Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

FUNKCIONALNE JEDNAČINE

Profesor: dr Nebojša Ikodinović
Studenti:
Ana Miloradović 138/2013
Ana Milašinović 150/2013
Marina Lukić 289/2013
Branka Šljivić 145/2013
Aleksandra Selaković 56/2013
Marko Ćosić 284/2013

1. Ako je $f(x+1) = 3x - 2$, odrediti $f(x)$.
   Rešenje:
   Koristimo smenu:$x + 1 = t$
   x=t-1
   Vraćamo se u početnu jednačinu: $f(t) = 3(t-1) - 2$
   $f(t) = 3t - 5$, odnosno $f(x) = 3x - 5$

2. Ako je $f(x+3) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$, odraditi $f(x)$.
   Rešenje:
   Koristimo smenu: $x + 3 = t$
   x=t-3
   Vraćamo se u početnu jednačinu: $f(t) = \frac{1}{2}(t-3)^2 + 2(t-3) + \frac{3}{2}$
   $f(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 6t + 9) + 2(t-3) + \frac{3}{2}$
   $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2} + 2t - \frac{12}{2} + \frac{3}{2}$
   $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - t$, odnosno $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

3. Ako je $f(3x-1) = 2x^2 - 3x + 5$, odrediti $f(x)$.
   Koristimo smenu: $3x - 1 = t$
   $x = \frac{t+1}{3}$
   Vraćamo se u početnu jednačinu: $f(t) = 2(\frac{t+1}{3})^2 - 3(\frac{t+1}{3}) + 5$
   $f(t) = 2\frac{t^2+2t+1}{9} - t - 1 - 5$
   $f(t) = \frac{2t^2-5t+37}{9}$, odnosno $f(x) = \frac{2x^2-5x+37}{9}$

4. Ako je $f(\frac{x}{x+1}) = x^2$, odrediti $f(x)$.
   Resenje:
   Koristimo smenu: $\frac{x}{x+1} = t$
   $t(x+1) = x$
   $x(t-1) = -1$
   $x = \frac{-t}{t-1} = \frac{t}{1-t}$
   Vraćamo se u početnu jednačinu: $f(t) = (\frac{t}{1-t})^2$
   $f(t) = \frac{t^2}{1-2t-t^2}$, odnosno $f(x) = \frac{x^2}{1-2x-x^2}$

5. Ako je $f(\frac{3x-1}{x+3} = x - 3$
   Rešenje:
   Koristimo smenu: $\frac{3x-1}{x+3} = t$
   $3x - 1 = tx - 3t$
   $x(3-t) = 1 + 3t$
   $x = \frac{1+3t}{3-t}$
   Vraćamo se u početnu jednačinu: $f(t) = \frac{1+3t}{3-t} - 3$
   $f(t) = \frac{6t-8}{3-t}$, odnosno $f(x) = \frac{6x-8}{3-x}$

6. Ako je $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, odrediti $f(x)$.
   Rešenje:
   Koristimo smenu: $t = x + \frac{1}{x}\ /^2$
   $t^2 = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$
   $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 1$
   $f(t) = t^2 - 1$, odnosno $f(x) = x^2 - 1$

7. Rešiti funkcionalnu jednačinu $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$
   Rešenje:

$f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$
uvodimo smenu: $\frac{1}{x}$=t
Vraćamo se u početnu jednačinu
$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}$
$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}$
$f(t) = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}$
$f(t) = \frac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}$
umesto t sada pisemo x:
$f(x) = \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

8. Resiti funkcionalnu jednačinu $f(\frac{x+2}{2x+1}) = 5x+3$.
   Rešenje:
   Uvodimo smenu t= $\frac{x+2}{2x+1}$
   Sada izražavamo x
   $x+2 = t*(2x+1)$
   $x+2 = 2*t*x+t$
   $x-2*t*x = t-2$
   $x*(1-2t) = t-2$
   Sledi x=$\frac{t-2}{1-2t}$
   Vraćamo se u početnu jednačinu...
   $f(t) = 5*\frac{t-2}{1-2t}+3$
   $f(t) = \frac{5t-10}{1-2t}+3$
   $f(t) = \frac{5t-10+3-6t}{1-2t}$
   $f(t) = \frac{-t-7}{1-2t}$
   $f(t) = \frac{t+7}{2t-1}$
   Umesto t pisaćemo x
   $f(x) = \frac{x+7}{2x-1}$

9. Ako je $f(\frac{3x-1}{x+2}) = \frac{x+1}{x-1}$, odrediti $f(x)$.
   Rešenje:
   Koristimo smenu $\frac{3x-1}{x+2} = t$
   $3x-1 = tx+2t$
   $x(3-t) = 1+2t$
   $x = \frac{1+2t}{3-t}$
   Vraćamo se početnu jednačinu: $f(t) = \frac{\frac{1+2t}{3-t}+1}{\frac{1+2t}{3-t}-1}$
   $f(t) = \frac{4+t}{3t-2}$, odnosno $f(x) = \frac{4+x}{3x-2}$

10. Ako je $f(\frac{x}{x+1}) = (x-1)^2$,izračunati f(3).
    Resenje:
    Najpre moramo naći f(x).
    $f(\frac{x}{x+1}) = (x-1)^2$
    $\frac{x}{x+1}$=t
    x = t (x+1)
    x = tx + t
    $x–tx = t$

$x(1–t) = t$
$x = \frac{t}{1-t}$ vraćamo se u početnu jednačinu...
$f(\frac{x}{x+1}) = (x-1)^2$
$f(t) = (\frac{t}{1-t} - 1)^2$ Sada umesto t stavljamo 3 jer se traži f(3)...
$f(3) = (\frac{3}{1-3} - 1)^2$.

