Фјучерсне опције

Бојана Милошевић

Универзитет у Београду,
Математички факултет

Београд

- Трговина а се одвија на берзама и уговорене стране су познате јавности;
- Могу се реализовати на два начина:
  - инвеститор који заузима дугу позицију чека датум доспећа фјучерса и купује активу по условима наведеним у уговору;
  - пре датума доспећа заузима кратку позицију у фјучерсу на исту активу и са истим датумом доспећа – неутралисање
- Датум доспећа код њих није потпуно одређен, већ се одређује месец испоруке;
- Дневно усклађивање рачуна маргина код фјучерс уговора
  - сваког дана се одређује одговарајућа фјучерсна цена;
  - иницијална маргина;
  - рачун маргине се дневно ребалансира у складу са добитком или губитком инвеститора који настаје због промене фјучерсне цене на тржишту;
  - маргина одржавања, рачун маргине се допуњава делом суме-маргина варирања
  - Уколико инвеститор не обезбеди маргину варирања, брокер ликвидира његову позицију у фјучерсу;

Шта се дешава уколико дође до пада фјучерсне цене након склапања уговора?

Шта се дешава уколико дође до пада фјучерсне цене након склапања уговора?
ДУГА ПОЗИЦИЈА: инвеститор је на губитку, јер се обавезао да ће купити активу по уговореној цени која је сада виша од фјучерсне цене, тако да се његов рачун маргине смањио за разлику фјучерсне цене и уговорене цене. Због тога брокер мора платити губитак који клириншка кућа прослеђује брокеру инвеститора који заузима кратку позицију.
Рачуни маргина оба инвеститора на крају сваког трговачког дана се мењају до датума доспећа

Претпоставимо да је инвеститор заузео 5 кратких позиција у фјучерсима на сребро, по фјучерсној цени $19.97\ USD$ за унцу. Фјучерс гласи на $5000\ oz$ сребра, иницијална маргина је $1000\ USD$, а маргина одржавања $750\ USD$.

- иницијална маргина: $5 \cdot 1000 = 5000\ USD$

  маргина одржавања: $5 \cdot 750 = 3750$

  - дан након склапања уговора цена је $20\ USD$ за унцу-» губитак $0.03 \cdot 5000 = 150$ по фјучерсу-»укупно: $750\ USD$ -» рачун маргине: $4250\ USD$ -» рачун маргине инвеститора са дугом позицијом 5750 -» нема позива за допуном
  - други дан цена је $20.15\ USD$ за унцу -» рачун инвеститора се поново умањује и износи 500 -» инвеститору се упућује позив да допуни рачун маргине из маргине варирања сумом од $4500\ USD$
  - трећег дана фјучерсна цена $19.95\ USD$ за унцу -» добитак 5000 -» ликвидира позицију и узима 10000

- након ликвидирања позиције даје инвеститор има добитак од $500\ USD$ што је исто што и $(19.97 - 19.95) \cdot 5000 \cdot 5$.

- уговор којим се стиче право, али не и обавеза да се потпише фјучерсни уговор, по договореним условима;
- фјучерсна кол опција је право да се заузиме дуга позиција у фјучерсу;
- фјучерсна пут опција је право да се заузме кратка позиција у фјучерсу;
- европске и америчке (најчешће)
- датум доспећа је у близини реализације фјучерса

Претпоставимо да имамо фјучерсну кол опцију чији је датум доспећа T на фјучерс уговор са датумом доспећа у тренутку T_1, $T \leq T_1$. Нека је уговорена цена фјучерсне опције K, која њеном реализацијом постаје уговорена цена фјучерс уговора на који она гласи.
F_t - фјучерсна цена уговора на који се опција односи у тренутку $t, t \leq T_1$.

- Ако је цена фјучерс уговора у тренутку T мања од уговорене цене опције K на тај уговор ($F_T < K$), вредност опције је нула
- $F_T > K$-» потписујемо уговор са фјучерсном ценом K -» профит $F_T - K$
- вредност кол опције у тренутку T је $\max\{F_T - K, 0\}$
- вредност пут опције у тренутку T је $\max\{K - F_T, 0\}$

Претпоставке:

- не постоје трошкови новчаних трансакција,
- све подлеже истој каматној стопи,
- позајмице и улози у банку имају исту каматну стопу и увек можемо да купимо или продамо опцију или финансијски инструмент на који се она односи по тржишној цени,
- не постоји арбитража - прављење сигурног профита без ризика.

