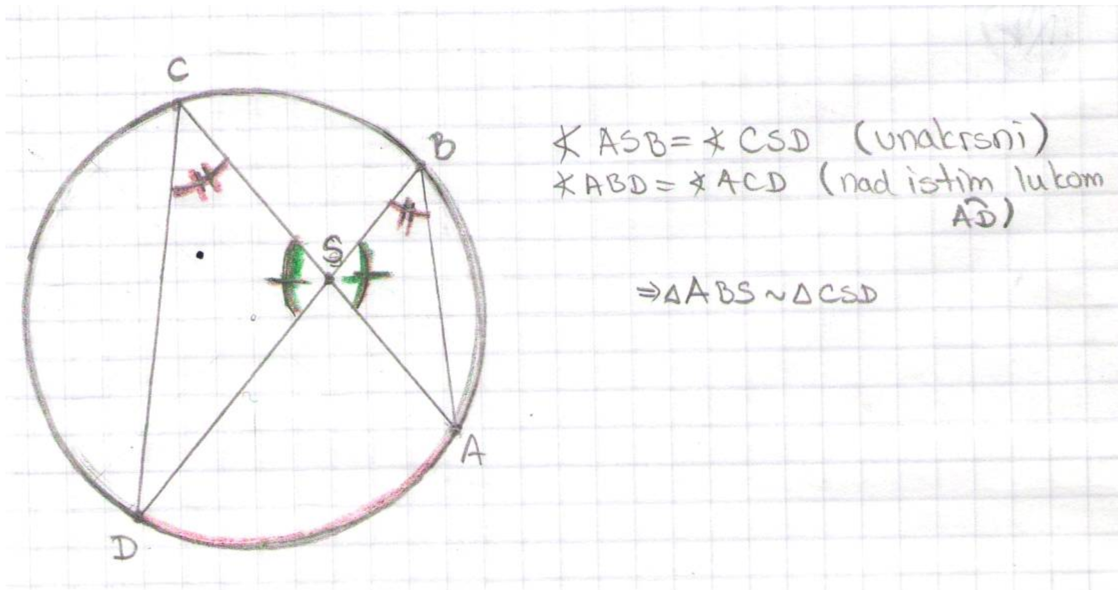
Preslikavanje P_k ravni α *na samu sebe koje svake dve tačke A,B prevodi u tačke $A_1B_1 = k*AB$, gde je k dati pozitivan broj, naziva se transformacijom sličnosti sa koeficijentom k.*

Stavovi sličnosti: neka su ΔSAA_1 i ΔSBB_1 dva trougla. Svaki od narednih uslova je potreban i dovoljan uslov da ova dva trougla budu slična $\Delta SAA_1 \sim \Delta SBB_1$:

1. $AA_1/BB_1 = SA/SB = SA_1/SB_1$;
2. $\measuredangle A = \measuredangle B$ i $\measuredangle A_1 = \measuredangle B_1$;
3. $AA_1/BB_1 = SA/SB$ i $\measuredangle A = \measuredangle B$.

Zadaci

12. Dokazati da su slični trouglovi ABS i CDS, (vidi sliku) gde je S proizvoljna tačka unutrašnjosti kruga.



Rešenje:

Kako je ∢ASB = ∢CSD, kao unakrsni uglovi datih trouglova, i ∢ABD = ∢ACD kao uglovi nad istim lukom AD. Iz ove dve jednakosti na osnovu stava 2. sledi da su trouglovi ABS i CDS slični.

13. Stranice trougla ABC su $a=18cm$, $b=15cm$ i $c=12cm$. Odrediti obim sličnog trougla ako je koeficijent sličnosti 5:3.

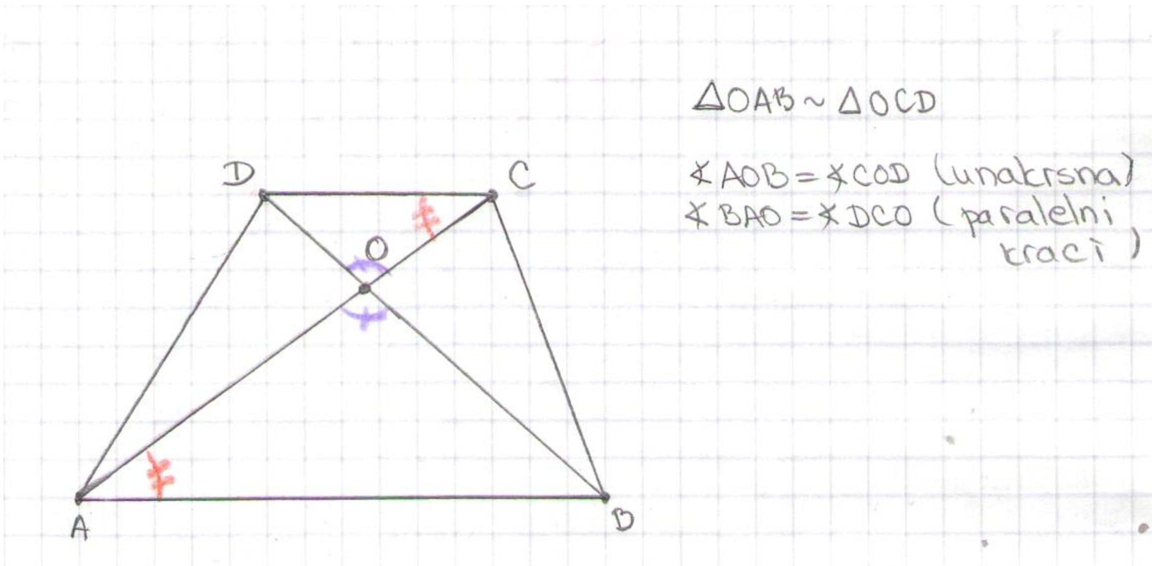
Rešenje:

