LSM

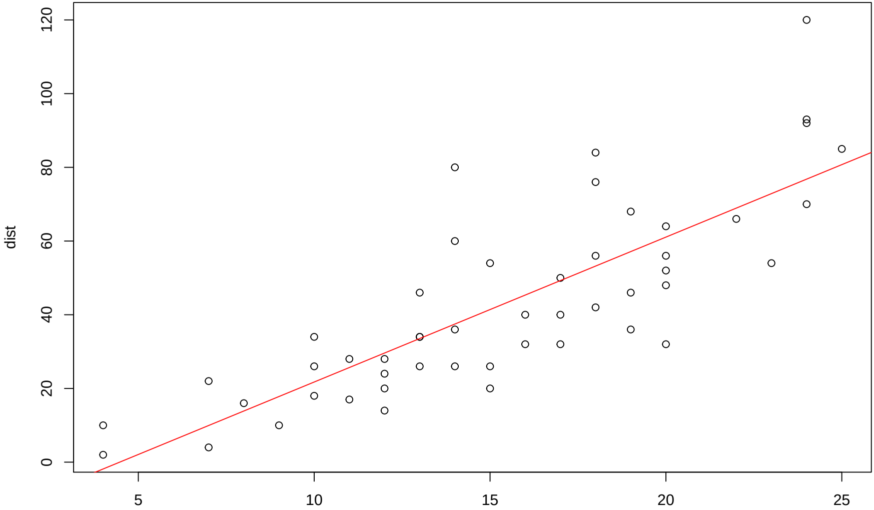
Bojana Milošević

10/6/2019

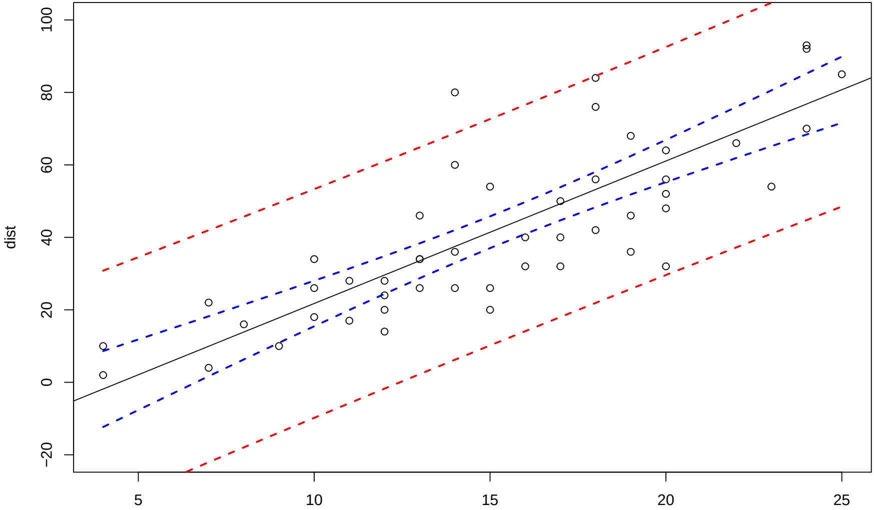
Primer

```
##    speed dist
## 1      4    2
## 2      4   10
## 3      7    4
## 4      7   22
## 5      8   16
## 6      9   10
## 7     10   18
## 8     10   26
## 9     10   34
## 10    11   17
```

Primer



Intervali poverenja



Koliko je model dobar?

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$SSTO = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$SSTO = SSE + SSR$$

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SSTO}$$

Primer

```r
summary(model)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = dist ~ speed, data = cars)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -29.069  -9.525  -2.272   9.215  43.201
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -17.5791     6.7584  -2.601   0.0123 *
## speed         3.9324     0.4155   9.464 1.49e-12 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 '
##
```

Višestruka linearna regresija

$$Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

ili

$$Y_i = \beta_0 + \beta 1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Matrični zapis

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix},$$

ili

Matrični zapis

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1^T \\ 1 & x_2^T \\ \vdots & \\ 1 & x_n^T \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix},$$

Polazne pretpostavke

- $E(\varepsilon) = 0$
- $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$
- X i ε su nezavisni slučajni vektori
- $\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 I)$

Primer - ANOVA

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{element uzorka je iz prve kategorije} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Primer - polinomijalni model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Ocenjivanje parametara modela

