



# 1

## Семинарски рад из предмета Елементи финансијске математике



Студент:

Дајана Пановић  
Број индекса: 1020/2016

Маријана Палибрк  
Број индекса: 1064/2016

Ментор:

Бојана Милошевић

---

# Садржај

Садржај . . . . .	1
1 Увод . . . . .	2
2 Безбедни модели . . . . .	3
2.1 Телсеров критеријум . . . . .	4
2.1.1 Интуитивно решење . . . . .	6
2.1.2 Аналитичко решење . . . . .	7
2.2 Са имовином без ризика . . . . .	11
2.2.1 Интуитивно решење . . . . .	11
2.2.2 Аналитичко решење . . . . .	13
3 Елиптичке расподеле . . . . .	16
3.1 Примери елиптичких расподела . . . . .	18
3.1.1 Нормална расподела . . . . .	18
3.1.2 Студентова расподела (са $r$ степени слободе) . . . . .	19
3.1.3 Лапласова расподела . . . . .	20
3.1.4 Логистичка расподела . . . . .	20
3.2 Анализа односа средње вредности и дисперзије . . . . .	23
3.3 Телсеров приступ и елиптичке расподеле . . . . .	25
4 Пример . . . . .	27

# 1 УВОД

Увешћемо неке битне ознаке:

- $N$  број вредносних папира
- $C_0$  почетни капитал
- $C_{end}$  капитал на крају периода
- $R_p = \sum_{i=1}^N \theta_i R_i$  принос портфолија
- $\mu_p$  очекивани принос портфолија
- $\sigma_p$  дисперзија портфолија
- $\Sigma$  коваријациона матрица од  $r$
- $\theta_i$  сума новца у доларима уложена у  $i$ -ти вредносни папир, где је  $i \in \{1, \dots, N\}$
- $R_i$  принос новца од  $i$ -тог вредносног папира, где је  $i \in \{1, \dots, N\}$
- $\mu_i$  очекивани принос  $i$ -тог вредносног папира, где је  $i \in \{1, \dots, N\}$
- $\mu_f$  стопа приноса имовине без ризика
- $R_f$  принос имовине без ризика

## 2 Безбедни модели

Постоје три основна модела код којих је безбедност на првом месту. Ови модели су конструисани у педесетим и шездесетим и развијени су од стране Роја, Катаоке и Телсера. Сви они рукују са ограниченим капиталом, у ознаци  $C_L$ , што представља доњу границу за количину капитала на крају периода, у ознаци  $C_{end}$ .

**Рој** унапред одређује гранични капитал и минимизује вероватноћу да капитал на крају периода буде мањи или једнак ограниченом капиталу, па имамо

$$\min\{P(C_{end} \leq C_L)\}.$$

**Катаока** бира вредност  $\alpha$  (која представља малу вероватноћу) и максимизује гранични капитал при услову да вероватноћа да капитал на крају периода неће бити већи од граничног капитала буде мања или једнака од  $\alpha$

$$\max\{C_L \mid P(C_{end} \leq C_L) \leq \alpha\}$$

**Телсер** унапред одређује  $\alpha$  и гранични капитал  $C_L$  и максимизује очекивани капитал на крају периода при услову да вероватноћа да капитал на крају периода неће бити већи од граничног капитала буде мања или једнака од  $\alpha$

$$\max\{E(C_{end}) \mid P(C_{end} \leq C_L) \leq \alpha\}$$

Телсеров портфолио је интуитивно најлогичније решење за налажење оптималног портфолија из разлога што већина инвеститора жели да максимизује очекиване приносе на чему се овај модел и заснива.

## 2.1 Телсеров критеријум

Сада ћемо се више посветити Телсеровом моделу.

Нека је

$$C_{end} = C_0 + R_p,$$

где је  $C_0$  ознака за почетни капитал и  $R_p$  принос портфолија на крају периода, и још претпоставимо да је гранични капитал једнак нули, тада имамо

$$\max\{E(C_0 + R_p) \mid P(C_0 + R_p \leq 0) \leq \alpha\},$$

где је  $P(C_0 + R_p \leq 0)$  вероватноћа мањка, то јест, вероватноћа да ће инвеститор изгуби сав уложен новац.

Ако узмемо да је

$$E(C_0 + R_p) = C_0 + \mu_p,$$

где је  $\mu_p = E(R_p)$  очекивани принос, морамо увести нова ограничења за почетни капитал и очекивани принос портфолија:

$$C_0 = \sum_{i=1}^N \theta_i, \quad \mu_p = \sum_{i=1}^N \mu_i \theta_i.$$

Сад имамо

$$\max \left\{ \mu_p \mid P(R_p \leq -C_0) \leq \alpha, C_0 = \sum_{i=1}^N \theta_i, \mu_p = \sum_{i=1}^N \mu_i \theta_i \right\},$$

односно

$$\max \left\{ \mu_p \mid \mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p, C_0 = \bar{1}\theta, \mu_p = \mu^T \theta \right\}.$$

Како бисмо поједноставили рачун, претпоставимо да је принос портфолија нормално расподељен, то јест,  $R_p \sim \mathcal{N}(\mu_p, \sigma_p)$ , то значи да важи следеће:

$$P(R_p \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_p}{\sigma_p}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \equiv \Phi\left(\frac{x-\mu_p}{\sigma_p}\right),$$

---

$$\Phi\left(\frac{x - \mu_p}{\sigma_p}\right) \leq \alpha \Rightarrow \frac{x - \mu_p}{\sigma_p} \leq k_\alpha$$
$$\mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p,$$

где  $k_\alpha$  представља квантил нормалне расподеле са нивоом поверења  $\alpha$ .

*Напомена:* Једначину  $\mu_p = -C_0 - k_\alpha \sigma_p$  називамо линијом мањка. Коефицијент линије мањка,  $k_\alpha$ , је негативан за  $\alpha \leq 0.5$ .

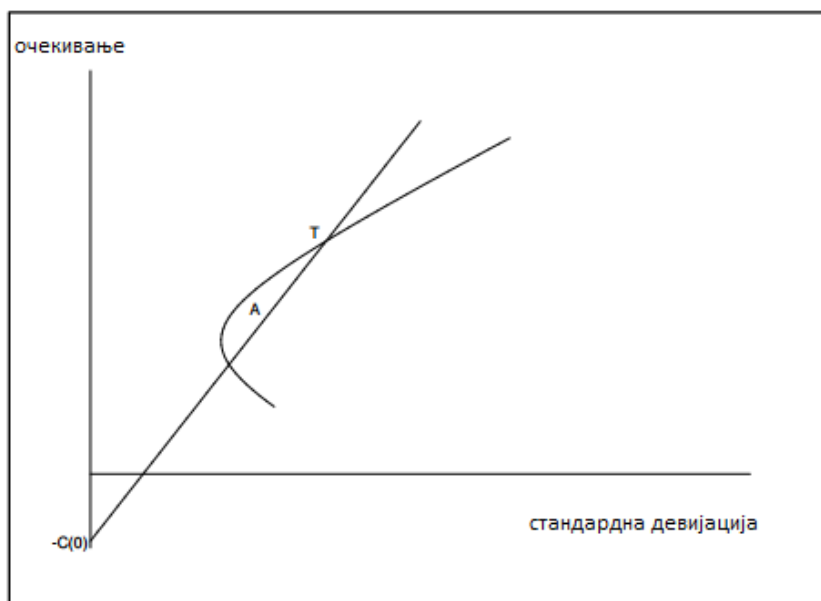
Како нам се у условима појавила дисперзија приноса портфолија, морамо увести ограничење и за њу, па систем постаје:

$$\max \left\{ \mu_p \mid \mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p, C_0 = \bar{1}\theta, \mu_p = \mu^T \theta, \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \right\}.$$

Постоје два приступа за решавање овог проблема, интуитивно и аналитичко.

## 2.1.1 Интуитивно решење

Прво ћемо интуитивно решити проблем. Последња три ограничења нам дају ефикасну границу и област десно од ње, а прво ограничење праву  $\mu_p = -C_0 - k_\alpha \sigma_p$  и област лево од ње. Сва ограничења дају област  $A$ , представљену на следећој скици:



Циљ је да максимизујемо очекивани повратак, па морамо пронаћи максималну вредност  $\mu_p$  у области  $A$ . Тражена тачка је тачка  $T$  са слике, што је пресечна тачка линије мањка и ефикасне границе.

Изједначавањем једначине за ефикасну границу,

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2),$$

са једначином за линију мањка

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{-C_0 - \mu_p}{k_\alpha}\right)^2$$

добијамо вредност очекиване добити у тачки  $T$ , и она гласи

$$\mu_T = \frac{bk_\alpha^2 + d + \sqrt{dk_\alpha^2(a + 2b + c - k_\alpha^2)}}{ck_\alpha^2 - d} C_0,$$

па можемо израчунати и стандардну девијацију у тачки  $T$ :

$$\sigma_T = \frac{-C_0 - \mu_p}{k_\alpha} = \frac{(c + b)k_\alpha^2 + \sqrt{dk_\alpha^2(a + 2b + c - k_\alpha^2)}}{(d - ck_\alpha^2)k_\alpha} C_0.$$

Вектор  $\theta_T$ , количине уложене у сваку појединачну имовину у Телсеровој оптималној тачки, може да се изрази користећи формулу за  $\theta$  портфолија који се налази на ефикасној граници

$$\theta_T = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((a\bar{1} - b - \mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\mu_T).$$

## 2.1.2 Аналитичко решење

Како бисмо показали тачност решења добијеног интуитивним приступом користећемо Кун-Такер-ов метод који ради исто као и Лагранжев метод само се користи када услови нису линеарни.

Квадрирањем првог услова добијамо:

$$\mu_p + C_0 \geq -k_\alpha \sigma_p \Rightarrow \mu_p^2 + 2\mu_p C_0 + C_0^2 \geq k_\alpha^2 \sigma_p^2.$$

Како је

$$C_0 = \bar{1}\theta, \quad \mu_p = \mu^T \theta, \quad \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta,$$

имамо да важи

$$\theta^T \mu \mu^T \theta + 2\theta^T \mu \bar{1} \theta + \theta^T \bar{1} \bar{1}^T \theta \geq k_\alpha^2 \theta^T \Sigma \theta$$

$$\theta^T [(\mu + \bar{1})(\mu + \bar{1})^T - k_\alpha^2 \Sigma] \theta \geq 0$$

$$\theta^T \Psi \theta \geq 0$$

Ради лакшег рачуна уводимо следеће ознаке:

$$\Psi \equiv (\mu + \bar{1})(\mu + \bar{1})^T - k_\alpha^2 \Sigma \quad (*)$$



$$\begin{aligned}
a' &\equiv \mu^T \Psi^{-1} \mu \\
b' &\equiv \mu^T \Psi^{-1} \bar{1} \equiv \bar{1}^T \Psi^{-1} \mu \\
c' &\equiv \bar{1}^T \Psi^{-1} \bar{1} \\
d' &= a' c' - b'^2
\end{aligned}$$

где је  $\Psi$  матрица  $n \times n$ . Претпоставимо да је инвертибилна. Покажимо још и да је симетрична

$$\begin{aligned}
\Psi^T &= [(\bar{1} + \mu)(\bar{1} + \mu)^T - k\alpha^2 \Sigma]^T \\
&= [(\bar{1} + \mu)^T]^T (\bar{1} + \mu)^T - k\alpha^2 \Sigma^T \\
&= (\bar{1} + \mu)(\bar{1} + \mu)^T - k\alpha^2 \Sigma \\
&= \Psi
\end{aligned}$$

Сада ћемо наћи везу између  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$  и  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , тако што ћемо израз (\*) помножити са леве стране са матрицом  $\Psi^{-1}$  и са десне стране са  $\Sigma^{-1}$ , чиме добијамо израз

$$\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1}(\bar{1}\bar{1}^T + \bar{1}\mu^T + \mu\bar{1})\Psi^{-1} - k_\alpha^2 \Psi^{-1},$$

одатле изразимо

$$\begin{aligned}
a &= \mu^T \Sigma^{-1} \mu = (a + b)(a' + b') - k_\alpha^2 a', \\
b &= \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu = (b + c)(a' + b') - k_\alpha^2 b', \\
c &= \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1} = (b + c)(b' + c') - k_\alpha^2 c'.
\end{aligned}$$

Решавањем система са три једначине и три непознате добијамо:

$$\begin{aligned}
a' &= \frac{ak_\alpha^2 - d}{k_\alpha^2(a + 2b + c - k_\alpha^2)}, \\
b' &= \frac{bk_\alpha^2 + d}{k_\alpha^2(a + 2b + c - k_\alpha^2)}, \\
c' &= \frac{ck_\alpha^2 - d}{k_\alpha^2(a + 2b + c - k_\alpha^2)},
\end{aligned}$$

$$d' = \frac{-d}{k_\alpha^2(a + 2b + c - k_\alpha^2)},$$

где  $d'$  мора бити мање од нуле како би постојало оптимално решење ( $d > 0$ ,  $|k_\alpha| < \sqrt{a + 2b + c}$ ).

Па се наш проблем своди на решавање проблема

$$\max \left\{ \mu^T \theta \mid -\theta^T \Psi \theta \leq 0, \bar{1}^T \theta - C_0 = 0 \right\}$$

које решавамо Кун-Такеровим условима:

$$\begin{cases} \mu - 2\lambda_1 \Psi \theta + \lambda_2 \bar{1} = 0 & (1) \\ -\theta^T \Psi \theta \leq 0 & (2) \\ \bar{1}^T \theta - C_0 = 0 & (3) \\ -\lambda_1 \theta^T \Psi \theta = 0 & (4) \\ \lambda_1 \leq 0 & (5) \end{cases}$$

Прво претпоставимо да је  $\lambda_1 = 0$ , из услова (1) имамо да је

$$\mu + \lambda_2 \bar{1} = 0$$

одакле је  $\mu$  константни вектор, што је супротно од претпоставке, па је  $\lambda_1 \neq 0$ . Требало би још показати и да је  $\lambda_1 < 0$ .

Из услова (1) имамо да је

$$\theta = \frac{1}{2\lambda_1} (\lambda_2 \Psi^{-1} \bar{1} + \Psi^{-1} \mu),$$

и како је  $\lambda_1 \neq 0$ , из услова (4) имамо да је

$$\theta^T \Psi \theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1^2} (c' \lambda_2^2 + 2b' \lambda_2 + a') = 0$$

односно

$$c' \lambda_2^2 + 2b' \lambda_2 + a' = 0$$

па одатле имамо да је

$$\lambda_2 = -\frac{b'}{c'} \pm \frac{1}{c'} \sqrt{-d'},$$

видимо да  $d'$  мора бити мање од нуле да бисмо имали решење.