Neka je $A_1B_1C_1$ trougao koji je sličan datom trougla. Kako je koeficijent sličnosti 5:3, dakle imamo da je $a_1=5/3a$ i odatle sledi da je $a_1=5*8/3=30$. Na isti način dobijamo da je $b_1=5/3b=25$, $c_1=5/3c=20$. I onda sledi da je $O_1=a_1+b_1+c_1=75cm$.

14. Dat je trapez ABCD kod koga je AB || CD. Neka je O presek dijagonala AC i BD. Dokazati da su trouglovi OAB i OCD slični.

Rešenje:

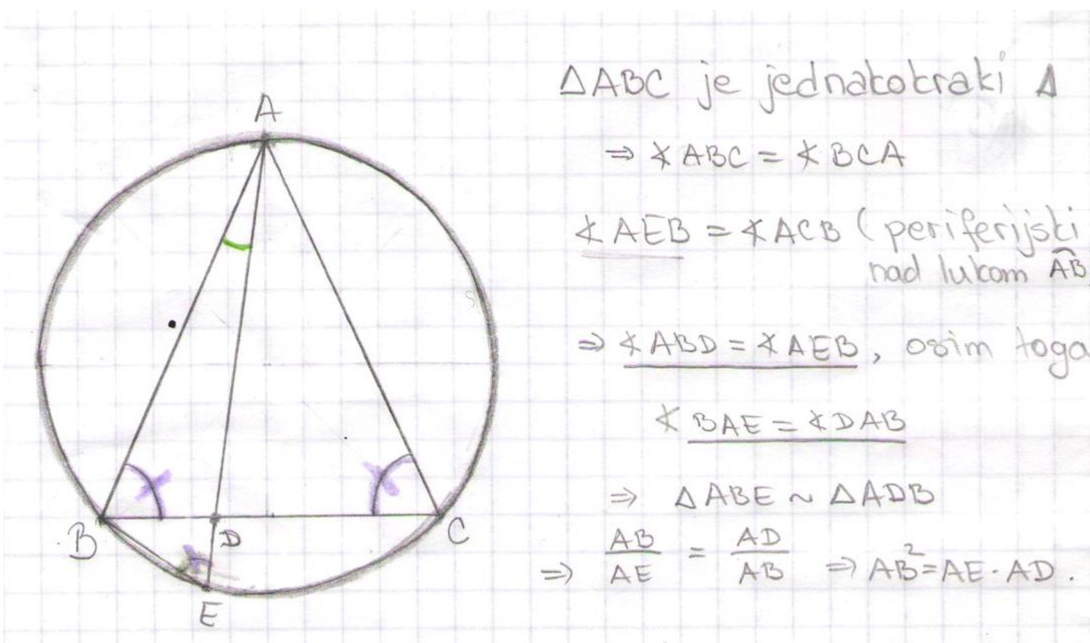
Sličnost ova dva trouglova nam sledi iz jednakosti pojedinih uglova datih trouglova, odnosno iz sledećih jednakosti : ∢AOB = ∢COD kao unakrsni i ∢BAO = ∢DCO kao uglovi sa paralelnim kracima. Pa na osnovu stava 2. sledi sličnost datih trouglova.



15. Dat je jednakokraki trougao ABC kod koga je AB = AC. Prava *l* koja sadrži tačku A seče pravu BC u tački D, a opisani krug u tački E. Dokazati da je AB^2=AD*AE.

Rešenje:

Prvo, primetimo sa slike jednakost uglova, ∢AEB = ∢ACB, kao periferijski uglovi nad istim lukom. Zato je i ∢ABD = ∢AEB. Osim toga ∢BAE = ∢DAB, pa zbog toga važi Δ ABE ~ Δ ADB, odakle nam sledi AB/AE = AD/AB i odatle konačno sledi AB^2 = AD*AB.



16. Dužine stranica pravougaonika su *a=5cm, b=2cm*. Odrediti stranice sličnog pravougaonika čiji obim i površina imaju jednake merne jedinice.