- metod najmanjih kvadrata

$$\hat{\beta} := \arg \min_{b \in R^{p+1}} \|Y - Xb\|^2.$$

Ukoliko je $R(X) = p + 1$ onda je $X^T X$ invertibilna i dobija se da je

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Ocenjena vrednost zavisne promenljive je tada

$$\hat{Y} = X(X^T X)^{-1} X^T Y = HY$$

VAŽNO - matrično diferenciranje

Matrično diferenciranje

Neka je X $n \times p$ matrica i f skalarna funkcija. Tada je

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} := \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_{ij}}\right)$$

- $\frac{\partial a^T x}{\partial x} = a = \frac{\partial x^T a}{\partial x}$
- $\frac{\partial x^T x}{\partial x} = 2x$
- $\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = (A + A^T)x$
- $\frac{\partial x^T A y}{\partial x} = Ay$

Minimiziramo
$S(\beta) = (Y - X\beta)^T(Y - X\beta) = Y^TY - \beta^TX^TY - Y^TX\beta + \beta^TX^TX\beta$

Uz odgovarajuće uslove regularnosti minimum se postiže u tački koja je rešenje jednačine

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 0$$

odnosno

$$-X^TY - X^TY + 2X^TX\beta = 0$$

Osobine ocene

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Ocenjena vrednost zavisne promenljive (očekivane vrednosti) je tada

$$\hat{Y} = X(X^T X)^{-1} X^T Y = HY$$

- H je projektor
- $(Y - HY)^T X = 0$ reziduali $e = Y - HY$ su ortogonalni na ravan određenu sa X

VAŽNO

Neka je X - slučajni vektor. Tada je

- $EAX = AEX$
-

$$
\begin{aligned}
Cov(X) &= E(X-EX)(X-EX)^T \\
&= \begin{pmatrix} Cov(X_1,X_1) & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(X_k,X_1) & Cov(X_k,X_2) & \cdots & Cov(X_k,X_k) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- $Cov(AX) = ACov(X)A^T$

Osobine ocene

- $E(\hat{\beta}) = \beta$
- $C(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1}\sigma^2$
- Ukoliko $tr((X^T X)^{-1}) \to 0$, kad $n \to \infty$ $\hat{\beta}$ je postojana ocena parametra β.
- Domaći: ako su prediktori međusobno ortogonalni onda se ocena za β poklapa sa ocenom koja se dobija jednostrukim regresijama.
- Ocenjena srednja vrednost je $\hat{Y} = X\hat{\beta} = HY$, gde je $H = X(X^T X)^{-1} X^T$
- $E(\hat{Y}) = X\beta$ i $Cov(\hat{Y}) = \sigma^2 X(X^T X)^{-1} X^T = \sigma^2 H$

Reziduali modela

- $e = Y - \hat{Y} = \underbrace{(I - H)}_{M} Y = M\varepsilon$
- $E(e) = 0$ i $Cov(e) = \sigma^2 M$

Ocena za σ^2

- $SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e^T e = \varepsilon^T M \varepsilon$
- $E(SSE) = \sum_i m_{ii} E(\varepsilon_i^2) + \sum_i m_{i \neq j} E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sigma^2 tr(M) = \sigma^2(n - tr(H)) = \sigma^2(n - R(H)) = \sigma^2(n - p - 1)$
- Poslednje važi jer je H projektor i tada je $tr(H) = R(H)$

Koeficijent determinacije

- $SSTO = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 = Y^T Y - \frac{1}{n} Y^T J Y$
- $SSR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = Y^T(H - \frac{1}{n}J)Y$
- $SSE = Y^T(I - H)Y$
- $SSTO = SSE + SSR$
- $R^2 = 1 - \frac{SSE}{SSTO}$

Teorema Gaus-Makova

Neka je $\hat{\beta}$ ocena metodom najmanjih kvadrata, i $L^T\beta$ linearna transformacija parametara β koju želimo da ocenimo. Neka je AY neka druga linearna nepristrasna ocena za $L^T\beta$. Tada je matrica $Cov(AY) - Cov(L^T\hat{\beta})$ pozitivno definitna.

- Posledica: Od svih linearnih ocena za $a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + \cdots + a_p\beta_p$ koje su nepristrasne, najmanju disperziju ima $a_0\hat{\beta}_0 + a_1\hat{\beta}_1 + \cdots + a_p\hat{\beta}_p$, gde su ocene koeficijenata dobijene metodom najmanjih kvadrata.