

Испит из Увода у статистику
септембар 2018.

1. Нека је дат прост случајан узорак X_1, X_2, \dots, X_n .

а) Како изгледа тест Колмогоров-Смирнова за тестирање нулте хипотезе да је полазни узорак са функцијом расподеле F_0 ? (3)

б) Показати да расподела статистике под нултом хипотезом, не зависи од F_0 . (4)

в) Одредити вредност тест статистике ако је реализација узорка 0.9, 0, 0.5, 0.2, а $F_0(x) = x$, за $x \in [0, 1]$ (функција расподеле $\mathcal{U}[0, 1]$). (3)

2. Нека је $Y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ прост линеарни модел.

а) Претпоставимо да је $\{\varepsilon_i\}$ низ независних случајних величина са нормалном $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$? Коју расподелу има Y_i ? (2)

б) Извести формуле за оцене \hat{a} , \hat{b} и $\hat{\sigma}^2$ методом максималне веродостојности. (7)

в) Испитати непристрасност и постојаност оцене \hat{a} . (3 + 3)

г) Наћи $\beta\%$ интервал поверења за средњу вредност зависне променљиве када је вредност предиктора x_0 ? (5)

д) Како бисте тестирали нулту хипотезу $H_0 : b = 0$? (4)

3. Нека је X_1, X_2, \dots, X_n прост случајан узорак из униформне $\mathcal{U}[0, \theta]$.

а) Оценити θ методом момената и испитати непристрасност и постојаност оцене. (5)

б) Претпоставите да имате додатну информацију о параметру θ да је већи од 1. Да ли се оцена методом максималне веродостојности, на основу истог узорка, мења? (5)

в) Претпоставите да на располагању, уместо датог узорка имате информацију за сваки од елемената, да ли је већи од 1? Како бисте на основу тог "новог узорка" добили оцену непознатог параметра θ ? (5)

4. Дат је узорак

вредност	1	2	3	4	5	6	7	8
број реализација	5	12	13	16	24	22	4	4

Са прагом значајности $\alpha = 0.05$, користећи χ^2 тест, тестирати хипотезу да је дати узорак из расподеле

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{array} \right).$$

(8)

5. Сваки од 51 голфера је опробао по три лоптице од два нова брэнда X и Y . Нека су X_i и Y_i просек пређеног растојања од првог, односно другог брэнда за сваког од голфера $i = 1, \dots, 51$. Нека је $W_i = X_i - Y_i$, добијени су следећи подаци: $\bar{w} = 2.07$, $\bar{s}^2 = 84.63$.

а) Са прагом значајности $\alpha = 0.01$ спровести тестирање хипотезе да лоптице брэнда X даље лете. (4)

б) Показати да за функцију моћи теста из дела под а) важи да за $\mu > 0$, $M(\mu) \rightarrow 1$, кад $n \rightarrow \infty$. (4)

Напомена: Израда задатака траје 150 минута. Максималан број поена на испиту је 65.

Сваки тачно урађен део задатка вреди онолико поена колико је написано. Да би се добили поени није довољно да само коначан резултат буде тачан већ је потребно објаснити поступак решавања, односно образложити одговор. У случају нетачног или недовршеног решења, могуће је деоно бодовање уколико је поступак решавања исправан и образложен. Нечитки одговори неће бити бодовани. Потписане текстове задатака треба предати.