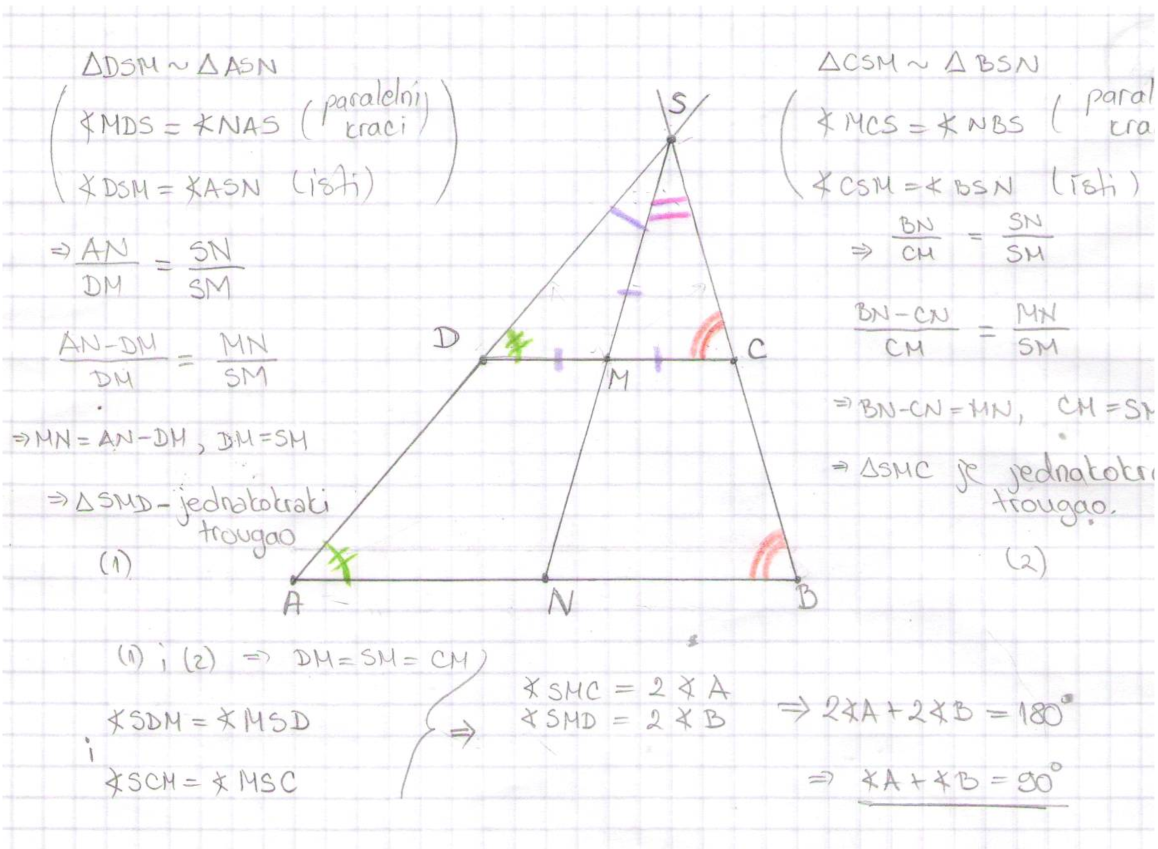
Rešenje:

Stranice sličnog pravougaonika datom pravougaoniku označimo sa a_1 *i* b_1, tada imamo da je $a_1/a=b_1/b=k$ odnosno imamo $a_1/5=b_1/2=k$. Odatle nam sledi da je $a_1=5k$, $b_1=2k$. Kako su merne jedinice površine i obima ovog sličnog pravougaonika jednake sledi da je $2*(5k+2k) = 5k*2k$,pa sledi da je $14k = 10k$ odakle dobijamo da je $k=7/5$ odakle nam sledi da je $a_1=7$, $b_1=2*7/5$.

17. Duž koja spaja središta osnova trapeza jednak je njihovoj polurazlici. Naći zbir uglova na većoj poluosnovici.

Rešenje:

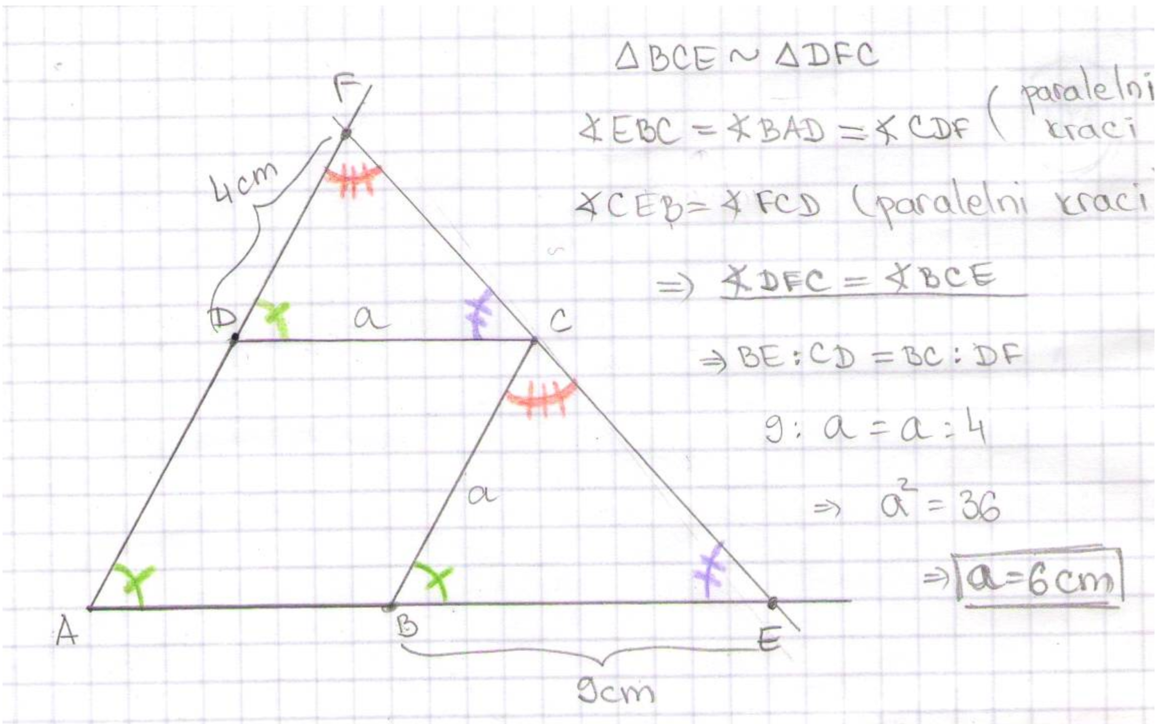
Za početak, produžimo bočne strane AD i BC datog trapeza ABCD do njihovog preseka kao na slici. Odatle dobijamo slične trouglove Δ DSM ~ Δ ASN, gde su M i N redom središta poluosnovica AB i CD (sličnost sledi iz jednakosti uglova ∢ASN = ∢DSM,jer su to isti uglovi, i ∢SAN = ∢SDM, kao transverzalni uglovi). Iz sličnosti ova dva trougla dobijamo da je AN/DM = SN/SM, odakle je (AN - DM)/DM = MN/SM, pa zbog MN = AN - DM, DM = SM i ΔSMD je jednakokrak. Isto ovo važi i za ΔSMC. Pa kako je ∢SMC = 2∢A i ∢SMD = 2∢B, a ∢SMC+∢SMD = 180° sledi da je ∢A+∢B = 90°.