11. Ako je $f(x-2) = x^3 - 2x - 1$, izračunati f(1).
Resenje:
Najpre moramo naći f(x).
$f(x-2) = x^3 - 2x - 1$
$x - 2 = t$
x=t+2
vraćamo se u početnu jednačinu...
$f(x-2) = x^3 - 2x - 1$
$f(t) = (t+2)^3 - 2(t+2) - 1$
rešavamo dalje...
$f(t) = t^3 + 3 * 2t^2 + 3 * 4t + 8 - 2t - 4 - 1$
$f(t) = t^3 + 6t^2 + 12t + 3 - 2t$
$f(t) = t^3 + 6t^2 + 10t + 3$
$f(1) = 1^3 + 6 * 1^2 + 10 * 1 + 3.$
$f(1) = 1 + 6 + 10 + 3 = 20.$

12. Neka je $f(x+a) = x^2 + x + 2$, izračunati f(x-a).
Resenje:
Najpre ćemo naći f(x).
$f(x+a) = x^2 + x + 2$
$x + a = t$
$x = t - a$
vraćamo se u početnu jednačinu $f(x+a) = x^2 + x + 2$
$f(t) = (t-a)^2 + (t-a) + 2$
$f(x-a) = (x-a-a)^2 + (x-a-a) + 2.$
$f(x-a) = (x-2a)^2 + x - 2a + 2.$

13. Rešiti diferencijalnu jednačinu$f(\frac{x+1}{x-2}) + 2 * f(\frac{x-2}{x+1}) = x$.
Rešenje:
Ako uzmemo smenu $\frac{x-2}{x+1} = t$, onda je $\frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{t}$, sledi
$x - 2 = t(x+1)$
$x - 2 = t * x + t$
$x - tx = t + 2$
$x(1-t) = t + 2$
$x = \frac{t+2}{1-t}$
Vraćamo se u početnu jednačinu $f(\frac{x+1}{x-2}) + 2 * f(\frac{x-2}{x+1}) = x$
$f(\frac{1}{t}) + 2 * f(t) = \frac{t+2}{1-t}$
Sada ćemo se poslužiti jednim trikom, umesto t ćemo staviti $\frac{1}{t}$
dalje imamo:
$f(t) + 2 * f(\frac{1}{t}) = \frac{\frac{1}{t}+2}{1-\frac{1}{t}}$
$f(t) + 2 * f(\frac{1}{t}) = \frac{\frac{1+2t}{t}}{\frac{t-1}{t}}$
$f(t) + 2 * f(\frac{1}{t}) = \frac{1+2t}{t-1}$

Imamo sistem od 2 funkcionalne jednaine koji dalje rešavamo:
$f(\frac{1}{t}) + 2 * f(t) = \frac{t+2}{1-t}$
$f(t) + 2 * f(\frac{1}{t}) = \frac{1+2t}{t-1}$
Prvu ćemo pomnoziti sa -2 i dodati drugoj jednačini
$-2 * f(\frac{1}{t}) - 4 * f(t) = -2 * \frac{t+2}{1-t}$
$f(t) + 2 * f(\frac{1}{t}) = \frac{1+2t}{t-1}$
Sada ih saberemo
$-3 * f(t) = \frac{-2t-4}{1-t} + \frac{1+2t}{t-1}$
$-3 * f(t) = \frac{2t+4}{t-1} + \frac{1+2t}{t-1}$
$-3 * f(t) = \frac{4t+5}{t-1}$
sledi $f(t) = \frac{\frac{4t+5}{t-1}}{-3}$
$f(t) = \frac{4t+5}{3-3t}$
Zamenimo t sa x i dobijamo rešenje naše funkcionalne jednačine.
$f(x) = \frac{4x+5}{3-3x}$

14. Ako je $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = x$, odrediti $f(x)$
Rešenje:
Korišćenjem smene $x = t$ dobijamo $f(t) + 2f(\frac{1}{t}) = t$
Korišćenje smene $\frac{1}{x} = t$ dobijamo $f(\frac{1}{t}) + 2f(t) = \frac{1}{t}$
Rešavanjem ovog sistema dobijamo: $f(t) = \frac{t^2-2}{-3t} = \frac{2-t^2}{3t}$

15. Ako je $(x-1)f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x-1}$, odrediti $f(x)$.
Rešenje:
Korišćenjem smene $x = t$ dobijamo $(t-1)f(t) + f(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t-1}$
Korišćenjem smene $\frac{1}{x} = t$ dobijamo $(\frac{1}{t} - 1)f(\frac{1}{t}) + f(t) = \frac{1}{\frac{1}{t}-1}$
Rešavanjem sistema dobijamo da je $f(t) = \frac{1}{1-t}$ odnosno $f(x) = \frac{1}{1-x}$

16. Ako je $f(x-1) = 2x-3$, odrediti $f(f(x^2-x+1))$
Rešenje:
Koristimo smenu: $x - 1 = t$
$x = t + 1$, onda je:
$f(t) = 2(t+1) - 3 = 2t - 1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$
Dalje imamo da je: $f(x^2 - x + 1) = 2(x^2 - x + 1) - 1 = 2x^2 - 2x + 1$
Dakle, $f(f(x^2-x+1)) = f(2x^2-2x+1) = 2(2x^2-2x+1)-1 = 4x^2-4x+1$