Теорема

Граница цене европске куповне фјучерсне опције у тренутку t су:

$$\max\{(F_t - K)e^{-r(T-t)}, 0\} \leq c_t \leq F_t e^{-r(T-t)}, t \leq T$$

Портфолио А:

- европска куповна фјучерсна опције са датумом доспећа у тренутку T,
- новац $Ke^{-r(T-t)}$

Вредност овог портфолија у тренутку t је: $\Pi_t^1 = c_t + Ke^{-r(T-t)}$
Портфолио Б:

- новац $F_t e^{-r(T-t)}$
- дуга позиција у фјучерсу истог типа као фјучерс на који гласи опција, осим што је његова уговорена цена F_t.

Вредност овог портфолија је $\Pi_t^2 = F_t e^{-r(T-t)}$

У тренутку T :
А:
- Ако je $F_T \geq K$, она се реализује и власник првог портфолија остварује наплату $F_T - K$
- $Ke^{-r(T-t)}$ нарасте до K
- $\Pi_T^1 = F_T$.
- Ако je $F_T < K$, куповна опција се неће реализовати. Вредност првог портфолија je $\Pi_T^1 = K$
Б:
- новац нарасте до F_t
- вредност дуге позиције у фјучерсу je $F_T - F_t$
- $\Pi_T^2 = F_T$

Теорема

Доња граница цене европске продајне фјучерсне опције има вредност:

$$p_t \geq \max\{(K - F_t)e^{-r(T-t)}, 0\}, t \leq T.$$

Претпоставимо да имамо европску куповну и подајну опцију са истом уговореном ценом K и временом доспећа T

$$c_t + Ke^{-r(T-t)} = p_t + F_t e^{-r(T-t)}$$

Портфолио А:

- европска куповна фјучерсне опције,
- новац $Ke^{-r(T-t)}$

Портфолио Б:

- европска продајна фјучерсна опција,
- дуга позицију у фјучерсу истог типа као фјучерс на који гласи опција, са уговореном ценом F_t,
- новац $F_t e^{-r(T-t)}$

У тренутку T:
Портфолио А:

$$\Pi_T^1 = \max\{F_T, K\}$$

Портфолио Б:
-Вредност дуге позиције у фјучерсу је $F_T - F_t$
- Ако је $F_T \geq K$, продајна опција из другог портфолија се неће реализовати, у супротном остварује се профит од $K - F_T$
- новац нарасте до F_t

$$\Pi_T^2 = \max\{F_T, K\}.$$

Нека је садашња цена фјучерс уговора F_0, а цену куповне фјучерсне опције са истеком T означићемо са f. Претпостављамо да током живота опције, цена фјучерса може да порасте са фактором $u > 1$ и износи $F_0 u$ или да опадне до $F_0 d$ са фактором $d < 1$

I начин:

- $f_u = \max\{uF_0 - K, 0\}$ $f_d = \max\{dF_0 - K, 0\}$
- $puF_0 + (1-p)dF_0 = F_0$
- $f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$

II начин:

- формирамо безризични портфолио који се састоји од
  - Δ фјучерс уговора које смо купили (заузели дугу позицију) и чија је тренутна цена F_0;
  - продали смо једну европску куповну опцију која се односи на фјучерсе (кратка позиција).
-
  - Ако фјучерсна цена порасте, куповна опција коју смо продали ће се активирати, а вредност дуге позиције у фјучерсу је $F_0 u - F_0$
  - Ако фјучерсна цена падне -» $(F_0 d - F_0)$
- $(F_0 u - F_0)\Delta - f_u = (F_0 d - F_0)\Delta - f_d$
- $\Delta = \frac{f_u - f_d}{F_0 u - F_0 d}$
- у почетном тренутку: $-f$, јер је добит од Δ фјучерс уговора у нултом тренутку је $F_0 - F_0 = 0$

$$-f = [(F_0 u - F_0)\Delta - f_u]e^{-rT}.$$

Пример

Претпоставимо да је тренутна цена фјучерса 30 и да ће или порасти на 33 или пасти на 28 током следећег месеца. Разматраћемо једномесечну куповну фјучерсну опцију са уговореном ценом 29. Ради једноставности у разматрање нећемо укључити дневно усклађивање рачуна маргина са тржишном ценом.