18. Prava koja sadrži teme C romba ABCD seče produžetak stranice AB u tački E,a produžetak stranice AD u tački F. Ako je BE = 9cm i DF = 4cm, odrediti dužinu stranice romba.

Rešenje:

Sa slike vidimo da imamo dva slična trougla, Δ BEC ~ Δ DCF. Sličnost ova dva trougla sledi iz toga što su sledeći uglovi jednaki ∢FDC = ∢CBE kao transverzalni uglovi i ∢CFD = ∢ECB kao uglovi sa paralelnim kracima. Iz sličnosti ova dva trougla sledi da je $a/4 = 9/a$, pa sledi da je stranica romba ABCD jednaka , $a^2=36$, odnosno $a=6cm$.



4.Primena sličnosti na pravougli trougao

Teorija:

Pravougli trouglovi ADC i BCD (vidi sliku) su slični ako međusobom i slični sa datim trouglom ABC (∡ACD = ∡CBD = ∡β), pa važe sledeće prpoprcije ili Euklidovi stavovi:

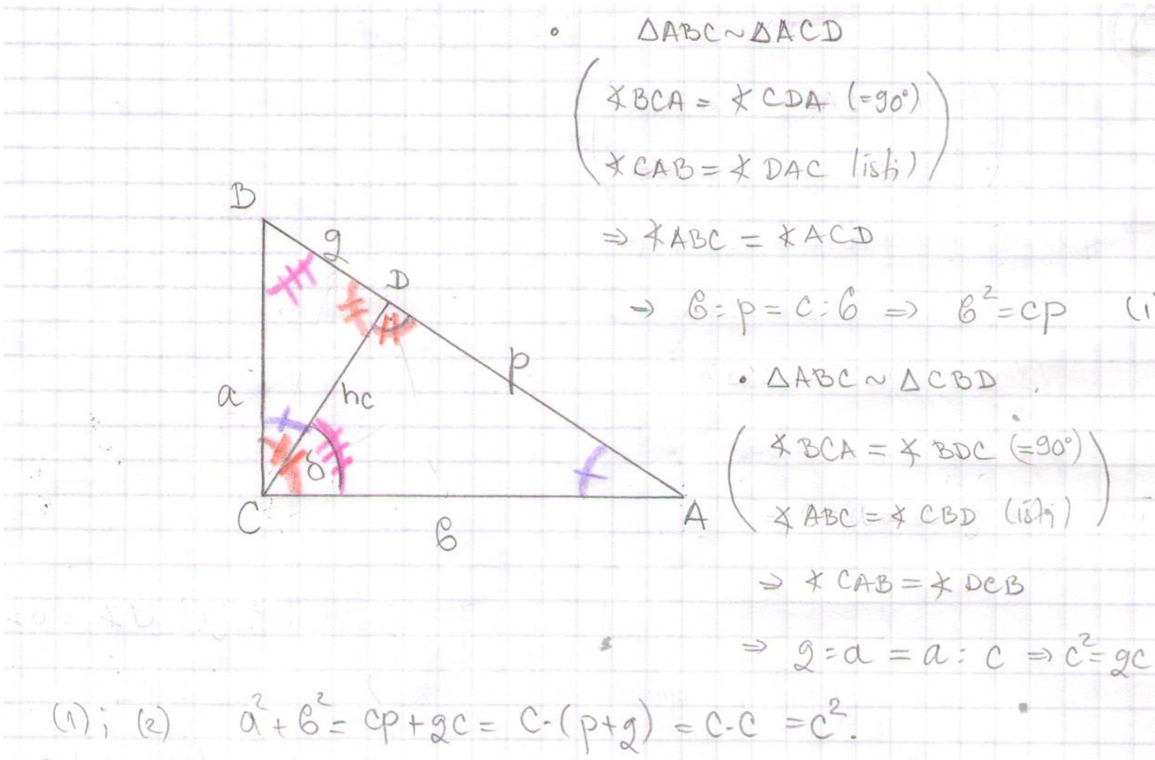
1. $p : h_c = h_c : q$, odnosno $h_c^2 = pq$, odnosno $h_c = \sqrt{pq}$;
2.$b : p = c : b$, odnosno $b^2 = pc$, odnosno $b = \sqrt{pc}$;
3.$a : q = c : a$, odnosno $a^2 = cq$, odnosno $a = \sqrt{cq}$;
4. Pitagorina teorema: $a^2 + b^2 = c^2$. (slika)

Zadaci

19. Primenom Euklidovih stavova dokazati Pitagorinu teoremu.

Rešenje:

Iz $b : p = c : b$, *tj.* $b^2 = pc$ *i iz* $a : q = c : a$, *tj* $a^2 = qc$ *pa sledi da je* $a^2 + b^2 = qc + pc = (p + q)*c = c*c = c^2$.