На основу услова (3) и претходно израчунатог  $\theta$  имамо да важи

$$\frac{1}{2\lambda_1}(\lambda_2 \bar{1}^T \Psi^{-1} \bar{1} + \bar{1}^T \Psi^{-1} \mu) - C_0 = \frac{1}{2\lambda_1}(c' \lambda_2 + b') - C_0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{c' \lambda_2 + b'}{2C_0} = \pm \frac{1}{2C_0} \sqrt{-d'},$$

како имамо да је  $\lambda_1 \neq 0$  и  $\lambda_1 < 0$  тада је

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2C_0} \sqrt{-d'}, \quad \lambda_2 = \frac{-b' - \sqrt{-d'}}{c'}.$$

На основу претходног добијамо да је

$$\theta_T = \frac{C_0}{\sqrt{-d'}} \left( \frac{b' + \sqrt{-d'}}{c'} \Psi^{-1} \bar{1} + \Psi^{-1} \mu \right)$$

$$\mu_T = \mu^T \theta_T = \frac{b' + \sqrt{-d'}}{c'} C_0 = \frac{bk_\alpha^2 + d + \sqrt{dk_\alpha^2(a + 2b + c - k_\alpha^2)}}{ck_\alpha^2 - d} C_0$$

$$\theta_T = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((a\bar{1} - b - \mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\mu_T)$$

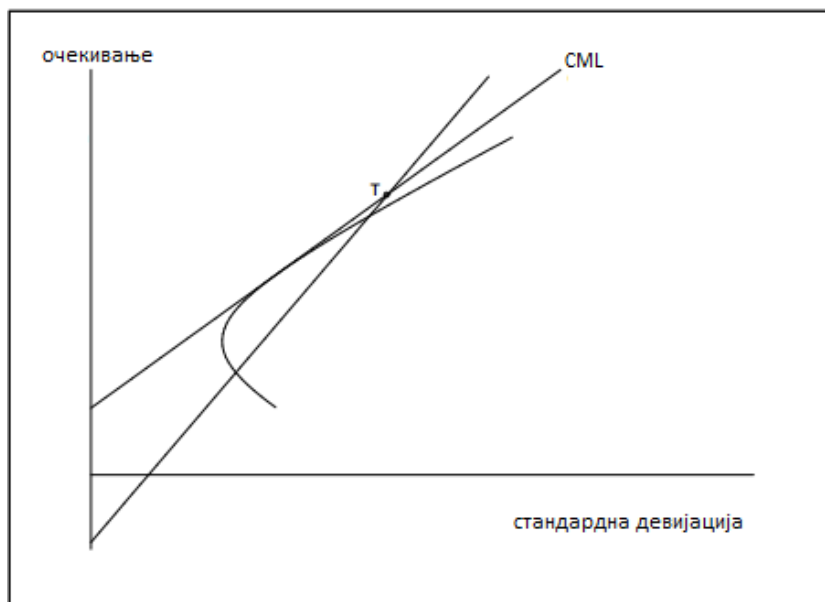
## 2.2 Са имовином без ризика

Ако додамо имовину без ризика, ефикасна граница се мења у  $CML$ , то је линија која показује линеарну комбинацију имовине без ризика и тржишног портфолија.

Поново, прво решавамо интуитивно, а затим разматрамо аналитичко решење.

### 2.2.1 Интуитивно решење

Као и у претходном делу, тражимо максималну вредност за  $\mu_p$  у области испод  $CML$  и изнад линије мањка. Са слике видимо да је то вредност у тачки  $T$ .



Да би се израчунала тачка пресека, изједначићемо формуле обе линије

$$(\sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a})\sigma_p + C_0\mu_f = C_0 - k_\alpha\sigma_p,$$

и тако долазимо до

$$\sigma_T = \frac{-1 - \mu_f}{k_\alpha + \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}} C_0 = \frac{-1 - \mu_f}{s + k_\alpha} C_0,$$

где дефинишемо  $s \equiv \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$ , нагиб  $CML$ -а.

Одговарајућа средња вредност се може наћи коришћењем једначине линије мањка (могли смо и коришћењем  $CML$ -а):

$$\mu_T = -C_0 - k_\alpha \sigma_T = -C_0 - k_\alpha \frac{-1 - \mu_f}{s + k_\alpha} C_0 = \frac{\mu_f k_\alpha - s}{s + k_\alpha} C_0.$$

Сада хоћемо да израчунамо одговарајуће вредности за  $\theta$ .

Претпоставимо да је  $\Theta_m$  тежина тржишног портфолија и  $\Theta_f$  тежина имовине без ризика, па имамо да је принос портфолија

$$R_p = \Theta_m R_m + \Theta_f R_f = \Theta_m R_m + \Theta_f C_0 \mu_f$$

$$\Theta_m + \Theta_f = 1.$$

Очекивана вредност портфолија је

$$\mu_p = \Theta_m \mu_m + \Theta_f C_0 \mu_f,$$

а дисперзија портфолија

$$\sigma_p^2 = \Theta_m^2 D(R_m) + \Theta_f^2 D(R_f) + 2\Theta_m \Theta_f \text{cov}(R_m, R_f) = \Theta_m^2 \sigma_m^2,$$

па је

$$\sigma_p = \Theta_m \sigma_m.$$

Посматраћемо средњу вредност и стандардну девијацију у тачки  $T$

$$\mu_p = \Theta_m \mu_m + \Theta_f C_0 \mu_f, \quad \sigma_p = \Theta_m \sigma_m \quad (**).$$

Из друге једначине (\*\*) видимо да је

$$\Theta_m = \frac{\sigma_T}{\sigma_m},$$

како имамо изразе и за  $\sigma_T$  и  $\sigma_m$  имамо да је

$$\Theta_m = \frac{(1 + \mu_f)(c\mu_f - b)}{(s + k_\alpha)s}.$$

Користећи прву једначину (\*\*) можемо израчунати и тежину имовине уложену у имовину без ризика

$$\Theta_f = \frac{\mu_T - \Theta_m \mu_m}{C_0 \mu_f}.$$

а како имамо изразе за  $\mu_f$ ,  $\Theta_m$ ,  $\mu_m$  имамо да је

$$\Theta_f = \frac{a + b - (b + c)\mu_f + k_\alpha s}{s(s + k_\alpha)}.$$

Можемо да проверимо резултат:

$$\Theta_m + \Theta_f = \frac{(1 + \mu_f)(c\mu_f - b) + a + b - (b + c)\mu_f + k_\alpha s}{s(s + k_\alpha)} = 1.$$

Укупне количине уложене у сваки портфолио

$$\theta_T = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \\ \theta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_m \theta_m \\ \Theta_f C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \mu_f}{s(s + k_\alpha)} \Sigma^{-1} (\mu_f \bar{1} - \mu) C_0 \\ \frac{a + b - (b + c)\mu_f + k_\alpha s}{s(s + k_\alpha)} C_0 \end{pmatrix}$$

## 2.2.2 Аналитичко решење

Додавањем имовине без ризика, решавамо проблем

$$\max \left\{ \mu_p \mid \mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p, \Theta_m + \Theta_f = 1, \mu_p = \Theta_m \mu_m + \Theta_f C_0 \mu_f, \sigma_p = \Theta_m \sigma_m \right\}.$$

Користећи

$$\begin{aligned} \Theta_m \mu_m + \Theta_f C_0 \mu_f &\geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p \\ \Theta_m (\mu_m + k_\alpha \sigma_m) + \Theta_f C_0 \mu_f + C_0 &\geq 0 \end{aligned}$$

добијамо проблем

$$\max \left\{ \Theta_m \mu_m + \Theta_f C_0 \mu_f \mid \Theta_m (\mu_m + k_\alpha \sigma_m) + \Theta_f C_0 \mu_f + C_0 \geq 0, \Theta_m + \Theta_f = 1 \right\}$$

који решавамо Кун-Такеровим условима:

$$\begin{cases} C_0 \mu_f - 2\lambda_1 C_0 \mu_f \lambda_2 = 0 & (1) \\ \mu_m + \lambda_1 (\mu_m + k_\alpha \sigma_m) + \lambda_2 = 0 & (2) \\ \Theta_m (\mu_m + k_\alpha \sigma_m) + \Theta_f C_0 \mu_f + C_0 \geq 0 & (3) \\ \Theta_m + \Theta_f = 1 & (4) \\ \lambda_1 (\Theta_m (\mu_m + k_\alpha \sigma_m) + \Theta_f C_0 \mu_f + C_0) = 0 & (5) \\ \lambda_1 \geq 0 & (6) \end{cases}$$

Претпоставимо да је  $\lambda_1 = 0$ , тада из услова (1) и (2) следи да је

$$C_0 \mu_f = \mu_m,$$

што није тачно јер имамо да је  $\mu_m = \frac{a-b\mu_f}{b-c\mu_f} C_0$ , па

$$C_0 \mu_f = \frac{a-b\mu_f}{b-c\mu_f} C_0 \Rightarrow \mu_f^2 - 2b\mu_f + a = 0$$

има решење у случају да је дискриминанта позитивна, али  $D = 4b^2 - 4ac = -4d < 0$ , па је  $\lambda_1 \neq 0$ .

На основу показаног да је  $\lambda_1 \neq 0$  и услова (5) имамо да је

$$\Theta_m (\mu_m + k_\alpha \sigma_m) + \Theta_f C_0 \mu_f + C_0 = 0.$$

Убацавањем услова (4) у претходну једначину добијамо

$$\Theta_m = -\frac{(1 + \mu_f)C_0}{\mu_m + k_\alpha \sigma_m - C_0 \mu_f}$$

$$\Theta_f = \frac{\mu_m + \sigma_m + C_0}{\mu_m + \alpha \sigma_m - C_0 \mu_f}.$$

Показали смо да је  $\lambda_1 \neq 0$  и јошје остало да је  $\lambda_1 > 0$ :

$$\lambda_1 = \frac{C_0 \mu_f - \mu_m}{\mu_m + \alpha \sigma_m - C_0 \mu_f},$$

---

како имамо да је  $\mu_m = \frac{a-b\mu_f}{b-c\mu_f}C_0$  и  $\sigma_m = \frac{s}{b-c\mu_f}C_0$ , тада је

$$\lambda_1 = -\frac{s}{s+k_\alpha}$$

$$\lambda_1 > 0 \Leftrightarrow (-k_\alpha) > s,$$

што је логично, да би било пресека. Средња вредност у тачки  $T$  је

$$\mu_T = \frac{k_\alpha\mu_f - s}{k_\alpha + s}C_0,$$

а стандардна девијација је

$$\sigma_T = \frac{-1 - \mu_f}{k_\alpha + s}C_0,$$

што се поклапа са решењем у претходном делу.



## 3 Елиптичке расподеле

До сада смо претпостављали да принос портфолија има нормалну расподелу. Међутим, јасно нам је да у реалности то није увек случај. Оно што се показује у пракси, јесте да расподеле приноса имају дебље репове од нормалне.

У овом поглављу, упознаћемо се са класом елиптичких расподела, којом се реалније моделира принос портфолија.

### Дефиниција и основне особине

Нека је  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  случајан вектор .

**Дефиниција 1:** Каже се да  $X$  има елиптичку расподелу, уколико има функцију густине облика :

$$f_X(x) = c_n |\Omega|^{\frac{1}{2}} g_n \left( \frac{1}{2} (x - \mu)^T \Omega^{-1} (x - \mu) \right),$$

Где је :

$\mu$  - колона вектор

$\Omega$  - позитивно дефинитна матрица димензије  $n$

$g_n$  - реална функција коју називамо генератор густине.

Да би  $f_X$  заиста била функција густине потребно је да важе следе'ци и услови :

$$\int_0^\infty x^{\frac{n}{s}-1} g_n(x) dx < +\infty$$

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty x^{\frac{n}{s}-1} g_n(x) dx.$$

Константа  $c_n$  назива се константа нормирања.

Ознака коју користимо да назначимо да случајна величина има елиптичку расподелу :  $X : E_n(\mu, \Omega, g_n)$

Елиптичке расподеле могу се дефинисати и следећом еквивалентном дефиницијом.

**Дефиниција 2:** Случајна величина  $X$  има елиптичку расподелу уколико се њена карактеристична функција  $\Phi_X$  може претставити на следећи начин:

$$\Phi_X(t) = e^{it\mu} \psi\left(\frac{1}{2}t^T \Omega t\right),$$

Где је  $\psi$  нека реална функција.

У овом случају пишемо :  $X : E_n(\mu, \Omega, \psi)$ .

Особине елиптичких расподела:

1. Очекивање :

Постоји уколико је  $\int_0^\infty g_1(x) dx < \infty$ .

Тада је  $E(X) = \mu$ .

2. Коваријациона матрица:

Постоји уколико  $|\psi'(0)| < \infty$ .

Тада је  $\Sigma = \psi'(0)\Omega$ .

3. Нека је:

$X : E_n(\mu, \Omega, g_n)$

$A$  ( $m \times n$ ) матрица

$B$   $m$ - димензиона колона.

$AX + B : E(A\mu + B, A^T \Omega A, g_m)$

4.  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$

$X_k : E_1(\mu_k, \omega_k, g_1)$  , где је  $\mu_k$   $k$ -ти елемент колоне  $\mu$  а  $\omega_k$  елемент са дијагонале матрице  $\Omega$ .

Следе примери елиптичких расподела.

## 3.1 Примери елиптичних расподела

Примери елиптичних расподела

Као и до сада, посматрамо случајан вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)$ .  
Ознаке користимо као у претходном поглављу.

### 3.1.1 Нормална расподела

Генератриса густине :  $g(u) = e^{-u}$

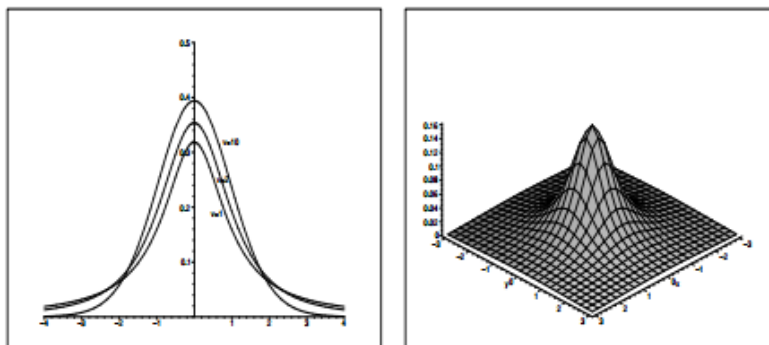
Константа нормирања :  $c_n = \frac{1}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}$

Густина облика :  $f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} |\Omega|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T |\Omega|^{-1} (x-\mu)}$

Као што видимо, нормална расподела је пример елиптичке, а из наведеног облика густине видимо да важи :  $cov(X) = \Sigma = \Omega$ .

Напомена: Ово важи само у случају нормалне расподеле, а у осталим случајевима измедју  $\Sigma$  и  $\Omega$  постоји линеарна веза.

На следећој слици можемо видети графике густина маргиналне нормалне расподеле и вишедимезионе нормалне расподеле са параметрима  $\mu = 0$   $\Omega = I$  :



## 3.1.2 Студентова расподела

Генератриса густине :

$$g_n(u) = \left(1 + \frac{2u}{r}\right)^{-\frac{n+r}{2}}$$

Константа нормирања :

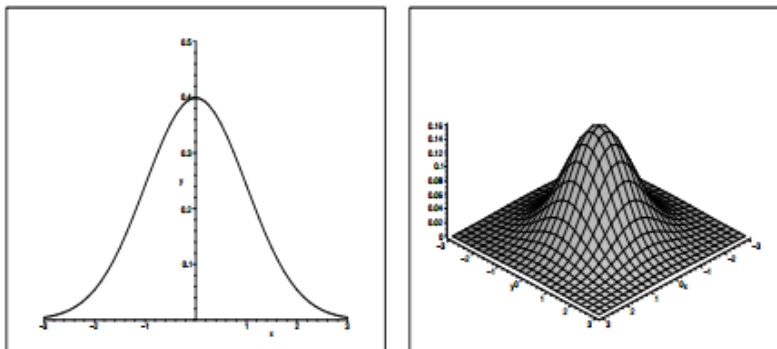
$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+r}{2})}{(r\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})}$$

Густина облика :

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+r}{2})}{(r\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{r}(x - \mu)^T |\Omega|^{-1} (x - \mu)\right)^{-\frac{n+r}{2}}$$

Коваријациона матрица у овом случају не поклапа се са  $\Omega$ , али између њих постоји линеарна веза :  $\Sigma = \frac{r}{r-2}\Omega$ .

На наредној слици можемо видети графике густина маргиналне и вишедимензионе студентове расподеле када је  $r = 1$ .