- $f_u = 3$ и $f_d = 0$
  $u = 33/30 = 1.1, d = 28/30 = 0.9333,\ r = 0.06, T = 1/12$
  $f_u = \max\{33 - 29, 0\} = 4, f_d = \max\{28 - 30, 0\} = 0$
- $p = \frac{1-0.9333}{1.1-0.9333} = 0.4.$
- $f = e^{-0.06 \cdot 1/12}[0.4 \cdot 4 + 0.6 \cdot 0] = 1.592.$

Теорема (Блек - Шолсова формула)

Цена куповне фјучерсне опције у тренутку 0 са уговореном ценом K, временом до истека T и безризичном каматном стопом r износи:

$$c = e^{-rT}[F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)],$$

где је

$$d_1 = \frac{\ln\frac{F_0}{K} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}, \; d_2 = \frac{\ln\frac{F_0}{K} - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

а $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ је функција расподеле стандардизоване нормалне случајне променљиве.

Скица доказа

- $$p = \frac{1-d}{u-d} \approx \frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} - \frac{\sigma^2 T}{2n}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{4}.$$
- $Y_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$
- фјучерсна цена у тренутку T:
$$F_T = F_0 u^{\sum_{i=1}^n Y_i} d^{n-\sum_{i=1}^n Y_i} = F_0 (\tfrac{u}{d})^{\sum_{i=1}^n Y_i} d^n.$$
- Добит од опције у тренутку T је:
$$\max\{F_0 (\frac{u}{d})^{\sum_{i=1}^n Y_i} d^n - K, 0\} = \max\{F_0 e^{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^n Y_i} e^{-\sigma\sqrt{nT}} - K, 0\}$$

Скица доказа – наставак

- $$c = e^{-rT}E(\max\{F_0e^W - K, 0)\}),$$

  где је W случајна променљива са расподелом $N(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T)$

Треба имати у виду да F_T имплицитно зависи и од времена истека фјучерс уговора T_1

Други приступ

$$f = e^{-rT} E(\max(F_T - K, 0)).$$

Како је вредност фјучерс уговора у тренутку T једнака $F_T = S_T e^{r(T_1 - T)}$, добијамо

$$\begin{aligned} f &= e^{-rT} e^{r(T_1 - T)} E \max(S_T - K e^{-r(T_1 - T)}, 0) \\ &= e^{-rT} e^{r(T_1 - T)} E \max(S_T - K e^{-r(T_1 - T)}, 0) \end{aligned}$$

У Блек-Шолсовом моделу добијамо

$$
\begin{aligned}
f &= e^{-rT} e^{r(T_1 - T)} E \max(S_T - K e^{-r(T_1 - T)}, 0) \\
&= e^{r(T_1 - T)} \Big(S_0 \Phi(d_1) - K e^{-r(T_1 - T)} e^{-rT} \Phi(d_2) \Big) \\
&= e^{r(T_1 - T)} \Big(S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT_1} \Phi(d_2) \Big) = e^{-rT} F_{0,T_1} \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2)
\end{aligned}
$$

где је

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\log \frac{S_0 e^{r(T_1 - T)}}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} \\
&= \frac{\log \frac{F_0}{K} + \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}} \\
d_2 &= \frac{\log \frac{F_0}{K} + \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}}
\end{aligned}
$$

За разлику од опција на фјучерсе код опција на форварде када се активирају, заузима се одговарајућа позиција у уговору али се не добија одмах новац. Нпр. уколико се ради о куповној опцији на куповни уговор њена вредност у тренутку T је

$$\max(F_T - K, 0) \cdot e^{-r(T_1 - T)}.$$