Prof. Dr Milan Merkle

Primeri teorijskih pitanja za test osnovnog znanja

1) Slučajni vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ima raspodelu P_θ sa gustinom f_θ, gde je θ parametar. Definisati pojam dovoljne statistike i navesti potreban i dovoljan uslov da $S = S(\mathbf{X})$ bude dovoljna statistika (teorema o faktorizaciji). Ako su $X_i \sim \mathcal{N}(1, \theta)$ nezavisne slučajne promenljive, primenom teoreme o faktorizaciji pokazati da statistika $\sum X_i^2$ nije dovoljna, a zatim naći dovoljnu statistiku.

2) Neka je U centrirana ocena parametra θ, $\mathrm{E}\, U = \theta$, i neka je S dovoljna statistika za parametar θ. Pokazati da varijansa ocene $V = \mathrm{E}\,(U \mid S)$ nije veća od varijanse ocene U. Pokazati na primeru kako se ovaj rezultat može iskoristiti za dobijanje centriranih ocena sa minimalnom varijansom. Zašto se postavlja uslov da je S dovoljna statistika?

3) Objasniti metod maksimalne verodostojnosti za ocene parametara u slučaju proizvoljnog uzorka (ne obavezno nezavisnog). Šta se podrazumeva pod jednačinama verodostojnosti? Objasniti osobine asimptotske normalnosti i asimptotske efikasnosti (bez dokaza).

4) Definisati pojmove: a) interval verodostojnosti (u klasičnoj statistici) i b) interval pokrivanja (u Bajesovskoj statistici) i objasniti razlike u interpretaciji ova dva intervala.

5) Ako su $X_1, \ldots X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa istom (neprekidnom) raspodelom, definisati pojam ranga (R_i), a zatim naći raspodelu slučajnog vektora $(R_1, \ldots, R_n)$. Zasto se ovde pretpostavlja da je raspodela neprekidna?

6) Statističar je dobio novčić od 10 dinara sa zadatkom da odredi nepoznatu verovatnoću padanja pisma p. U tom cilju statističar baca novčić n puta. Opisati šta je ovde uzorak $(X_1, \ldots, X_n)$ (tj. kako se definišu X_i), šta je funkcija verodostojnosti i kako se dobija ocena za p metodom maksimalne verodostojnosti (OMV). Zatim izvesti interval poverenja za veliko n koristeći se osobinom asimptotske normalnosti OMV.

7) Statističar je dobio novčić od 10 dinara sa zadatkom da odredi nepoznatu verovatnoću padanja pisma p. U tom cilju statističar baca novčić n puta. Uzimajući da p ima apriornu raspodelu koja je uniformna na $(0, 1)$, naći ocenu parametra p kao modu aposteriorne raspodele za $p|X$, gde je X slučajna promenljiva koju treba definisati.

8) Polazeći od osobine asimptotske normalnosti ocene maksimalne verodostojnosti izvesti formulu za 95% interval poverenja u slučaju skalarnog parametra θ.

9) Slučajna promenljiva X ima raspodelu sa gustinom $f(x|\theta)$, gde je θ diskretni parametar koji uzima vrednosti u skupu $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Ako je apriorna raspodela za θ data zakonom raspodele $P(\theta = k) = p_k$, $k = 0, 1, \ldots$, naći aposteriornu raspodelu za $\theta|X$. (Razmotriti i obrnut slučaj, kad je $X|\theta$ diskretna, a θ neprekidna).

10) Neka je θ skalarni parametar, $\theta \in (0, +\infty)$. Pomoću statistike S testira se hipoteza $H_0 : \ \theta = 1$ protiv alternativne hipoteze $H_1 : \ \theta > 1$, sa nivoom značajnosti 3%. Oblast odbacivanja je oblika $S > c$. a) Kako bi se u ovom primeru našla značajnost (p-vrednost) za $S = 7$ (napisati izraz koji kad se izračuna daje p-vrednost) ? b) Ako je pri $S = 7$ značajnost jednaka 0.024, da li odbacujemo hipotezu H_0? c) Ako je realizovani 97% interval poverenja za θ jednak $(0.5, +\infty)$, da li odbacujemo H_0? Obrazložiti odgovore.