### 3.1.3 Лапласова расподела

Генератриса густине :

$$g(u) = e^{-\sqrt{2u}}$$

Константа нормирања :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\sqrt{2x}} dx)^{-1}, \text{ смена } y = \sqrt{x} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (\int_0^\infty y^{n-2} e^{-y\sqrt{2}} 2y dy)^{-1} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (\int_0^\infty y^{n-1} e^{-y\sqrt{2}} 2dy)^{-1} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{2\Gamma(n)}{2^{\frac{n}{2}}}\right)^{-1} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\Gamma(n)\pi^{\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

Густина облика :

$$f_X(x) = c_n |\Omega|^{-\frac{1}{2}} e^{-(x-\mu)^T |\Omega|^{-1} (x-\mu)} |\Omega|^{-\frac{1}{2}}$$

### 3.1.4 Логистичка расподела

Генератриса густине :

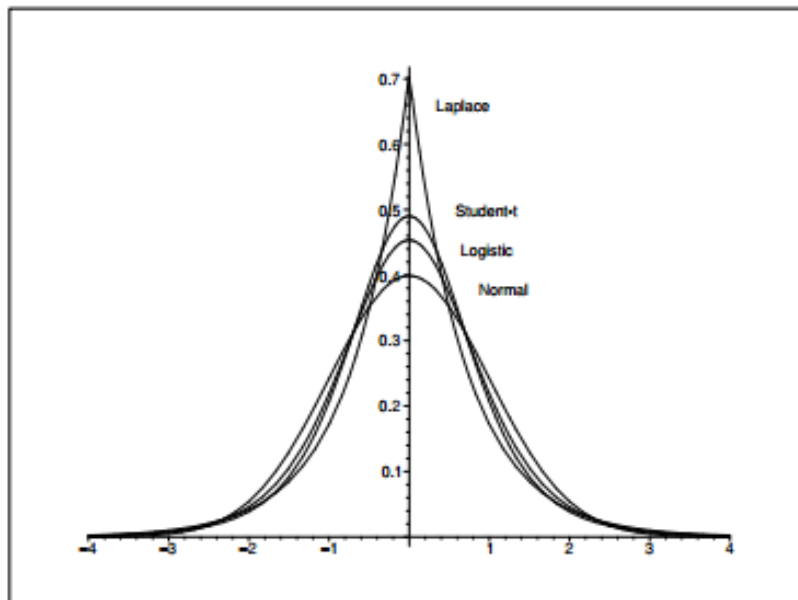
$$g(u) = \frac{e^{-\sqrt{2u}}}{(1+e^{-\sqrt{2u}})^2}$$

Константа нормирања :

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\Gamma(n)\pi^{\frac{n}{2}}} (\sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1} j^{1-n})^{-1}$$

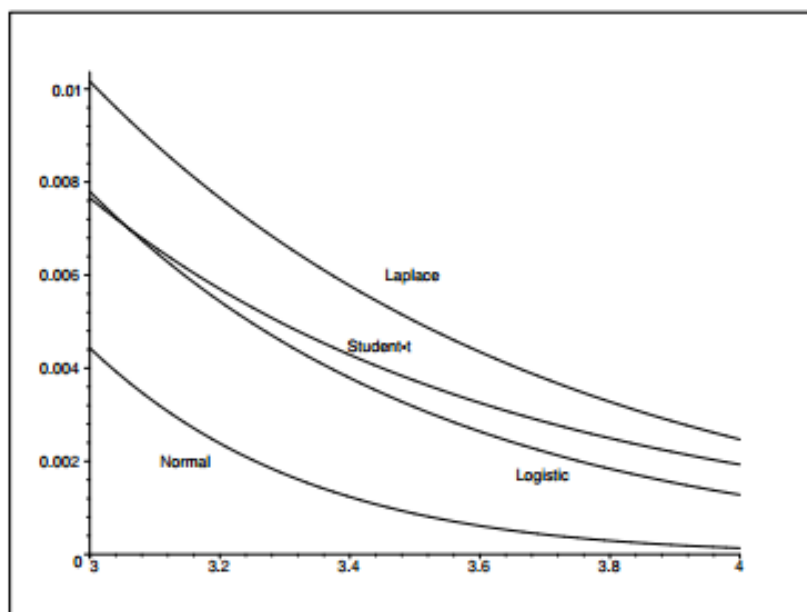
Размотрили смо различите примере елиптичних расподела. Постоје и многе друге, као што су Беселова, Кошијева и слично. Оно шта нас занима, јесу разлике између њих.

Најважније разлике огледају се у дебљини репова ових расподеле, због чега их и посматрамо. На наредној слици можемо видети графике густина различитих елиптичних расподела таквих да је код свих очекивање 0, а дисперзија 1. (Приметимо да овде посматрамо ради једноставности једнодимензиони случај.)



Нормална расподела има најтање репове, од све 4 наведене расподеле. Потом иду логистичка, студентова па Лапласова расподела као расподела са најдебљим репом.

На наредној слици претстављен је приказ десних репова :



Као што смо већ поменули, још једна разлика између ових расподела је однос матрица  $\Omega$  и  $\Sigma$ . Међу те две матрице постоји линеарна веза, а за поменуте расподеле она је следећег облика :

Нормална :  $\Omega = \Sigma$

Студентова са  $r$  степени слободe :  $\Omega = \frac{r}{r-2}\Sigma$

Лапласова :  $\Omega = \frac{1}{2}\Sigma$

Логистичка:  $\Omega = \frac{3}{\pi^2}\Sigma$

## 3.2 Анализа односа средње вредности и дисперзије

У овом поглављу ћемо показати да је анализа дисперзије очекивања ”алат” који се може применити на елиптичке расподеле. Основна идеја овог приступа је да инвеститор жели да минимизује ризик, за унапред дати принос портфолија. Уколико може да бира између два портфолија са истим очекиваним приносом он ће одабрати портфолио са мањим ризиком.

Оно што ћемо показати јесте да су елиптичке расподеле у потпуности одређене очекивањем и дисперзијом(ризик). Виши моменти су или 0 или су пропорционални дисперзији.

Претпоставимо да инвеститор има портфолио  $\Theta$  ризичник вредносних папира, са приносом  $R_p = r^T \Theta$ , при чему принос хартија од вредности  $r$  има елиптичку расподелу  $E_n(\mu, \Omega, \Psi)$ . Тада је принос портфолија такође елиптички расподељена случајна величина  $E_1(\Theta^T \mu, \Theta^T \Omega \Theta, \Psi) = E_1(\mu_p, \omega^2, \Psi)$ .

На почетку смо рекли да важи (дефиниција 2) :  $\Phi_{R_p}(t) = e^{it\mu_p} \psi(\frac{1}{2}t^2\omega^2)$ . Даљим расписивањем добијамо следеће једнакости:

$$\begin{aligned}
 \psi(\frac{1}{2}t^2\omega^2) &= \Phi_{R_p}(t)e^{-it\mu_p} \\
 &= Ee^{itR_p}e^{-it\mu_p} \\
 &= Ee^{it(R_p-\mu_p)} \\
 &= \int e^{it(x-\mu_p)} f_{R_p}(x)dx \\
 &= \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it(x-\mu_p))^k}{k!} f_{R_p}(x)dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \int (x-\mu_p)^k f_{R_p}(x)dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} M_k,
 \end{aligned}$$



При чему је  $M_k$   $m$ -ти централни моменат.

Приметимо да важи :

$$\frac{d^m}{dt^m} \left( \frac{i^k t^k}{k!} M_k \right) = \begin{cases} 0 & , k < m \\ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(2)(1)i^m t^0}{m!} M_m = i^m M_m & , k = m \\ \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)i^k t^{k-m}}{k!} M_k = \frac{i^k t^{k-m}}{(k-m)!} M_k & , k > m \end{cases}$$

$$\left. \frac{d^m}{dt^m} \left( \psi \left( \frac{1}{2} \omega^2 t^2 \right) \right) \right|_{t=0} = \left. \frac{d^m}{dt^m} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} M_k \right) \right|_{t=0} = i^m M_m$$

$$M_m = i^{-m} \left. \frac{d^m}{dt^m} \psi \left( \frac{1}{2} \omega^2 t^2 \right) \right|_{t=0}$$

Такође, индукцијом се може показати да за парно  $m$  и неке реалне константе  $C_{ml}$  важи:

$$\begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \psi \left( \frac{1}{2} \omega^2 t^2 \right) & = \sum_{l=0}^{m/2} C_{ml} \psi^{(m-l)} \left( \frac{1}{2} \omega^2 t^2 \right) \omega^{2(m-l)} t^{m-2l} \\ \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \psi \left( \frac{1}{2} \omega^2 t^2 \right) & = \sum_{l=0}^{m/2} C_{m+1,l} \psi^{(m+1-l)} \left( \frac{1}{2} \omega^2 t^2 \right) \omega^{2(m+1-l)} t^{m+1-2l} \end{cases}$$

На основу свега наведеног, лако доносимо следећи закључак:

$$\begin{cases} M_m & = C_m \psi^{(m/2)}(0) \omega^{2(m/2)} = C'_m \omega^m \\ M_{m+1} & = 0 \end{cases}$$

Напоменимо да су у наведеној формули  $C'_m$  и  $C_m$  реалне константе. Дакле, видимо да су сви непарни моменти 0, што није изненађење с' обзиром да су елиптичке расподеле симетричне, док су остали моменти пропорционални дисперзији. Резултат овог доказа је да се Телсеров приступ који смо претходно применили на нормалну расподелу, може применити и на ову - општију фамилију.

### 3.3 Телсеров приступ и елиптичке расподеле

У овом поглављу, држимо се ознака из претходног, као и следећих претпоставки:

Имамо портфолио  $\Theta$  ризичних вредносних папира, са приносом  $R_p = r^T \Theta$ , при чему принос хартија од вредности  $r$  има елиптичку расподелу  $E_n(\mu, \Omega, g_n)$ , где је  $g_n$  генератриса густине. Тада је принос портфолија такође елиптички расподељена случајна величина  $E_1(\Theta^T \mu, \Theta^T \Omega \Theta, g_1) = E_1(\mu_p, \omega^2, g_1)$ .

Варијанса портфолија у том случају је  $\sigma_p^2 = -\Psi'(0)\omega_p^2$ .

Генератриса густине приноса портфолија  $R_p$  у овом случају има облик :

$$f_p(x) = \frac{c_1}{\omega_p} g_1\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_p}{\omega_p}\right)^2\right],$$

При чему је константа  $c_1$  дефинисана следећим изразом:

$$c_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left[ \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1} g_1(x) dx \right]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} g_1(x) dx \right]^{-1}.$$

Телсеров приступ оптимизације портфолија подразумева максимизовање очекиваног приноса при чему се ограничава вероватноћа великог губитка :  $P(R_p \leq -C_0) \leq \alpha$ ,  $C_0$ - почетно улагање.

Како  $R_p$  има елиптичку расподелу важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned} P(R_p \leq -C_0) &= \int_{-\infty}^{-C_0} \frac{c_1}{\omega_p} g_1\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_p}{\omega_p}\right)^2\right] dx && \text{смена } z = \frac{x-\mu_p}{\omega_p} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{-C_0-\mu_p}{\omega_p}} c_1 g_1\left[\frac{1}{2}z^2\right] dz. \end{aligned}$$

Дефинишимо  $k_\alpha$  као :  $\int_{-\infty}^{k_\alpha} c_1 g_1\left[\frac{1}{2}z^2\right] dz = \alpha$ .

$$P(R_p \leq -C_0) \leq \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{-C_0-\mu_p}{\omega_p} \leq k_\alpha \quad \rightarrow \quad -C_0 - \omega_p k_\alpha \leq \mu_p.$$

Како постоји веза између  $\Omega$  и  $\Sigma$  последњу неједнакост можемо писати у облику :

$$-C_0 - z_\alpha \sigma_p \leq \mu_p \text{ при чему је } z_\alpha = \frac{k_\alpha \omega_p}{\sigma_p}.$$

Користећи ову дефиницију, Телсеров проблем своди се на следећи систем једначина :

$$\text{Max} \left\{ \mu_p \left| \begin{array}{l} \mu_p \geq -C_0 - z_\alpha \sigma_p \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \mu_p = \mu^T \theta \\ \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right. \right\}$$

Овај систем решава се на исти начин као што смо урадили за нормалну расподелу.

## 4 Пример

Прво ћемо да инсталирамо пакете које ћемо користити у даљем раду:

Код

```
install.packages("xts")
library("xts")

install.packages("quantmod")
library("quantmod")

install.packages("PerformanceAnalytics")
library("PerformanceAnalytics")

install.packages("quadprog")
library("quadprog")
```

Направићемо портфолио који садржи податке три компаније, *PhilipMoris*, *Coca Cola* и *Mondelez*, то ћемо учинити на следећи начин:

Код

```
Pmi=getSymbols("PMI.SW",from="2016-01-01",to="2016-6-30",auto.assign=FALSE,source="google")

Co=getSymbols("KO",from="2016-01-01",to="2016-6-30",auto.assign=FALSE,source="google")

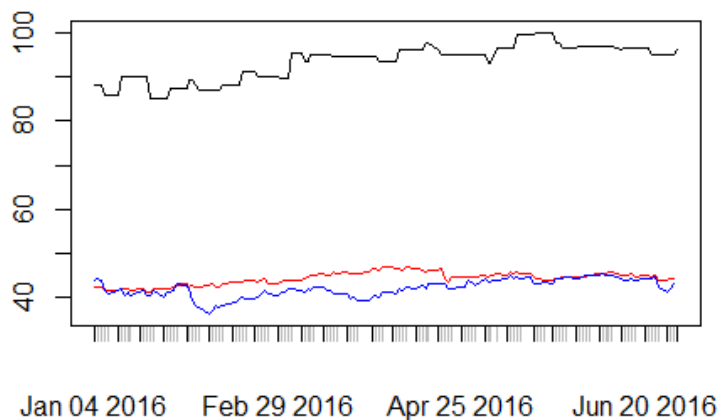
MDLZ=getSymbols("MDLZ",from="2016-01-01",to="2016-6-30",auto.assign=FALSE,source="google")
```

Приказаћемо првих шест дана од сваке базе:

```
> head(Pmi)
      Pmi.Sw.Open Pmi.Sw.High Pmi.Sw.Low Pmi.Sw.Close Pmi.Sw.Volume Pmi.Sw.Adjusted
2016-01-04      88.05      88.05      88.05      88.05           0           88.05
2016-01-05      88.05      88.05      88.05      88.05           0           88.05
2016-01-06      88.05      88.05      88.05      88.05           0           88.05
2016-01-07      85.90      85.90      85.90      85.90          2000           85.90
2016-01-08      85.90      85.90      85.90      85.90           0           85.90
2016-01-11      85.90      85.90      85.90      85.90           0           85.90
> head(Co)
      Co.Open Co.High Co.Low Co.Close Co.Volume Co.Adjusted
2016-01-04  42.34  42.50  41.97  42.40 16084100      42.40
2016-01-05  42.31  42.63  42.17  42.55 15781900      42.55
2016-01-06  42.20  42.51  42.04  42.32 16245100      42.32
2016-01-07  41.65  42.11  41.45  41.62 20563600      41.62
2016-01-08  41.65  42.12  41.41  41.51 14645900      41.51
2016-01-11  41.58  41.86  41.29  41.58 15815200      41.58
> head(MDLZ)
      MDLZ.Open MDLZ.High MDLZ.Low MDLZ.Close MDLZ.Volume MDLZ.Adjusted
2016-01-04    44.09    44.45    43.25    43.79  11588700      43.79
2016-01-05    43.79    44.45    43.65    44.15  15463500      44.15
2016-01-06    43.33    44.17    43.28    43.99  19644700      43.99
2016-01-07    43.04    43.04    41.35    41.59  19806400      41.59
2016-01-08    41.65    42.06    40.97    40.99  14529700      40.99
2016-01-11    41.33    41.80    41.04    41.68  10232000      41.68
> |
```

У даљем анализирању база користићемо модификовану цену (*Adjusted*), то је цена након исплате дивиденди, поделе акција итд.

Сада ћемо приказати график модификованих цена:

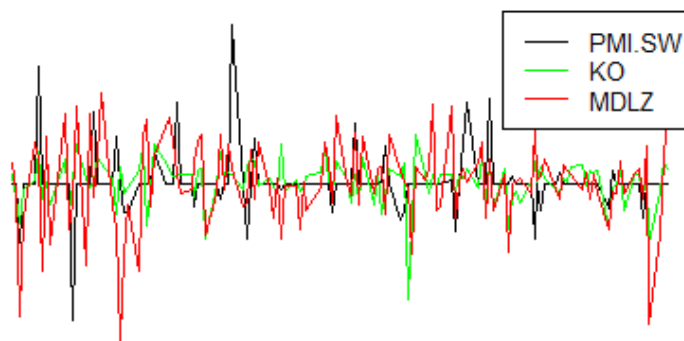


Сада ћемо одредити дневне стопе приноса:

## Код

```
R_pmi=xts(Return.calculate(Pmi$PMI.SW.Adjusted,
method="discrete")[2:124])
R_co=xts(Return.calculate(Co$KO.Adjusted,
method="discrete")[2:124])
R_mdz=xts(Return.calculate(MDLZ$MDLZ.Adjusted,
method="discrete")[2:124])
```

График дневних стопа приноса компанија *Philip Moris*, *Coca Cola* и *Mondelez* у 2016. години за првих шест месеци:



Прво ћемо оценити очекивани принос и коваријансу а затим, по формули (која допушта кратку продају), израчунати  $\Theta$  ( $\Theta = \frac{\Sigma^{-1}e}{e^T \Sigma^{-1}e}$ ).