20. Ako je kod jednakokrakog trougla krak geometrijska sredina osnovice i visine koja odgovara osnovici, osnovica je dvaput veći od visine. Dokazati.

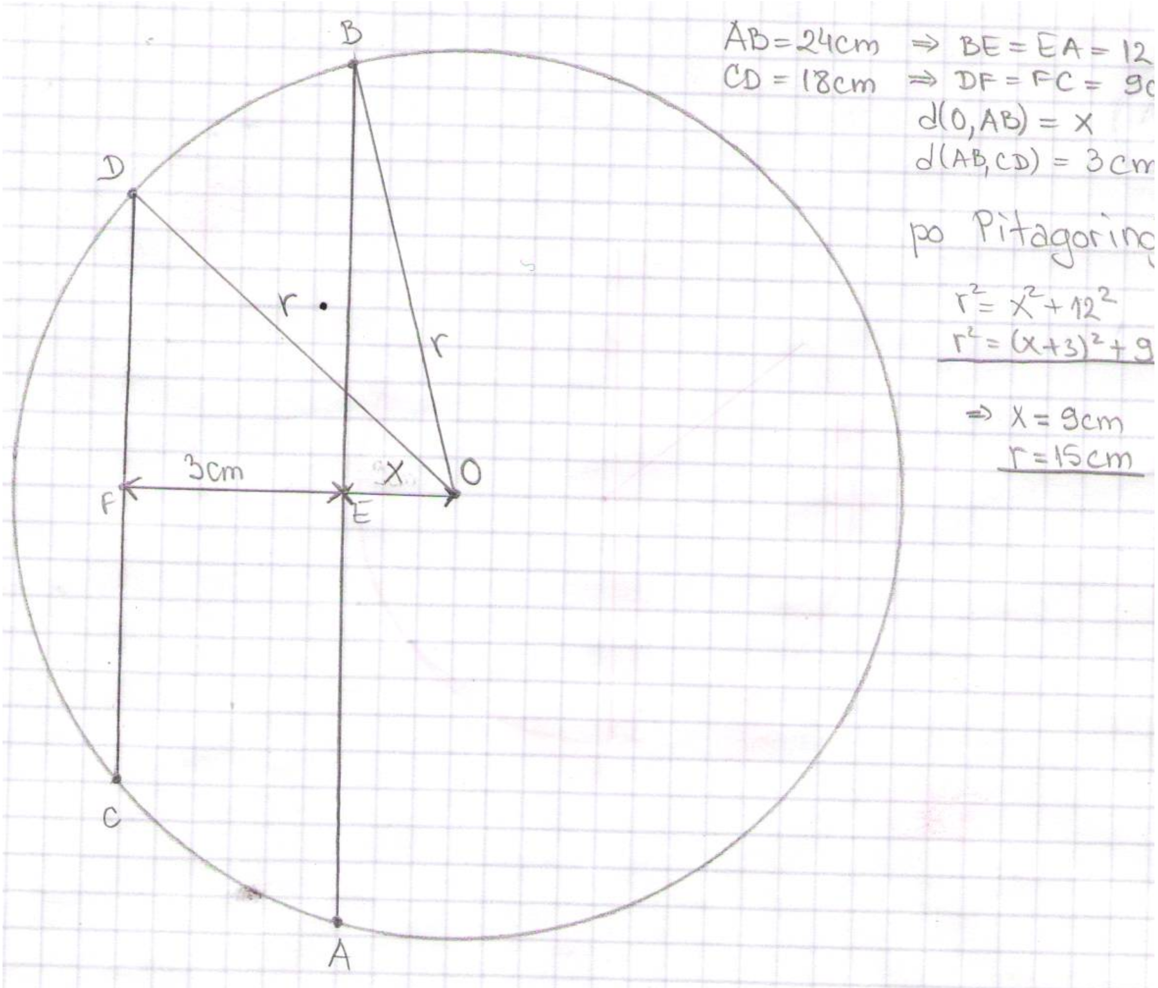
Rešenje:

Označimo sa a osnovicu, sa h visinu i sa b krak datog trougla ABC. Iz $b^2 = h^2 + (a/4)^2$ *i* $b = \sqrt{ah}$ dobijamo $a\text{-}2h = 0$ odnosno $a = 2h$.

21. Krug je presečen dvema paralelnim pravama koje su na međusobnom odstojanju 3*cm* i nalaze se sa iste strane središta kruga. Te prave određuju tetive duđine 18*cm* i 24*cm*. Izračunati dužinu r poluprečnika kruga.

