Домаћи из случајних процеса,
Математички факултет, мај 2016.

1. Нека је $\{W(t), t \geq 0\}$ стандардан Винеров процес.
а) Нека је a позитивна константа и нека су X и Y случајне величине дате са:

$$X = \min\{t : W(t) = a\}, \quad Y = \min\{t : t > X, W(t) = 0\}.$$

Одредити густину расподеле случајне величине Y.
б) Нека је b позитивна константа. Одредити функцију и густину расподеле случајне величине која представља најмању нулу Винеровог процеса која је већа од b.
2. Нека су X_j, $j \in \mathbb{Z}$, независне случајне величине са расподелом вероватноће:

$$X_j : \begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

при чему је $a \neq b$, $p, q > 0$, $p + q = 1$. Нека је $Y_n = i$ ако су све случајне величине $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-i+1}$ узеле исту вредност, а различиту од оне коју је узела случајна величина X_{n-i}, $n \in \mathbb{N}$. Ако је $X_n = X_r$ за свако $r \leq n$, $r \in \mathbb{Z}$, онда је $Y_n = 0$.
а) Одредити закон расподеле и мат. очекивање случајне величине Y_n.
б) Испитати да ли је случајан низ $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ слабо стационаран.
3. Нека је X има равномерну расподелу на сегменту $[0,1]$ и нека је $\mathbf{Y} := \{Y(t), t \in [0,1]\}$ случајан процес дефинисан са $Y(t) = \min\{t, X\}$. Испитати да ли је случајан процес $\{Y'(t), t \in [0,1]\}$ ($Y'(t)$ је L^2-извод процеса $\mathbf{Y}$ у тачки t):
а) L^2-непрекидан
б) L^2-диференцијабилан.