Добијамо следеће вредности за  $\Theta$ : 0.2808173, 0.439866, 0.2793162. Све вредности су позитивне па самим тим није битно да ли је до-

пуштена или није кратка продаја.

Сада ћемо да направимо функцију која враћа портфолио са приносом  $rm$ .

**Код**

```
markovicP=function(r,covmat,rm){  
  
  inverz=solve(covmat)  
  
  e=as.matrix(rep(1,length(r)))  
  
  lambda2=(t(r)%*%inverz%*%e-(t(e)%*%inverz%*%e)*rm)/  
  ((t(r)%*%inverz%*%e)%*%(t(e)%*%inverz%*%r)-  
  (t(r)%*%inverz%*%r)%*%(t(e)%*%inverz%*%e))  
  
  lambda1=(1-(t(e)%*%inverz%*%r)*lambda2)/  
  (t(e)%*%inverz%*%e)  
  
  w=inverz%*%(e%*%lambda1+r%*%lambda2)  
  
  return(list(wp=w,rp=t(r)%*%w,dp=t(w)%*%covmat%*%w))  
}
```

Одредићемо портфолије који имају приносе као посматране компаније:

```
> markovicP(r,covmat,c(r[1],r[2],r[3]))
$lam1
[1] 0.005368947 0.012025294 0.012936162

$lam2
[1] 0.12899749 -0.04131760 -0.06462387

$wv
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.00692281 0.04824734 -0.08293981
[2,] -0.05751258 0.59917588 0.68903850
[3,] 0.05058977 0.35257678 0.39390131

$rp
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.1772637 -0.005176574 -0.03014208

$dp
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.028235521 0.004701182 0.001480694
[2,] 0.004701182 0.012239177 0.013270692
[3,] 0.001480694 0.013270692 0.014884060
```



## **2**

Katarina Halaj  
Biljana Jovanović

June 7, 2017

## Sadržaj

<b>1</b>	<b>Oznake koje koristimo</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Vrednost pri riziku</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Bezrizično ulaganje</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Optimalni portfoliji</b>	<b>14</b>
4.1	Portfolio koji minimizuje VaR . . . . .	14
4.2	Tangentni VaR portfolio . . . . .	16
4.3	Telserov portfolio . . . . .	19
4.4	Bezrizični Telserov portfolio . . . . .	21

# 1 Oznake koje koristimo

Najpre ćemo uvesti oznake koje će nadalje biti potrebne.

$n$  = broj aseta koji ulaze u portfolio

$C_0$  = kapital koji možemo uložiti, u evrima.

$C_{end}$  = kapital koji imamo na kraju perioda, u evrima.

$R_p$  = ukupna dobit od investicije, u evrima

$\mu_p$  = očekivana dobit od investicije, u evrima.

$\sigma_p^2$  = disperzija dobiti od investicije

$r_i$  = stopa dobiti od i-tog aseta

$\mu_i$  = očekivana stopa dobiti od i-tog aseta

$\rho_{ij}$  = korelacija između stopa dobiti i-tog i j-tog aseta

$\sigma_{ij}$  = kovarijacija između stopa dobiti i-tog i j-tog aseta

$\Sigma$  = kovarijaciona matrica vektora  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$

$\theta_i$  = količina novca uložena u i-ti aset, u evrima

$\mu_f$  = stopa dobiti bezrizicnog aseta

$R_f$  = ukupna dobit od bezrizicnog aseta.

$\gamma$  = parametar apsolutne averzije prema riziku

$k_\alpha$  = disperzijom standardizovani kvantil raspodele na nivou  $\alpha$

$z_\alpha$  = devijacijom standardizovani kvantil raspodele na nivou  $\alpha$

$\Omega$  = "disperziona" matrica

$VaR_\alpha$  = Vrednost pri riziku na nivou poverenja  $\alpha$

$r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$

$\bar{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$

Važi sledeće:

1.  $C_{end} = C_0 + R_p$
2.  $R_p = \sum_{i=0}^n r_i \theta_i = r^T \theta$
3.  $\mu_p = \sum_{i=0}^n \mu_i \theta_i = \mu^T \theta = \theta^T \mu$
4.  $\sigma_p^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \theta_i \theta_j \sigma_{ij}$
5.  $R_f = \mu_f C_0$

## 2 Vrednost pri riziku

Videli smo da Telserov metod optimizacije nije zasnovan na standardnoj devijaciji kao meri rizika. Mera rizika koja se ovde koristi je  $P(R_p \leq -C_0)$  što je samo jedan od specijalnih slučajeva optimizacije koja je zasnovana na vrednosti pri riziku. Najpre ćemo definisati vrednost pri riziku, VaR, na nivou poverenja  $1 - \alpha$ .

**Definicija 2.1** *Vrednost pri riziku na nivou poverenja  $1 - \alpha$  jednog portfolija je ona vrednost  $VaR_\alpha$  za koju važi sledeća jednakost:*

$$P(R_p \leq -VaR_\alpha) = \alpha$$

Ukoliko pomnožimo sa -1, dobijemo da je to ona vrednost za koju važi  $P(-R_p \geq VaR_\alpha) = \alpha$  a kako je  $-R_p$  zapravo jednako gubitku onda možemo da kažemo da je to maksimalna količina koju investitor može da izgubi sa nivoom poverenja  $1 - \alpha$ . Što je VaR veća na nekom nivou poverenja to je portfolio rizičniji. Zato će investitori koji ne žele da rizikuju želiti da imaju što manje vrednosti  $VaR_\alpha$

**Podsetnik 2.1** *Podsetimo se samo verovatnoće kratkog pada (shortfall probability) i Telserovog pristupa. Verovatnoća kratkog pada je verovatnoća da će dobit od portfolija biti manja od unapred zadate vrednosti a Telserov kriterijum ima unapred zadatu baš tu verovatnoću  $\alpha$  kao i granični kapital  $C_L$  i želi da maksimizuje očekivani kapital na kraju perioda pod uslovom da je  $P(C_{end} \leq C_L) \leq \alpha$ . Kako je  $E(C_{end}) = E(C_0 + R_p) = C_0 + \mu_p$  to treba naći maksimum  $\mu_p$  pod zadatim uslovom.*

Specijalno, ukoliko uzmemo  $VaR_\alpha = C_0$  i da je verovatnoća kratkog pada  $\alpha$  onda se optimizacija pomoću VaR-a svodi na Telserov kriterijum. Sada je VaR nova mera rizika, tako da pri kreiranju efikasne granice nju uzimamo u obzir. Kao što je i ranije bio slučaj, efikasni skup nam za neku zadatau fiksiranu vrednost VaR daje najveću očekivanu dobit, ili za fiksirano očekivanje daje najmanji VaR. Ispostavi se da se efikasna granica poklapa sa efikasnom granicom u *mean-VaR* modelu ukoliko je raspodela stope dobiti eliptička. To je pretpostavka sa kojom ćemo raditi. Bitno je napomenuti da je ta pretpostavka korektna jer stvarni podaci imaju deblje repove pa se češće javljaju neuobičajeni slučajevi što se eliptičkom raspodelom može mnogo bolje modelovati nego normalnom.

**Podsetnik 2.2** Za  $n$ -dimenzionalni vektor  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  kažemo da ima eliptičku raspodelu ukoliko je njegova funkcija gustine:

$$f_X(x) = c_n |\Omega|^{-\frac{1}{2}} g_n \left[ \frac{1}{2} (x - \mu) \Omega^{-1} (x - \mu)^T \right]$$

Pišemo  $X \sim E_n(\mu, \Omega, g_n)$

Druga definicija eliptičkih raspodela je pomoću karakteristične funkcije koja je sledećeg oblika:

$$\phi_X(t) = E(e^{it^T X}) = e^{it^T \mu} \psi \left( \frac{1}{2} t^T \Omega t \right).$$

U tom slučaju pišemo  $X \sim E_n(\mu, \Omega, \psi)$  Ova raspodela ima par interesantnih svojstava medju kojima su i sledeća dva:

1. Ako  $\int_0^\infty g_1(x) dx < \infty$  onda postoji  $EX$  i važi  $EX = \mu$
2. Ako  $|\psi'(0)| < \infty$  onda postoji kovarijaciona matrica vektora  $X$ ,  $\Sigma = -\psi''(0)\Omega$ . Matricu  $\Omega$  zvaćemo disperziona matrica.

Neki primeri eliptičkih raspodela su: normalna familija, familija studentovih  $t$ -raspodela, Laplasova i logistička familija raspodela. Matrica  $\Omega$  je u linearnoj vezi sa kovarijacionom matricom  $\Sigma$  i to:

$\Omega =$

- $\Sigma$ , u slučaju normalne raspodele
  - $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$ , studentova  $t$ -raspodela sa  $\nu$  stepeni slobode
  - $\frac{1}{2}\Sigma$ , Laplasova
  - $\frac{3}{\pi^2}\Sigma$ , logistička
- a odatle  $\omega_k =$
- $\sigma_k$ , u slučaju normalne raspodele
  - $\sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}}\sigma_k$ , studentova  $t$ -raspodela sa  $\nu$  stepeni slobode
  - $\sqrt{\frac{1}{2}}\sigma_k$ , Laplasova
  - $\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma_k$ , logistička

Vratimo se na zadatak optimizacije. Kao što je napomenuto, pretpostavka je da vektor stopa dobiti,  $r = (r_1, \dots, r_n)^T$  ima eliptičku raspodelu  $r \sim E_n(\mu, \Omega, \psi)$  gde su  $\mu$  očekivanje,  $\Omega$  disperziona matrica i  $\psi$  karakteristični generator. Ako investitor ima portolio  $\theta$  rizičnih akcija onda je dobit od portfolija  $R_p = r^T \theta$  i imaće eliptičku raspodelu  $E_1(\theta^T \mu, \theta^T \Omega \theta, \psi)$ .

**Podsetnik 2.3** Za  $R_p$  važi

$$P(R_p \leq v) = \int_{-\infty}^v \frac{c_1}{\omega_p} g_1 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_p}{\omega_p} \right)^2 \right] dx$$

što uz smenu  $z = \frac{x - \mu_p}{\omega_p}$  daje

$$P(R_p \leq v) = \int_{-\infty}^{\frac{v - \mu_p}{\omega_p}} c_1 g_1 \left[ \frac{1}{2} z^2 \right] dz$$

.  $k_\alpha$  je definisan kao kvantil za koga važi:

$$\int_{-\infty}^{k_\alpha} c_1 g_1 \left[ \frac{1}{2} z^2 \right] dz = \alpha$$

i zavisi isključivo od funkcije generatora gustine  $g(u)$  i od  $\alpha$ . Nadalje tu vrednost zvaćemo disperziona-standardizovani kvantil eliptičke raspodele. Dok ćemo vrednost  $z_\alpha \equiv \frac{k_\alpha \omega_p}{\sigma_p}$  zvaći standardizovani kvantil. U sledećoj tablici date su neke vrednosti  $k_\alpha$  za fiksirane vrednosti  $\alpha$ .

	Normal	Student-t ( $\nu = 1$ )	Student-t ( $\nu = 10$ )	Laplace	Logistic
$\alpha = 0.5$	0	0	0	0	0
$\alpha = 0.1$	-1.28	-3.08	-1.37	-1.61	-2.20
$\alpha = 0.01$	-2.33	-31.82	-2.76	-3.91	-4.60
$\alpha = 0.001$	-3.09	-318.3	-4.14	-6.21	-6.91
$\alpha = 0.0001$	-3.72	-3183	-5.69	-8.52	-9.21

Slika 1: Standardizovani kvantili za neke eliptičke raspodele

Sada kada znamo to, imamo da je:

$$P(R_p \leq -VaR_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow P\left(\frac{R_p - \mu_p}{\omega_p} \leq \frac{-VaR_\alpha - \mu_p}{\omega_p}\right) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{-VaR_\alpha - \mu_p}{\omega_p} = k_\alpha \Leftrightarrow VaR_\alpha = -\mu_p - k_\alpha \omega_p$$

Pomoću zamene  $z_\alpha \equiv \frac{k_\alpha \omega_p}{\sigma_p}$

$$P(R_p \leq -VaR_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow VaR_\alpha = -\mu_p - \sigma_p z_\alpha$$

gde smo VaR zapisali pomoću očekivanja i standardne devijacije.

Efikasna granica se sastoji od portfolija koji za dato očekivanje minimizuju VaR ili od portfolija koji za datu VaR daju najveću očekivanu vrednost dobiti što je pristup koji ćemo koristiti.

Problem je formulisan na sledeći način:

$$\max \left\{ \mu_p \mid VaR_\alpha = -\mu_p - \sigma_p z_\alpha, \mu_p = \theta^T \mu = \mu^T \theta, \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta, \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

Transformisaćemo prvi uslov u njemu ekvivalentan uslov:

$$(VaR_\alpha + \mu_p)^2 = (-z_\alpha \sigma_p)^2 \Leftrightarrow VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu_p + \mu_p^2 - z_\alpha^2 \sigma_p^2 = 0$$

Zatim ostale uslove zamenimo u tako dobijeni uslov nakon čega dobijamo:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu^T \theta + \theta^T \mu \mu^T \theta - z_\alpha^2 \theta^T \Sigma \theta &= 0 \Leftrightarrow \\ VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu^T \theta + \theta^T \Psi \theta &= 0 \end{aligned}$$

gde je  $\Psi = \mu \mu^T - z_\alpha^2 \Sigma$

Sada je početni problem transformisan u njemu ekvivalentan problem:

$$\max \left\{ \mu_p \mid VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu^T \theta + \theta^T \Psi \theta = 0, \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

Lako se proveriti da je matrica  $\Psi$  simetrična.

Definišemo sledeće konstante:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \mu^T \Psi^{-1} \mu \\ \hat{b} &= \mu^T \Psi^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \Psi^{-1} \mu \\ \hat{c} &= \bar{1}^T \Psi^{-1} \bar{1} \\ \hat{d} &= \hat{a} \hat{c} - \hat{b}^2 \end{aligned}$$

Izvodimo vezu tih konstanti sa  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  gde su te konstante bile definisane pri traženju efikasne granice kada je mera rizika standardna devijacija, i to na sledeći način:

$$\begin{aligned} a &= \mu^T \Sigma^{-1} \mu \\ b &= \mu^T \Sigma^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu \\ c &= \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1} \\ d &= ac - b^2 \end{aligned}$$

**Podsetnik 2.4** Ukoliko je mera rizika disperzija cilj je da za dato očekivanje minimizujemo rizik tj da nađemo minimum od

$$D(C_{end}) = D(C_0 + R_p) = D(R_p) = D(r^T \theta) = \theta^T \Sigma \theta$$

Uslovi koji moraju da važe su da je očekivana dobit fiksirana i da jedino možemo da investiramo kapital koji imamo u tom trenutku pa količine novca koje uplaćujemo u pojedinačne asete u zbiru daju  $C_0$ . Ta dva uslova možemo zapisati kao:  $\mu^T \theta = \mu_p$  i  $\bar{1}^T \theta = C_0$  pa je problem:

$$\min\{\theta^T \Sigma \theta \mid A^T \theta = B\}$$

gde su matrice  $A = (\mu \ \bar{1})$  i  $B = \begin{pmatrix} \mu_p \\ C_0 \end{pmatrix}$

Formiranjem Lagranžove funkcije a zatim diferenciranjem po  $\theta$  i  $\lambda$  dobijemo sistem čijim rešavanjem se dobije

$$D(R_p) = B^T H^{-1} B$$

gde je  $H = A^T \Sigma^{-1} A$  simetrična matrica i  $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  za

$$a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$$

$$b = \mu^T \Sigma^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu$$

$$c = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1}$$

$$d = ac - b^2$$

Na kraju dobijemo

$$D(R_p) = \sigma_p^2 = \frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)$$

što nam daje izraz za efikasnu granicu u mean-variance modelu. Naravno, samo gornja polovina grafika je efikasna jer za isti rizik daje veću očekivanu dobit. Standardnu devijaciju dobijamo korenovanjem:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}$$

Još jedna bitna stvar je  $\theta_{EF}$  što predstavlja alokaciju portfolija koji pripada efikasnoj granici.

$$\theta_{EF} = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((a\bar{1} + b\mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\mu_p)$$



Za inverz kovarijacione matrice važi da je:  
 $\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1}\Psi\Psi^{-1} = \Sigma^{-1}(\mu\mu^T - z_\alpha^2\Sigma)\Psi^{-1} = \Sigma^{-1}\mu\mu^T\Psi^{-1} - z_\alpha^2\Sigma\Psi^{-1}$   
 Zamenom u definiciju za  $a$ ,  $b$  i  $c$  dobijamo sistem sa nepoznatim  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  i  $\hat{c}$  čijim rešavanjem dobijamo sledeće veze koje će se koristiti za povezivanje dobijenih rezultata sa prethodnim zaključcima.