Rešenje:

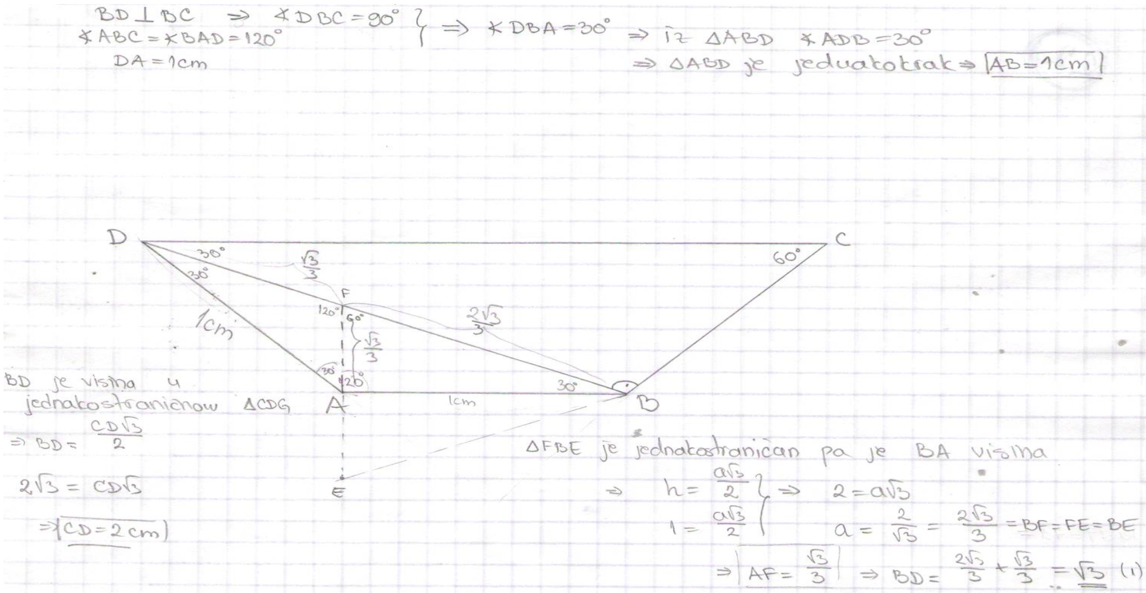
Neka je x odstojanje centra kruga od duže tetive. Po pitagorinoj teoremi je: $r^2 = x^2 + 12^2$ *i* $r^2 = (x+3)^2 + 9^2$, odakle dobijamo da je $x^2 + 144 = x^2 + 6x + 90$, odnosno dobijamo da je *6x = 54 tj. x = 9cm.* I onda dobijamo da je *r = 15cm. (vidi sliku)*



22. U tetivnom četvorouglu ABCD dijagonala BD je upravna na stranicu BC, $\sphericalangle$*ABC =* $\sphericalangle$*BAD = 120*° i DA = 1cm. Izračunati dužinu dijagonale BD i starnice CD.

Rešenje:

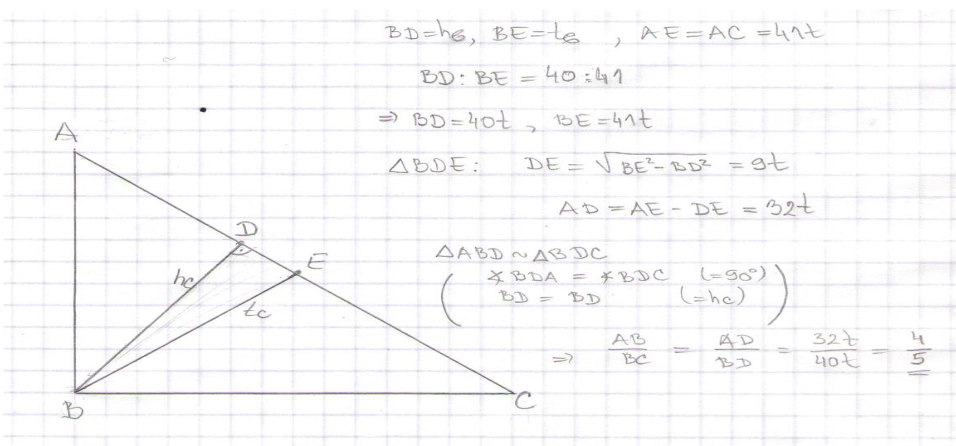
Kako je $\sphericalangle$*DBC* prav, to je CD prečnik kruga. Kako je $\sphericalangle$*ABC =* $\sphericalangle$*BAD = 120*°, to je $\sphericalangle$*BCD =* $\sphericalangle$*CDA = 60*°. Četvorougao ABCD je jednakokraki trapez, pa je AD = BC = 1cm i DB = √*3*, CD = 2cm.



23. Izračunati odnos kateta u pravouglom trouglu ako se visina i težišna duž koje odgovaraju hipotenuzi odnose kao 40 : 41.

Rešenje:

Neka su BD = 40t i BE = 41t visina, odnosno težišna duž koje odgovaraju hipotenuzi AC pravouglog trougla ABC (AC < BC). Tada je i AC = CE = 41t, a kako je iz trougla BDE : DE = $\sqrt{(BE^2 - BD^2)} = 9t$, to je AD = AE - DE = 32t. Iz sličnosti trouglova ABD i BDC nalazimo da je AB/BC = AD/BD = 32t/40t = 4/5.



24. Dužine težišnih duži u pravouglom trouglu su $t_a = 7$ i $t_b = 4$. Naći dužinu hipoteze c.

Rešenje:

Iz $t_a^2 = (a/2)^2 + b^2$ i $t_b^2 = a^2 + (b/2)^2$ sabiranjem dobijamo da je $t_a^2 + t_b^2 = 5/4(a^2 + b^2)$, pa je $c^2 = 4/5(t_a^2 + t_b^2)$ i $c = 2\sqrt{13}$.