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{a}{a - z_\alpha^2} \\ \hat{b} &= \frac{b}{a - z_\alpha^2} \\ \hat{c} &= \frac{cz_\alpha^2 - d}{z_\alpha^2(a - z_\alpha^2)} \\ \hat{d} &= \frac{-d}{z_\alpha^2(a - z_\alpha^2)}\end{aligned}$$

Ako se vratimo na problem pronalaska maksimuma, ostaje nam još par koraka. Najpre formiramo Lagranžovu funkciju:

$$L(\mu_p, \lambda_1, \lambda_2) = \mu_p + \lambda_1(VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha\mu^T\theta + \theta^T\Psi\theta) + \lambda_2(\bar{\Gamma}^T\theta - C_0)$$

$\mu_p = \mu^T\theta$  pa diferenciranjem po  $\theta$ ,  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  dobijemo sistem:

$$\begin{aligned}\mu + 2\lambda_1 VaR_\alpha\mu + 2\lambda_1\Psi\theta + 2\lambda_2\bar{\Gamma} &= 0 \\ VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha\mu^T\theta + \theta^T\Psi\theta &= 0 \\ \bar{\Gamma}^T\theta &= C_0\end{aligned}$$

Iz prve jednačine sistema izrazimo  $\theta$

$$\theta = -\frac{1}{2\lambda_1}\Psi^{-1}(\mu + 2\lambda_1 VaR_\alpha\mu + 2\lambda_2\bar{\Gamma}) = -\frac{1}{2\lambda_1}\Psi^{-1}\mu(1 + 2\lambda_1 VaR_\alpha) - \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}\Psi^{-1}\bar{\Gamma} = (\lambda_3 - VaR_\alpha)\Psi^{-1}\mu + \lambda_4\Psi^{-1}\bar{\Gamma}, \text{ gde je } \lambda_3 = -\frac{1}{2\lambda_1} \text{ i } \lambda_4 = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1}$$

Zamenom tako dobijene vrednosti  $\theta = (\lambda_3 - VaR_\alpha)\Psi^{-1}\mu + \lambda_4\Psi^{-1}\bar{\Gamma}$  u poslednju jednačinu sistema dobijamo:

$$\begin{aligned}(\lambda_3 - VaR_\alpha)\bar{\Gamma}^T\Psi^{-1}\mu + \lambda_4\bar{\Gamma}^T\Psi^{-1}\bar{\Gamma} &= C_0 \text{ tj} \\ (\lambda_3 - VaR_\alpha)\hat{b} + \lambda_4\hat{c} &= C_0 \Rightarrow \lambda_4 = \frac{C_0 + \hat{b}VaR_\alpha - \lambda_3\hat{b}}{\hat{c}}\end{aligned}$$

Izraze za  $\theta$  i  $\lambda_4$  zamenimo u poslednju jednačinu i dobijemo kvadratnu jednačinu po  $\lambda_3$  čijim rešavanjem dobijamo:

$$\lambda_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{\hat{d}}(VaR_\alpha^2(\hat{d} - \hat{c}) - 2C_0\hat{b}VaR_\alpha) - C_0^2} = \pm\sqrt{W}$$

Pošto je  $\theta = (\lambda_3 - VaR_\alpha)\Psi^{-1}\mu + \lambda_4\Psi^{-1}\bar{1}$  važi:

$$\theta = (\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha)\Psi^{-1}\mu + \frac{1}{\hat{c}}(C_0 + \hat{b}VaR_\alpha \mp \sqrt{W}\hat{b})\Psi^{-1}\bar{1}$$

Zato je izraz za očekivanu dobit izraženu kao funkciju od VaR sledeći:

$$\mu_p = \mu^T\theta = (\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha)\hat{a} + \frac{1}{\hat{c}}(C_0 + \hat{b}VaR_\alpha \mp \sqrt{W}\hat{b})\hat{b}$$

Množenjem obe strane sa  $\frac{\hat{c}}{\hat{c}}$  dobijemo

$$\mu_p = \frac{1}{\hat{c}}((\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha)(\hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2) + C_0\hat{b}) = \frac{1}{\hat{c}}((\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha)\hat{d} + C_0\hat{b}) = \frac{\hat{d}}{\hat{c}}(\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha + \frac{\hat{b}}{\hat{d}}C_0)$$

Korišćenjem znaka - dobijemo *mean-VaR* model. Cilj je da ga uporedimo sa *mean-standard deviation* modelom. Ukoliko izrazimo  $\sqrt{W}$  a zatim kvadriramo obe strane, dobijemo kvadratnu funkciju po  $VaR_\alpha$  što nam daje:

$$VaR_\alpha = -\mu_p - \sqrt{\frac{1}{\hat{d}}((\hat{d} - \hat{c})\mu_p^2 - 2\hat{b}C_0\mu_p - \hat{a}C_0^2)}$$

Zatim iskoristimo dobijenu vezu sa  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  i tada je:

$$VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}$$

Ranije smo zaključili da možemo izraziti VaR kao  $VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha\sigma_p$  pa iz poslednje dve jednakosti sledi da je

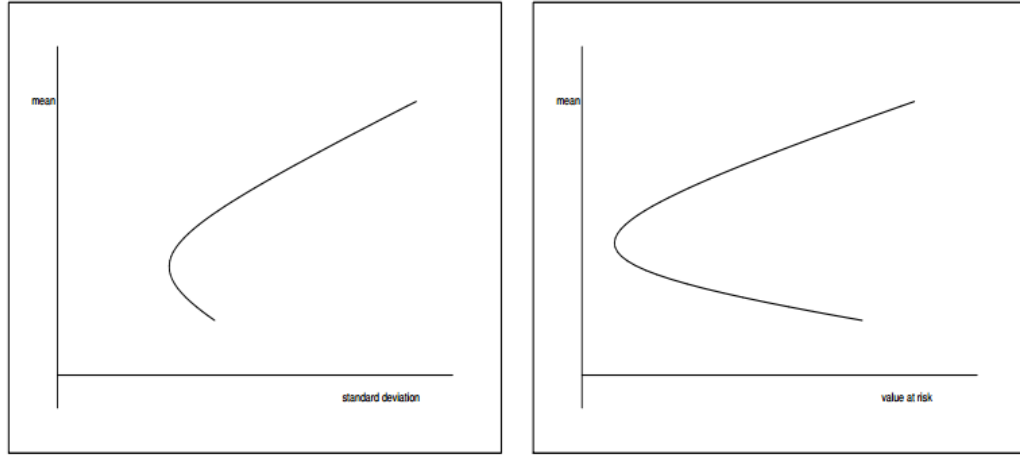
$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}$$

što prepoznamo kao očekivanje-devijacija efikasnu granicu. Pa je naš zaključak da je minimizovanje devijacije isto što i minimizovanje VaR u slučaju kada za stope dobiti pretpostavimo eliptičku raspodelu.

Alokacija portfolija ostaje ista kao u slučaju očekivanje-devijacija okvira i iznosi

$$\theta_{EF} = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((a\bar{1} + b\mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\mu_p)$$

Na sledećoj slici date su obe efikasne granice.



Slika 2: Efikasne granice (levo kada za meru rizika uzimamo standardnu devijaciju i desno, kada za meru rizika uzimamo VaR)

### 3 Bezrizično ulaganje

Pretpostavimo da investitor može da investira u neki određeni vrednosni papir bez rizika. Taj vrednosni papir  $x_f$  donosi malu dobit, ali nije rizičan, tj.  $\sigma_f = 0$ . To znači da je očekivana dobit u tom slučaju jednaka realizovanoj. Pominjali smo *mean-standard deviation* model u kome investitor bira jedan od dva modela:

- 1) za fiksirani rizik, dobit je maksimizovana
- 2) za fiksiranu dobit, rizik je minimalan.

U ovom modelu, efikasna granica se menja u CML (*capital market line*), kada govorimo o bezrizičnom ulaganju. Tada investitor investira u kombinaciju tržišnog portfolija i bezrizičnog ulaganja.

Linija CML je u *mean-standard deviation* modelu data sa

$$\mu_p = s\sigma_p + C_0\mu_f$$

gde je  $s = \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$  nagib te prave. Želimo da vidimo kako će izgledati CML u *mean-VaR* modelu.

Iskoristićemo da je

$$VaR_\alpha = \mu_p - z_\alpha \sigma_p$$

tj.

$$\sigma_p = \frac{-VaR_\alpha - \mu_p}{z_\alpha}$$

Na taj način dobijamo

$$\begin{aligned} \mu_p &= s \left( \frac{-VaR_\alpha - \mu_p}{z_\alpha} \right) + C_0 \mu_f \\ \mu_p &= -\frac{s VaR_\alpha}{z_\alpha} - \frac{s}{z_\alpha} \mu_p + C_0 \mu_f \\ \mu_p &= \left( 1 + \frac{s}{z_\alpha} \right) = C_0 \mu_f - \frac{s VaR_\alpha}{z_\alpha} \\ \mu_p &= -\frac{s VaR_\alpha}{z_\alpha + s} + \frac{z_\alpha \mu_f}{z_\alpha + s} C_0 \end{aligned}$$

Tačka preseka CML-a i efikasne granice kod bezrizičnog ulaganja je tržišni portfolio. Očekivana dobit za tržišni portfolio je

$$\mu_m = \frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0$$

To će nam pomoći da odredimo vrednost VaR-a za taj tržišni portfolio. U dobijenu jednačinu CML-a ubacujemo vrednost  $\mu_m$

$$\begin{aligned} \frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0 &= -\frac{s}{z_\alpha + s} VaR_\alpha + \frac{z_\alpha \mu_f}{z_\alpha + s} C_0 \\ VaR_\alpha &= \frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} \left( -\frac{s + z_\alpha}{s} \right) C_0 - \frac{z_\alpha \mu_f}{z_\alpha + s} \left( -\frac{z_\alpha + s}{s} \right) C_0 \\ &= \frac{-as + bs\mu_f - az_\alpha + b\mu_f z_\alpha + bz_\alpha \mu_f - c\mu_f^2 z_\alpha}{(b - c\mu_f)s} C_0 \\ &= \frac{-as + bs\mu_f - z_\alpha (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a)}{(b - c\mu_f)s} C_0 \\ &= \frac{-as + bs\mu_f - z_\alpha s^2}{(b - c\mu_f)s} C_0 \\ &= \frac{-a + b\mu_f - z_\alpha s}{b - c\mu_f} C_0 \end{aligned}$$

Na ovaj način smo dobili vrednost VaR-a za tržišni portfolio.

$$VaR_m = \frac{-a + b\mu_f - z_\alpha s}{b - c\mu_f} C_0$$

$(VaR_m, \mu_m)$  je tržišni portfolio u *mean-VaR modelu*. Alokacija  $\theta_m$  ostaje ista kao u *mean-standard deviation modelu*.

## 4 Optimalni portfoliji

Kao i u *mean-standard deviation* modelu, i u *mean-VaR* modelu postoje različiti optimalni portfoliji. Pomenućemo neke od njih. Investitor može naprimer investirati u portfolio koji minimizuje VaR ili u tangentni portfolio koji maksimizuje količnik  $\frac{mean}{VaR}$ . Takodje možemo govoriti i o optimalnom Telserovom portfoliju koji za zadatu vrednost VaR-a maksimizuje očekivanu dobit. Razmotrimo sada svaki od navedenih portfolija.

### 4.1 Portfolio koji minimizuje VaR

Podsetimo se formule za  $VaR_\alpha$

$$VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}$$

Sada želimo da minimizujemo  $VaR$ . To možemo učiniti izjednačavanjem prvog izvoda ove funkcije po promenljivoj  $\mu_p$  sa nulom.

$$\frac{dVaR_\alpha}{d\mu_p} = -1 - \frac{z_\alpha(c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} = 0$$

$$\frac{z_\alpha(c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} = -1$$

$$z_\alpha(bC_0 - c\mu_p) = d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}$$

$$\frac{z_\alpha^2(c^2\mu_p^2 - 2bC_0c\mu_p + b^2C_0^2)}{d^2} = \frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)$$

$$z_\alpha^2c^2\mu_p^2 - 2bC_0c\mu_pz_\alpha^2 + z_\alpha^2b^2C_0^2 = dc\mu_p^2 - 2bC_0d\mu_p + adC_0^2$$

$$\mu_p^2(z_\alpha^2c^2 - dc) + \mu_p(2bC_0d - 2bcC_0z_\alpha^2) + z_\alpha^2b^2C_0^2 - adC_0^2 = 0$$

$$\mu_p = \frac{2bC_0(cz_\alpha^2 - d) \pm \sqrt{(1)}}{2(z_\alpha^2c^2 - dc)}$$

$$(1) = 4b^2C_0^2d^2 + 4b^2c^2C_0^2z_\alpha^4 - 8b^2C_0^2cdz_\alpha^2 - 4z_\alpha^4c^2b^2C_0^2 + 4adC_0^2c^2z_\alpha^2 + 4cdz_\alpha^2b^2C_0^2 - 4ad^2cC_0^2$$

$$= 4d^2C_0^2(b^2 - ac) + 4adC_0^2c^2z_\alpha^2 - 4b^2C_0^2cdz_\alpha^2$$

$$= -4d^3C_0^2 + 4C_0^2z_\alpha^2cd(ac - b^2)$$

$$= -4d^3C_0^2 + 4C_0^2z_\alpha^2cd^2 \text{ (koristili smo da je } d = ac - b^2)$$

$$\begin{aligned}
\mu_p &= \frac{bC_0(cz_\alpha^2-d)+C_0d\sqrt{z_\alpha^2c-d}}{z_\alpha^2c^2-dc} \\
&= \frac{bC_0(cz_\alpha^2-d)}{c(z_\alpha^2c-d)} + \frac{C_0d\sqrt{z_\alpha^2c-d}}{c(z_\alpha^2c-d)} \\
&= \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}}\right)C_0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mu_{mvr} = \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}}\right)C_0}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
VaR_{mvr} &= -\mu_{mvr} - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{mvr}^2 - 2bC_0\mu_{mvr} + aC_0^2)} \\
&= -\frac{b}{c}C_0 - \frac{dC_0}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}} - z_\alpha \sqrt{(2)}
\end{aligned}$$