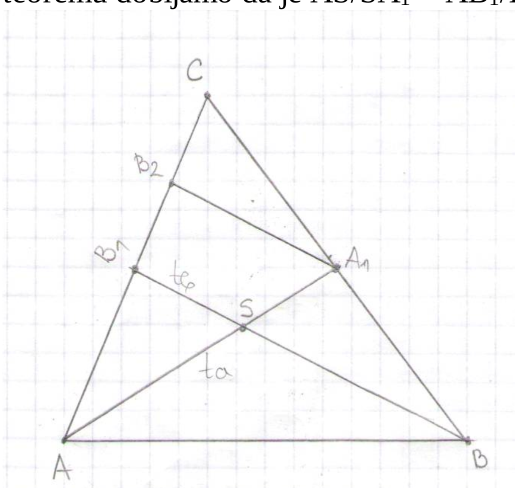
5.Dodatak(malo teži zadaci)

Zadaci

25. Dat je trougao ABC i tačke A_1 i B_1, redom, na stranicama BC i AC, takve da važi $AB_1/B_1C = \alpha$, $BA_1/A_1C = \beta$. Ako je S presek presek duži AA_1 i BB_1, odrediti odnos AS/SA_1.

Rešenje:

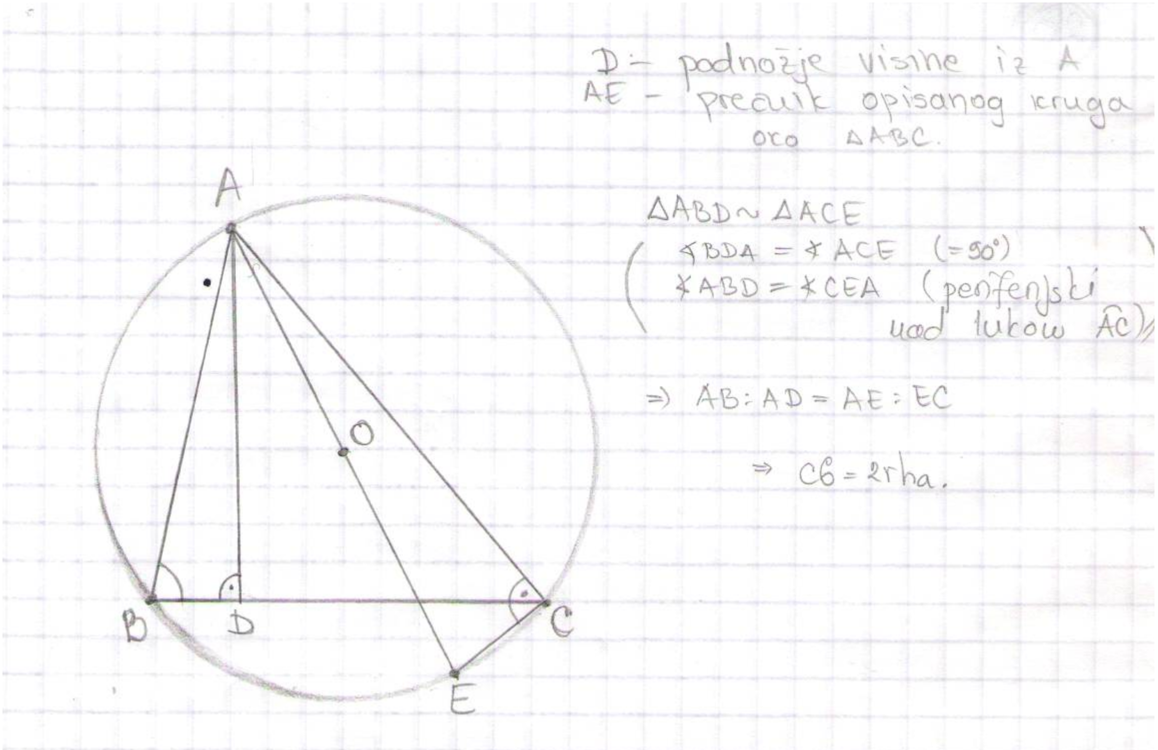
Neka prava koja sadrži tačku A_1, a paralelna je sa BB_1 seče stranicu AC u B_2, (vidi sliku). Tada je $B_1B_2/B_1C = BA_1/A_1C = \beta$, pa sledi da je $\alpha = AB_1/B_1C = AB_1/(B_1B_2 + B_2C) = AB_1/(B_1B_2 + 1/\beta * B_1B_2) = \beta/\beta+1 * AB_1/B_1B_2$. Koristeći ovu jednakost i Talesovu teoremu dobijamo da je $AS/SA_1 = AB_1/B_1B_2 = \alpha(\beta + 1)/\beta$.



26. Ako su *a, b, c* dužine stranica trougla ABC, *r* dužina poluprečnika opisanog kruga datog trougla i h_a dužina visine, koja odgovara stranici *a*, dokazati da je $bc = 2rh_a$.