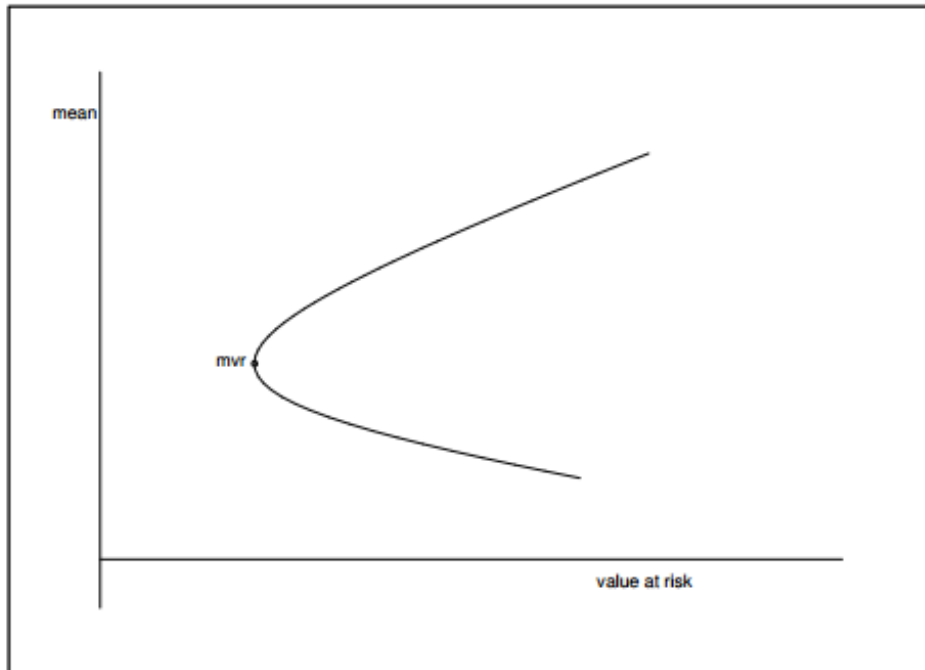
$$\begin{aligned}
\mu_{mvr}^2 &= \frac{b^2C_0^2}{c^2} + \frac{d^2C_0^2}{c^2(z_\alpha^2c-d)} + 2\frac{bdC_0^2}{c^2\sqrt{z_\alpha^2c-d}} \\
(2) &= \frac{1}{d}\left(\frac{b^2C_0^2}{c} + \frac{d^2C_0^2}{c(z_\alpha^2c-d)} + 2\frac{bdC_0^2}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}} - 2bC_0^2\left(\frac{b}{c} + \frac{d}{c(z_\alpha^2c-d)}\right) + aC_0^2\right) \\
&= \frac{1}{d}\left(-\frac{b^2C_0^2}{c} + \frac{d^2C_0^2}{c(z_\alpha^2c-d)} + aC_0^2\right) \\
&= \frac{1}{d}\frac{-b^2C_0^2z_\alpha^2c + b^2dC_0^2 + ac^2C_0^2z_\alpha^2 - acdC_0^2 + d^2C_0^2}{c(z_\alpha^2c-d)} \\
&= \frac{1}{d}\frac{z_\alpha^2C_0^2c(ac-b^2) + dC_0^2(b^2-ac) + d^2C_0^2}{c(z_\alpha^2c-d)} \\
&= \frac{1}{d}\frac{z_\alpha^2C_0^2cd - d^2C_0^2 + d^2C_0^2}{c(z_\alpha^2c-d)} \\
&= \frac{z_\alpha^2C_0^2}{z_\alpha^2c-d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VaR_{mvr} &= -\frac{b}{c}C_0 - \frac{dC_0}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}} + z_\alpha \frac{z_\alpha C_0}{\sqrt{z_\alpha^2c-d}} \\
&= -\frac{b}{c}C_0 - \frac{dC_0 - z_\alpha^2cC_0}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}} \\
&= -\frac{b}{c}C_0 + \frac{C_0(z_\alpha^2c-d)}{c\sqrt{z_\alpha^2c-d}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{VaR_{mvr} = C_0\left(-\frac{b}{c} + \frac{\sqrt{z_\alpha^2c-d}}{c}\right)}$$

$$\boxed{\sigma_{mvr} = -\frac{z_\alpha C_0}{\sqrt{z_\alpha^2c-d}}}$$

Dobijeni portfolio je prikazan na slici



Slika 3: Minimum VaR portfolio

## 4.2 Tangentni VaR portfolio

Tangentni VaR portfolio je linija koja prolazi kroz koordinatni početak, a tangenta je na efikasnu granicu. On predstavlja portfolio sa maksimalnim količnikom

$$\frac{\text{mean}}{\text{VaR}}$$

Kod ovog portfolija nagib tangentne linije mora biti jednak nagibu efikasne granice, pa na taj način dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta VaR_{tvr}}{\Delta \mu_{tvr}} &= \frac{dVaR_{\alpha}}{d\mu_p} \Big|_{\mu_p = \mu_{tvr}} \\
\frac{-\mu_{tvr} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tvr}^2 - 2bC_0\mu_{tvr} + aC_0^2)} - 0}{\mu_{tvr} - 0} &= -1 - \frac{z_{\alpha}(c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} \Big|_{\mu_p = \mu_{tvr}} \\
\mu_{tvr} d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)} - z_{\alpha} d\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) \\
&= -\mu_{tvr} d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)} - \mu_{tvr} z_{\alpha}(c\mu_{tvr} - bC_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{\alpha}(c\mu_{tvr}^2 - 2bC_0\mu_{tvr} + aC_0^2) &= \mu_{tvr}^2 c z_{\alpha} - bC_0 z_{\alpha} \mu_{tvr} \\
bC_0 z_{\alpha} \mu_{tvr} - aC_0^2 z_{\alpha} &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mu_{tvr} = \frac{aC_0^2 z_{\alpha}}{bC_0 z_{\alpha}} = \frac{aC_0}{b}}$$

Primitimo da dobijamo isti rezultat kao za tangenti portfolio u *mean-standard deviation* modelu, što je jedna zanimljiva činjenica.

$$\mu_{tvr} = \mu_{tg}$$

Dobijeni rezultat ima smisla kada posmatramo na sledeći način

$$\max \frac{\mu_p}{VaR_{\alpha}} = \max \frac{\mu_p}{-\mu_p - z_{\alpha} \sigma_p} = \min \frac{-\mu_p - z_{\alpha} \sigma_p}{\mu_p} = \min \frac{-z_{\alpha} \sigma_p}{\mu_p} = \max \frac{\mu_p}{\sigma_p}$$

Odgovarajuća vrednost za VaR je

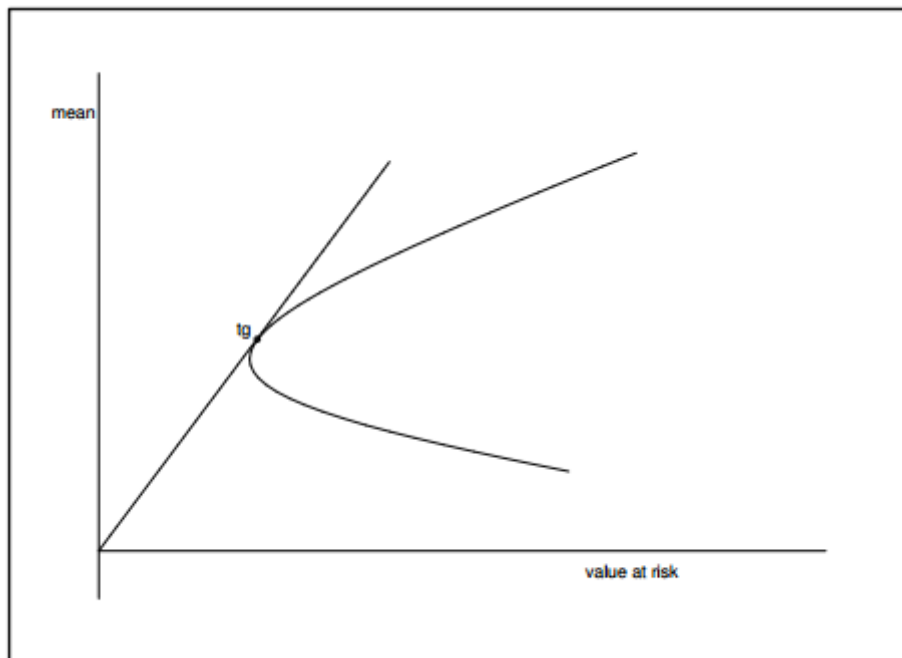
$$\begin{aligned}
VaR_{tg} &= -\mu_{tg} - z_{\alpha} \sigma_{tg} \\
&= -\frac{aC_0}{b} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{1}{d}(c\frac{a^2 C_0^2}{b^2} - 2bC_0 \frac{aC_0}{b} + aC_0^2)} \\
&= -\frac{aC_0}{b} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{a^2 C_0^2 c}{db^2} - \frac{2abC_0^2}{bd} + \frac{aC_0^2}{d}} \\
&= -\frac{aC_0}{b} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{a^2 C_0^2 c - 2ab^2 C_0^2 + ab^2 C_0^2}{db^2}} \\
&= -\frac{aC_0}{b} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{a^2 C_0^2 c - ab^2 C_0^2}{db^2}} \\
&= -\frac{aC_0}{b} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{aC_0^2 (ac - b^2)}{db^2}} \\
&= -\frac{aC_0}{b} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{aC_0^2 d}{db^2}} \\
&= -\frac{aC_0}{b} - z_{\alpha} C_0 \sqrt{\frac{a}{b^2}} \\
&= -C_0 \left( \frac{a}{b} + z_{\alpha} \frac{\sqrt{a}}{b} \right) \\
&= -C_0 \frac{1}{b} (a + z_{\alpha} \sqrt{a})
\end{aligned}$$



$$VaR_{tg} = -C_0 \frac{\sqrt{a}}{b} (\sqrt{a} + z_\alpha)$$

$$\sigma_{tg} = \frac{\sqrt{a}}{b} C_0$$

Na sledećoj slici možemo videti kako izgleda pomenuti portfolio



Slika 4: Tangentni VaR portfolio

Alokacija  $\theta_{tg}$  ostaje ista kao u *mean-standard deviation* modelu.

### 4.3 Telserov portfolio

Telserov portfolio je portfolio koji maksimizuje očekivanu dobit ukoliko zadamo ograničenje za VaR. Na taj način Telserov problem možemo napisati kao

$$\max\{\mu_p | VaR_\alpha \leq VaR_c, \bar{1}^T \theta = C_0, \mu_p = \mu^T \theta\}$$

gde je  $VaR_c$  maksimalna vrednost koju VaR može uzeti.

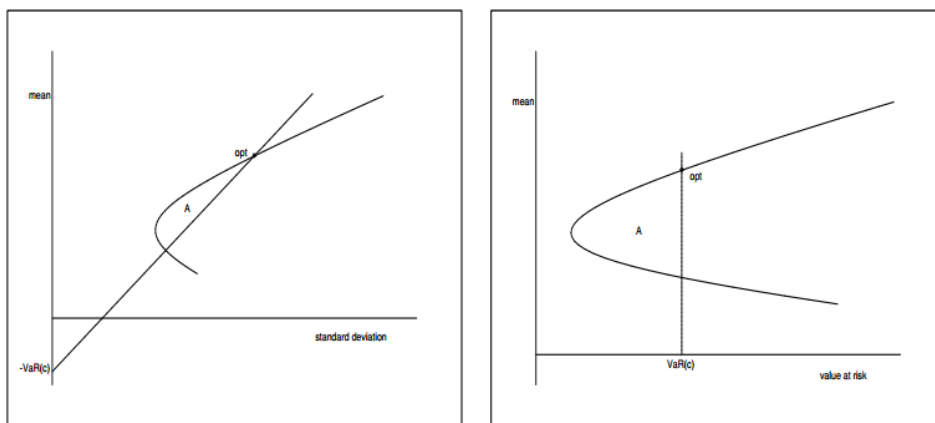
Ukoliko pretpostavimo da su dobiti eliptički raspodeljene, prvi uslov postaje

$$\begin{aligned} VaR_\alpha \leq VaR_c &\Leftrightarrow VaR_c \geq -\mu_p - z_\alpha \sigma_p \\ &\Leftrightarrow \mu_p \geq -VaR_c - z_\alpha \sigma_p \end{aligned}$$

Sada Telserov portfolio možemo predstaviti kao

$$\max\{\mu_p | \mu_p \geq -VaR_c - z_\alpha \sigma_p, \bar{1}^T \theta = C_0, \mu_p = \mu^T \theta, \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta\}$$

Na sledećim graficima možemo primetiti razliku izmedju *mean-standard deviation* i *mean-VaR* modela.



Slika 5: Optimalni Telserov portfolio

Optimalni portfolio leži u oblasti A, pri čemu ga možemo naći maksimiziranjem očekivane dobit i to je tačka opt. Grafici prikazuju zašto je zgodnije raditi sa *mean-VaR* modelom. Tada ograničenje za VaR postaje vertikalna linija, a mnogo je lakše raditi u tom slučaju. Optimalnu tačku računamo tako što postavimo ograničenje da je  $VaR_\alpha = VaR_c$ , što daje sledeće rezultate.

$$\begin{aligned}
VaR_c &= -\mu_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)} \\
\mu_p + VaR_c &= -z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)} \\
\frac{\mu_p^2 + VaR_c^2 + 2\mu_p VaR_c}{z_\alpha^2} &= \frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) \\
d\mu_p^2 + dVaR_c^2 + 2d\mu_p VaR_c &= z_\alpha^2 c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p z_\alpha^2 + z_\alpha^2 aC_0^2 \\
(d - z_\alpha^2 c)\mu_p^2 + (2dVaR_c + 2bC_0 z_\alpha^2)\mu_p + dVaR_c^2 - z_\alpha^2 aC_0^2 &= 0 \\
\mu_p &= \frac{-2dVaR_c - 2bC_0 z_\alpha^2 \pm \sqrt{(3)}}{2d - 2z_\alpha^2 c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) &= 4d^2 VaR_c^2 + 4b^2 C_0^2 z_\alpha^4 + 8dbC_0 VaR_c z_\alpha^2 - 4d^2 VaR_c^2 + 4dz_\alpha^2 aC_0^2 + \\
&4z_\alpha^2 cdVaR_c^2 - 4z_\alpha^4 acC_0^2 \\
&= 4C_0^2 z_\alpha^4 (b^2 - ac) + 4dz_\alpha^2 aC_0^2 + 8dbC_0 VaR_c z_\alpha^2 + 4z_\alpha^2 cdVaR_c^2 \\
&= 4C_0^2 z_\alpha^2 d(a - z_\alpha^2) + 8dbC_0 VaR_c z_\alpha^2 + 4z_\alpha^2 cdVaR_c^2
\end{aligned}$$

$$\mu_p = \frac{-dVaR_c - bC_0 z_\alpha^2 - z_\alpha \sqrt{d(C_0^2(a - z_\alpha^2) + 2bC_0 VaR_c + cVaR_c^2)}}{d - z_\alpha^2 c}$$

$$\boxed{\mu_{opt} = \frac{dVaR_c + bC_0 z_\alpha^2 + z_\alpha \sqrt{d(C_0^2(a - z_\alpha^2) + 2bC_0 VaR_c + cVaR_c^2)}}{z_\alpha^2 c - d}}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\sigma_{opt} &= \frac{-VaR_c - \mu_{opt}}{z_\alpha} \\
&= \frac{-VaR_c - \frac{dVaR_c + bC_0 z_\alpha^2 + z_\alpha \sqrt{d(C_0^2(a - z_\alpha^2) + 2bC_0 VaR_c + cVaR_c^2)}}{z_\alpha^2 c - d}}{z_\alpha} \\
&= \frac{-VaR_c z_\alpha^2 c + dVaR_c - dVaR_c - bC_0 z_\alpha^2 + z_\alpha \sqrt{d(C_0^2(a - z_\alpha^2) + 2bC_0 VaR_c + cVaR_c^2)}}{z_\alpha(z_\alpha^2 c - d)} \\
&= \frac{-VaR_c z_\alpha c - bC_0 z_\alpha + \sqrt{d(C_0^2(a - z_\alpha^2) + 2bC_0 VaR_c + cVaR_c^2)}}{z_\alpha^2 c - d}
\end{aligned}$$

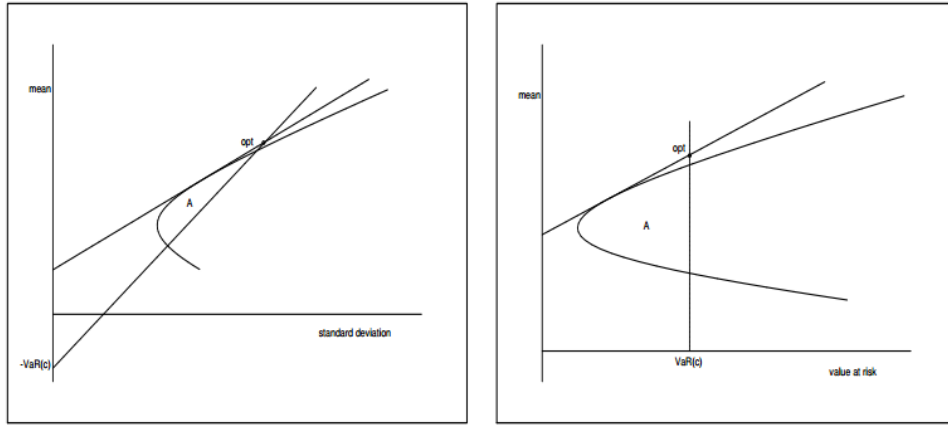
$$\boxed{\sigma_{opt} = \frac{VaR_c z_\alpha c + bC_0 z_\alpha - \sqrt{d(C_0^2(a - z_\alpha^2) + 2bC_0 VaR_c + cVaR_c^2)}}{d - z_\alpha^2 c}}$$

Alokaciju  $\theta_{opt}$  možemo naći koristeći činjenicu da optimalni portfolio leži na efikasnoj granici, pa kao i u slučaju Markovičevog portfolija, imamo

$$\theta_{opt} = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((c\mu - b\bar{1})\mu_{opt} + (a\bar{1} - b\mu)C_0)$$

#### 4.4 Bezrizični Telserov portfolio

Pri bezrizičnom ulaganju efikasna granica se menja u CML (*capital market line*). Optimalni Telserov portfolio u ovom slučaju je portfolio u kome je maksimizovana očekivana dobit za odgovarajuću vrednost VaR-a.