Rešenje:

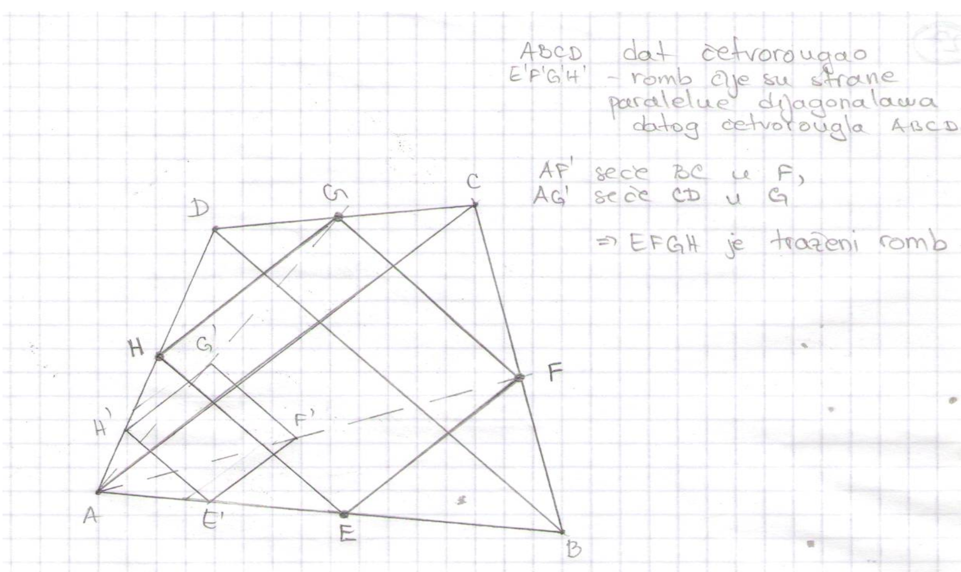
Neka je D podnožje visine iz A i AE prečnik opisanog kruga, kao što se vidi na slici. Tada je Δ ABD ~ Δ ACE ($\measuredangle$ADB = $\measuredangle$ACE = 90°, $\measuredangle$ABC = $\measuredangle$AEC, kao uglovi nad istim lukom AC) i odatle AB : AD = AE : EC tj. $cb = 2rh_a$.



27. U zadati četvorougao ABCD upisati romb, kome su stranice paralelne dijagonalama datog četvorougla.

Rešenje:

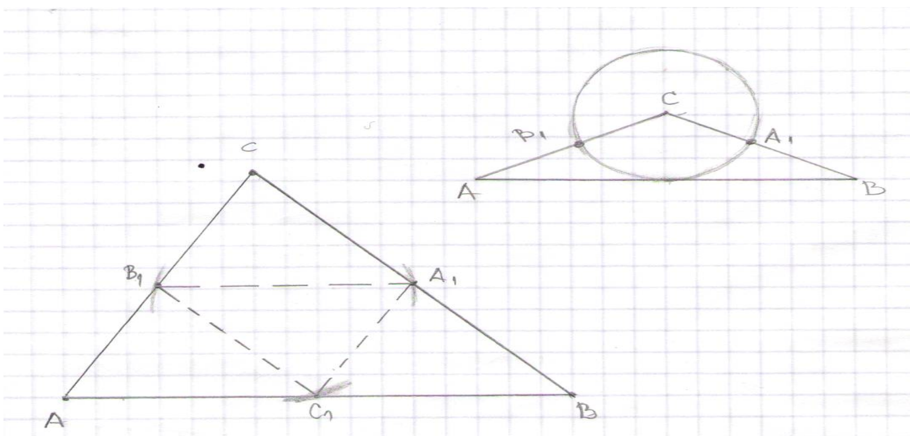
Neka je E'F'G'H' romb čije su stranice paralelne dijagonalama datog četvorougla, a temena E' i H' su na stranicama AB, odnosno AD(vidi sliku). AF' seče BC u F, a AG' seče CD u G. EFGH je traženi romb.



28. Dokazati da je poluprečnik kruga, koji polovi stranice trougla dva puta manji od poluprečnika kruga opisanog oko tog trougla.

Rešenje:

Krug koji polovi stranice trougla trebalo bi da prolazi kroz tačke A_1, B_1 i C_1 koje su središta stranica datog trougla ABC kao što se vidi na slici. Kako su ovi trouglovi slični sa koeficijentom sličnosti 1/2 to su njihovi poluprečnici opisanih krugova u odnosu 1 : 2.



29. Visine dva trougla su prporcionalne. Dokazati da su ti trouglovi slični.

Rešenje:

Neka su h, u, v visine koje redom odgovaraju stranicama a, b, c jednog trougla, h_1. u_1, v_1 visine koje odgovaraju stranicama a_1, b_1, c_1 drugog trougla, pri čemu važi $h/h_1 = u/u_1 = v/v_1 = k$. Kako je $ah = bu = cv$ i $a_1h_1 = b_1u_1 = c_1v_1$ dobijamo da je $ah/a_1h_1 = bu/b_1u_1 = cv/c_1v_1 = a/a_1 * k = b/b_1 * k = c/c_1 * k$. Iz poslednje jednakosti dobijamo da je $a/a_1 = b/b_1 = c/c_1$, a odatle sledi da su dati trouglovi slični.

30. Neka su r_1 i r_2 poluprečnici krugova k_1 i k_2 koji se dodiruju i T_1 i T_2 dodirne tačke jedne njihove zajedničke spoljašnje tangente. Dokazati da je $T_1T_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$.

Rešenje:

Neka je $r_1 > r_2$ i M podnožje normale iz tačke O_1 na duž O_1T_1. Tada je četvorougao $O_2T_2T_1M$ pravougaonik, pa je $T_1T_2 = MO_2 = \sqrt{(O_1O_2^2 - O_1M^2)} = \sqrt{((r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2)} = 2\sqrt{r_1r_2}$.