Slika 6: Optimalni bezrizični Telserov portfolio

Traženi portfolio je tačka *opt*, koja predstavlja tačku preseka CML-a i odgovarajućeg ograničenja za VaR. U *mean-VaR* modelu, CML je data sa

$$\mu_p = -\frac{sVaR_\alpha}{z_\alpha + s} + \frac{z_\alpha \mu_f}{z_\alpha + s} C_0$$

a mi uzimamo slučaj kada je  $VaR_\alpha = VaR_c$

$$\sigma_{opt} = \frac{\mu_{opt} + VaR_c}{-z_\alpha} = \frac{-sVaR_c + C_0 z_\alpha \mu_f + z_\alpha VaR_c + sVaR_c}{z_\alpha + s}$$

$$\sigma_{opt} = -\frac{C_0 \mu_f + VaR_c}{z_\alpha + s}$$

Neka  $\Theta_m$  predstavlja udeo ulaganja u tržišni portfolio u odnosu na ukupno ulaganje, a  $\Theta_f$  udeo bezrizičnog ulaganja. Tada je

$$\Theta_m + \Theta_f = 1$$

Kako dobit pri bezrizičnom ulaganju nema standardnu devijaciju, dobijamo

$$\sigma_{opt} = \sqrt{\Theta_m^2 \sigma_m^2 + \Theta_f^2 \sigma_f^2} = \Theta_m \sigma_m$$

Znamo kolika je standardna devijacija tržišnog portfolija, pa je

$$\begin{aligned} \Theta_m &= \frac{\sigma_{opt}}{\sigma_m} = \frac{-\frac{C_0 \mu_f + VaR_c}{z_\alpha + s}}{\frac{s}{b - c\mu_f} C_0} \\ &= \frac{(C_0 \mu_f + VaR_c)(c\mu_f - b)}{s(z_\alpha + s)C_0} \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} \Theta_f = 1 - \Theta_m &= \frac{sC_0(z_\alpha + s) - (C_0 \mu_f + VaR_c)(c\mu_f - b)}{s(z_\alpha + s)C_0} \\ &= \frac{C_0(sz_\alpha + s^2 - \mu_f^2 c + \mu_f b) + VaR_c(b - c\mu_f)}{sC_0(z_\alpha + s)} \\ &= \frac{C_0(sz_\alpha + c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a - \mu_f^2 c + \mu_f b) + VaR_c(b - c\mu_f)}{sC_0(z_\alpha + s)} \\ &= \frac{C_0(sz_\alpha - 2b\mu_f + a) + VaR_c(b - c\mu_f)}{sC_0(z_\alpha + s)} \end{aligned}$$

Koristili smo da je

$$s = \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$$

Optimalna alokacija pri bezrizičnom ulaganju je

$$\theta_{opt} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \\ \theta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_m \theta_m \\ \Theta_f C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{VaR_c + \mu_f C_0}{s(s + z_\alpha)} \Sigma^{-1} (\mu_f \bar{1} - \mu) \\ \frac{(a - b\mu_f + sz_\alpha)C_0 + VaR_c(b - c\mu_f)}{s(z_\alpha + s)} \end{pmatrix}$$

## Literatura

- [1] Marnix Engels, Portfolio optimization: Beyond Markowitz, Master's Thesis, 2004
- [2] Slobodanka Janković, Bojana Milošević, Elementi finansijske matematike, 2017



Универзитет у Београду, Математички факултет

## *EVA* и *RAROC*

Аутори:  
Сандра Белић  
Марина Николић

Број индекса:  
1053/2016  
1059/2016

21.3.2017.

## 1 *EVA* и *RAROC*

У овом поглављу ћемо разматрати одређене моделе али са различитим функцијама посматрања. Оне су базиране на тзв. додатој економској вредности (*Economic value added*) и приходу од капитала прилагођеног ризику (*Risk adjusted return of capital*).

### *EVA*

Додатну економску вредност (*EVA*) дефинишемо:

*EVA* = очекивани принос портфолија - утрошак капитала.

Што је већа *EVA* то је бољи учинак за инвеститора. Очекивани принос портфолија дат је са  $E(R_p)$ . Али пошто имамо трошкове капитала очекивани принос је коригован за трошкове. Утрошак капитала садржи два параметра. То је стопа утрошка капитала  $r_{cap}$  помножен са количином капитала. Није строго дефинисано шта је количина капитала. Неки сматрају да је то почетни капитал  $C_0$ , а неки сматрају да је то *VaR* (или утрошени капитал). *EVA* представља број, а не проценат.

### *RAROC*

Дефинишемо *RAROC* на следећи начин:

$$RAROC = \frac{\text{очекивани принос портфолија}}{\text{количина капитала}}$$

Што је већи *RAROC* то је већи учинак инвеститора. Количину капитала можемо дефинисати или као почетни капитал  $C_0$  или као утрошени капитал *VaR*.

	Алоцирани капитал	Утрошени капитал
<i>EVA</i>	$E(R_p) - r_{cap}$	$E(R_p) - VaR$
<i>RAROC</i>	$\frac{E(R_p)}{C_0}$	$\frac{E(R_p)}{VaR}$

Табела 1: Начини израчунавања *EVA* – *e* и *RAROC* – *a*

## 2 Нови Телсерови модели

Видели смо четири нова начина за мерење успеха у табели 1 која ће бити имплементирана у Телсеров модел са *VaR*



ограничењем. Даље ћемо се бавити решавањем четири нова добијена Телсерова модела.

## 2.1 $EVA$ са алоцираним капиталом

Користећи  $EVA$  са алоцираним капиталом као функцију за креирање Телсеровог модела, добијамо следећи проблем оптимизације:

$$\max \left\{ E(R_p) - r_{cap}C_0 \mid E(R_p) = \mu_p, P\{R_p \leq -VaR_c\} \leq \alpha, \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}.$$

где је  $VaR_c$  максимални дозвољени портфолио за  $VaR$ . Како је  $r_{cap}C_0$  константа, претходни проблем се може записати и на следећи начин:

$$\max \left\{ E(R_p) \mid E(R_p) = \mu_p, VaR_\alpha \leq VaR_c, \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}.$$

Добијамо Телсеров портфолио, те су решења дата са:

$$\mu_{opt} = \mu_T = \frac{bz_\alpha^2 C_0 + dVaR_c - \sqrt{d((a - z_\alpha^2)C_0^2 + 2bVaR_c C_0 + cVaR_c^2)}}{cz_\alpha^2 - d}$$

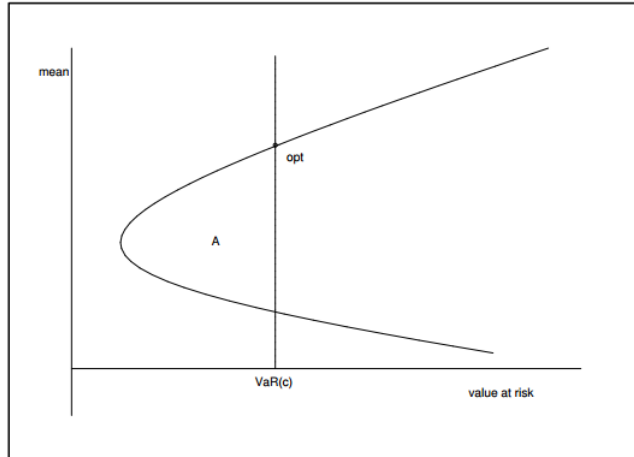
а одговарајућа стандардна девијација:

$$\sigma_{opt} = \sigma_T = \frac{z_\alpha^2(bC_0 + cVaR_c) - \sqrt{d((a - z_\alpha^2)C_0^2 + 2bVaR_c C_0 + cVaR_c^2)}}{d - cz_\alpha^2}$$

а  $VaR$  је једнак са  $VaR_c$ . Одговарајућа оптимална алокација је:

$$\theta_{opt} = \frac{1}{d} \Sigma^{-1}((c\mu - b\bar{1})\mu_{opt} + (a\bar{1} - b\mu)C_0).$$

У простору  $mean - VaR$  то можемо представити графички:



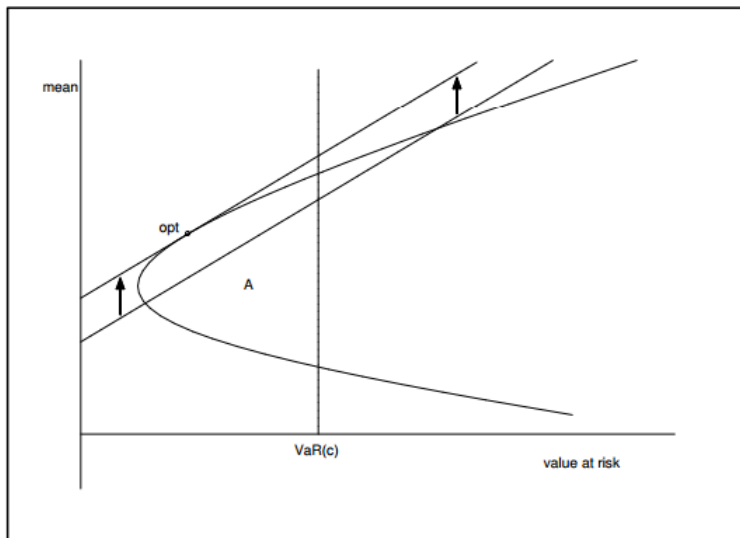
Слика 1: Оптимални портфолио  $EVA$  са алоцираним капиталом

## 2.2 $EVA$ са утрошеним капиталом

Ако узмемо искоришћени капитал уместо алоцираног, проблем оптимизације постаје

$$\max \left\{ E(R_p) - r_{cap} VaR_\alpha \mid E(R_p) = \mu_p, VaR_\alpha \leq VaR_c, \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}.$$

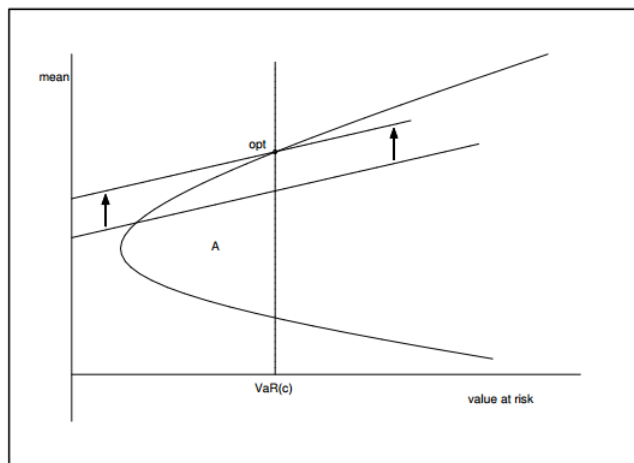
Функција  $E(R_p) - r_{cap} VaR_\alpha = u$  се налази на графику  $mean - VaR$ . То је права  $\mu = u + r_{cap} VaR_\alpha$ . Максимизирање  $EVA - e$  представља максимизирање праве  $u$ , или померање линије подручја  $A$ , док је коефицијент нагиба  $r_{cap}$  константан. Ова линија се назива  $EVA$  линија.



Слика 2: Померање *EVA* линије са великим нагибом  $r_{cap}$

Померајући *EVA* линију што је више могуће добијамо оптимални портфолио. Као што видимо, оптимални портфолио се разликује од Телсерове тачке. Нагиб *EVA* линије ( $r_{cap}$ ) једнак је нагибу ефикасне границе. Али овај оптимални портфолио зависи од вредности ( $r_{cap}$ ), што је нагиб *EVA* линије.

Ако је нагиб *EVA* линије много мањи (што значи да је ( $r_{cap}$ ) много мање) ми добијамо следећу слику:



Слика 3: Померање  $EVA$  линије са мањим нагибом  $r_{cap}$

Примеримо да највиша  $EVA$  линија пресеца ефикасну границу у Телсеровој тачки, и оптимум није у тачки додира ефикасне границе и  $EVA$  линије.

Дакле, оптимална алокација је или тачка где је нагиб  $EVA$  линије и ефикасне границе исти или у Телсеровој тачки. Израчунаћемо за коју вредност нагиба достижемо тачку преокрета, тачку где је нагиб  $EVA$  линије и ефикасне границе исти баш у Телсеровој тачки. Морамо изједначити нагиб ефикасне границе у Телсеровој тачки и нагиб  $EVA$  линије тј.

$$\left. \frac{d\mu_p}{dVaR_\alpha} \right|_{\mu=\mu_T} = r_{cap}$$

што је еквивалентно

$$\left. \frac{dVaR_\alpha}{d\mu_p} \right|_{\mu=\mu_T} = \frac{1}{r_{cap}}.$$

Присетимо се, ефикасна граница је дата са

$$VaR_\alpha = -\mu - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu^2 - 2bC_0\mu + aC_0^2)}.$$

Извод претходног израза по  $\mu$  је

$$\left. \frac{dVaR_\alpha}{d\mu_p} \right|_{\mu=\mu_T} = -1 - \frac{z_\alpha(c\mu - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu^2 - 2bC_0\mu + aC_0^2)}} = \frac{-d\sigma - z_\alpha(c\mu - bC_0)}{d\sigma}.$$

Одатле следи

$$r_{cap} = \frac{d\sigma_T}{-d\sigma_T - z_\alpha(c\mu_T - bC_0)} = r_{cap}^*$$

где су  $\mu_T$  и  $\sigma_T$  вредности Телсерове тачке. Јављају се две ситуације: прва ако је  $r_{cap} > r_{cap}^*$  и друга ако је  $r_{cap} \leq r_{cap}^*$

Сада ћемо израчунати оптималне вредности. Оптимална вредност у ситуацији 2 је Телсеров портфолио, што смо већ израчунали. Сада рачунамо оптималне вредности у ситуацији 1. У оптималној ситуацији нагиб ефикасне границе је једнак са  $r_{cap}$ , где је  $r_{cap} > r_{cap}^*$ . Дакле

$$\frac{dVaR_\alpha}{d\mu_p}\Big|_{\mu=\mu_T} = \frac{1}{r_{cap}}.$$

$$-1 - \frac{z_\alpha(c\mu - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu^2 - 2bC_0\mu + aC_0^2)}} = \frac{1}{r_{cap}}.$$

Приметимо да ово можемо записати и

$$-1 - \frac{1}{r_{cap}} - \frac{z_\alpha(c\mu - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu^2 - 2bC_0\mu + aC_0^2)}} = 0.$$

Ако помножимо добијени израз са  $\frac{r_{cap}}{r_{cap}+1}$ , добијамо

$$-1 - \frac{\frac{z_\alpha r_{cap}}{r_{cap}+1}(c\mu - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu^2 - 2bC_0\mu + aC_0^2)}} = 0.$$

Означимо  $K = \frac{z_\alpha r_{cap}}{r_{cap}+1}$ . Приметимо да је  $K < 0$ .

Добијамо

$$-1 - \frac{K(c\mu - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu^2 - 2bC_0\mu + aC_0^2)}} = 0.$$

Одатле добијамо да је

$$r_{opt} = \left(b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}}\right)\frac{1}{c}C_0.$$

Одговарајућа стандардна девијација је

$$\sigma_{opt} = d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu^2 - 2bC_0\mu + aC_0^2)} = \frac{-K}{\sqrt{cK^2 - d}}C_0$$

а  $VaR$  је једнак

$$VaR_\alpha = -\mu_{opt}z_\alpha\sigma_{opt} = \left(-\frac{b}{c} + \frac{cz_\alpha K - d}{c\sqrt{cK^2 - d}}\right)C_0$$

и тиме смо израчунали оптимални портфолију за ситуацију 1.

Краће записано можемо рећи да  $\mu$  кад функција максимизује  $EVA - u$  са утрошеним капиталом изгледа:

$$r_{opt} = \left(b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}}\right) \frac{1}{c} C_0 \text{ ако } r_{cap} \leq r_{cap}^*$$

$$r_{opt} = r_T \text{ ако } r_{cap} > r_{cap}^*$$

где је  $K = \frac{z_\alpha r_{cap}}{r_{cap} + 1}$ .

Одговарајућа оптимална алокација је

$$\theta_{opt} = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((c\mu - b\bar{1})\mu_{opt} + (a\bar{1} - b\mu)C_0).$$

### 2.3 RAROC са алоцираним капиталом

Сада посматрамо функцију базирану на *RAROC* – *u*. Прво посматрамо случај са алоцираним капиталом. Проблем постаје:

$$\max \left\{ \frac{E(R_p)}{C_0} \mid E(R_p) = \mu_p, P\{\mu_p \leq -VaR_c\} \leq \alpha, \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}.$$

Како је  $C_0$  константа и преписујући *shortfall* ограничење горњи проблем постаје идентичан проблему:

$$\max \left\{ \frac{E(R_p)}{C_0} \mid E(R_p) = \mu_p, VaR_\alpha \leq VaR_c, \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

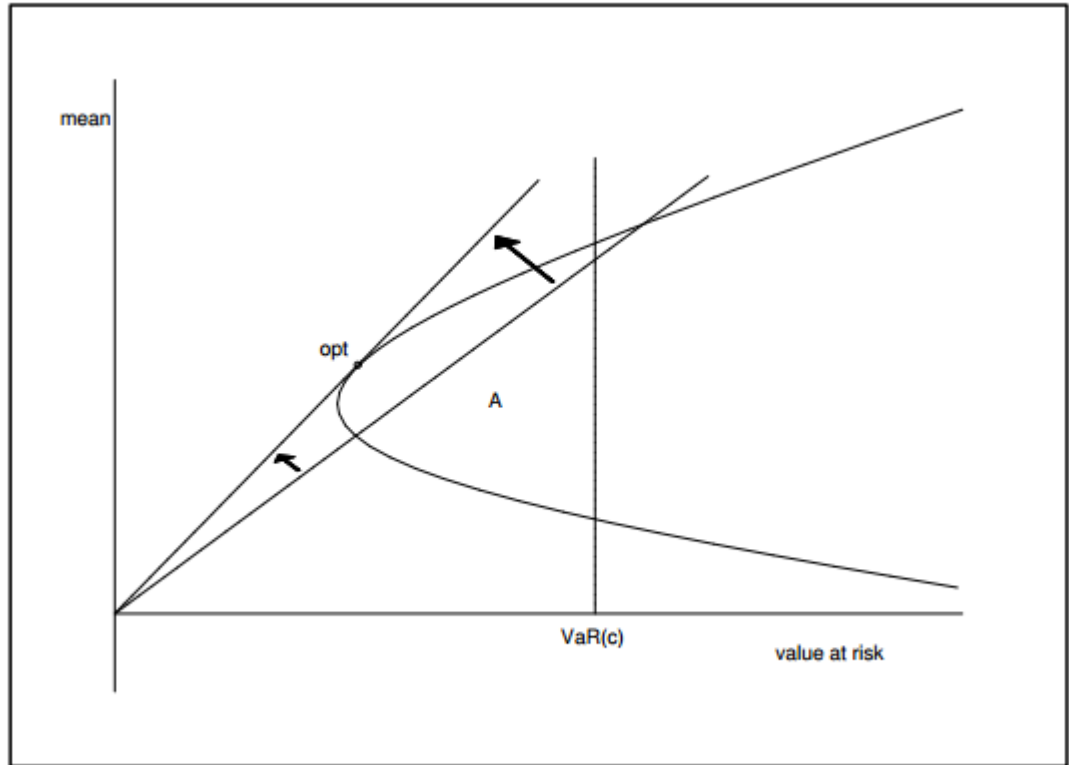
који је идентичан са Телсеровим проблемом као и проблем оптимизације *EVA* – *e* са алоцираним капиталом. Дакле решења за овај проблем су иста, као и решења проблема *EVA* – *e* са алоцираним капиталом.

### 2.4 RAROC са утрошеним капиталом

Проблем оптимизације *RAROC* – *a* када радимо са утрошеним капиталом је наћи

$$\max \left\{ \frac{E(R_p)}{VaR_\alpha} \mid E(R_p) = \mu_p, VaR_\alpha \leq VaR_c, \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}.$$

Непристрасна функција  $u \equiv \frac{\mu_p}{VaR_\alpha}$  може се записати као *RAROC* линија  $\mu_p = uVaR_\alpha$ , па максимизација *RAROC* – *a* одговара проналажењу највећег нагиба на *RAROC* линији, која има пресек са области А. Видимо да је оптимум додирна (тангентна) тачка у *mean* – *VaR* области.

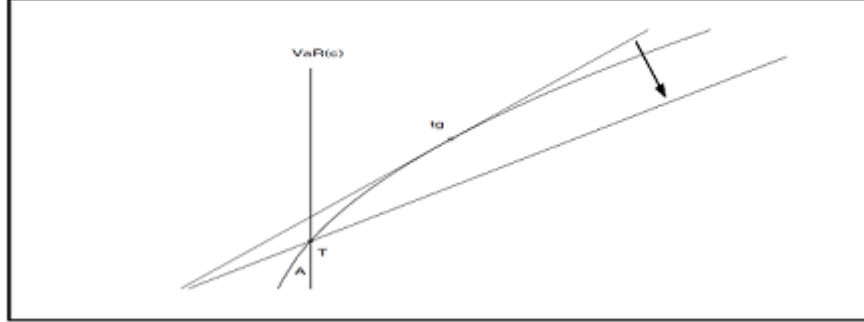


Слика 4: Максимизирање *RAROC* линије

То значи да:

$$\mu_{opt} = \frac{a}{b}C_0, \sigma_{opt} = \frac{\sqrt{a}}{b}C_0, VaR_{\alpha} = -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_{\alpha})C_0.$$

Приметимо да се може јавити проблем ако је тангентна вредност за  $VaR_{\alpha}, -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_{\alpha})C_0$ , на десној страни од линије  $VaR_c$ . Тада тангентни  $VaR_{\alpha}$  није у области А. Зато морамо да смањимо нагиб од *RAROC* линије док не додирне област А. Онда се оптимум помера до Телсерове тачке.



Слика 5: Случај када је  $VaR_\alpha$  ваћи од  $VaR_c$

Можемо закључити да је :

$$\mu_{opt} = \begin{cases} \mu_T & , \text{ ако је } VaR_c < -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0 \\ \mu_{tg} & , \text{ ако је } VaR_c \geq -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0 \end{cases}$$

и одговарајућа оптимална алокација  $\theta_{opt}$  се налази на ефикасној граници:

$$\theta_{opt} = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((c\mu - b\bar{1})\mu_{opt} + (a\bar{1} - b\mu)C_0).$$

### 3 Поређење $EVA$ и $RAROC$

Констатовали смо да је  $EVA$  број, а  $RAROC$  је проценат, али шта је веза између њихових оптималних вредности.

Ако користимо алоцирани капитал оптимални портфолији су им исти зато што су оба оптимална Телсерова портфолија. Интересантнији је случај са утрошеним капиталом. Имамо четири случајева:

◇ Први случај:

Претпоставимо да је  $r_{cap} \leq r_{cap}^*$  и  $VaR_c \leq -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$ . У оба



случаја је оптимални портфолио Телсеров, па је оптимум код  $EVA$  исти као оптимум код  $RAROC$ .

$$\mu_{opt}^{EVA} = \mu_{opt}^{RAROC}.$$

◇ Други случај:

Претпоставимо да је  $r_{cap} \leq r_{cap}^*$  и  $VaR_c > -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$ .

Онда оптималан  $EVA$  портфолио остаје Телсеров портфолио, али  $RAROC$  максимизујући портфолио се мења у тангентни портфолио, и имамо:

$$\mu_{opt}^{EVA} > \mu_{opt}^{RAROC}.$$

◇ Трећи случај:

Претпостављамо да је  $r_{cap} > r_{cap}^*$  и  $VaR_c \leq -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$

У овом случају,  $EVA$  максимизујући портфолио је тангентни портфолио па је мањи од Телсеровог портфолија, што је  $RAROC$  портфолио, па имамо да ја:

$$\mu_{opt}^{EVA} < \mu_{opt}^{RAROC}.$$

◇ Четврти случај:

Претпостављамо да је  $r_{cap} > r_{cap}^*$  и  $VaR_c > -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$ .

Имамо да је  $\mu_{opt}^{EVA} = (b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}})\frac{1}{c}C_0$ ,  $\mu_{opt}^{RAROC} = \frac{a}{b}C_0$ .

Рачунамо за које  $r_{cap}$  су ове две оптималне вредности једнаке.

Имамо:

$$(b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}})\frac{1}{c}C_0 = \frac{a}{b}C_0$$

$$\frac{b}{c} + \frac{d}{c\sqrt{cK^2 - d}} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{d}{c\sqrt{cK^2 - d}} = \frac{a}{b} - \frac{b}{c}$$

$$\frac{d}{c\sqrt{cK^2 - d}} = \frac{ac - b^2}{bc}$$

Знамо да је  $d = ac - b^2$  па после скраћивања имамо

$$\frac{1}{c\sqrt{cK^2 - d}} = \frac{1}{bc}$$

$$c\sqrt{cK^2 - d} = bc$$

$$\sqrt{cK^2 - d} = b$$

$$cK^2 - d = b^2$$

$$cK^2 = d + b^2$$

$$cK^2 = ac - b^2 + b^2$$

$$cK^2 = ac$$

$$K^2 = a$$

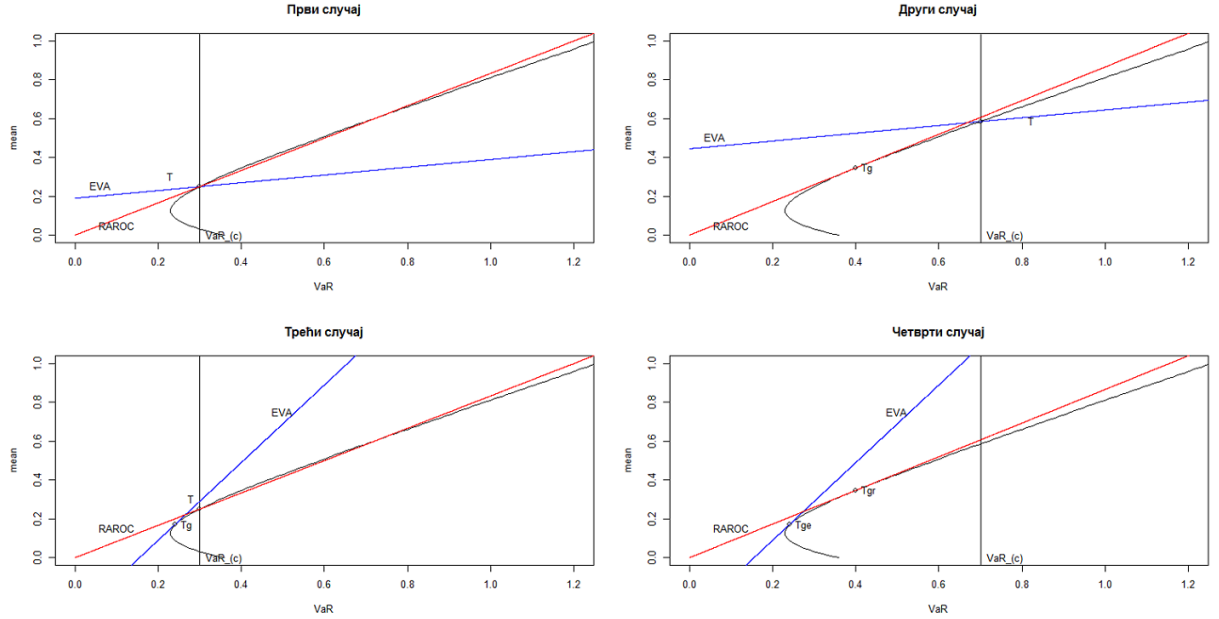
$$K = \pm\sqrt{a}$$

Како је  $K < 0$  имамо да је  $K = -\sqrt{a}$ .

Како је  $K = \frac{z_\alpha r_{cap}}{r_{cap} + 1}$  следи да је  $r_{cap} = \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha + \sqrt{a}}$ .

Ако је трошак стопе капитала једнак овој вредности, онда је  $\mu_{opt}^{EVA} = \mu_{opt}^{RAROC}$ . Ако је вредност  $r_{cap}$  мања, линија  $EVA$  има мањи нагиб од  $RAROC$  линија, па се оптимална средња вредност за  $EVA$  помера удесно па је  $\mu_{opt}^{EVA} > \mu_{opt}^{RAROC}$ . А ако је вредност  $r_{cap}$  већа, линија  $EVA$  има већи нагиб од  $RAROC$  линија, па се оптимум за  $EVA$  помера улево па је  $\mu_{opt}^{EVA} < \mu_{opt}^{RAROC}$ . Можемо закључити:

$$\begin{cases} \mu_{opt}^{EVA} < \mu_{opt}^{RAROC} & \text{ако је } r_{cap} > \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha + \sqrt{a}} \\ \mu_{opt}^{EVA} = \mu_{opt}^{RAROC} & \text{ако је } r_{cap} = \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha + \sqrt{a}} \\ \mu_{opt}^{EVA} > \mu_{opt}^{RAROC} & \text{ако је } r_{cap} < \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha + \sqrt{a}} \end{cases}$$



Слика 6: Поређење  $EVA$  и  $RAROC$  са утрошеним капиталом

## 4 Модели са безризичним асетом

Као са већином модела, можемо додати безризични асет са константном безризичном каматном стопом  $\mu_f$ . Ефикасна граница

се мења у *CML* (*CapitalMarketLine*), што је дато са:

$$\mu_p = \frac{-s}{z_\alpha + s} VaR_\alpha + \frac{z_\alpha \mu_f}{z_\alpha + s} C_0, \text{ где је } s = \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}, \text{ кад радимо у } mean - VaR \text{ простору.}$$

#### 4.1 *EVA* са алоцираним капиталом

Како је алоцирани капитал константа, проблем максимизације *EVA* са безризичним асетом је:

$$\max \left\{ E(R_p) - r_{cap} C_0 \mid E(R_p) = \mu_p = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f, P(R_p \leq -VaR_c) \leq \alpha, \bar{1}^T \theta + \theta_f = C_0 \right\}$$

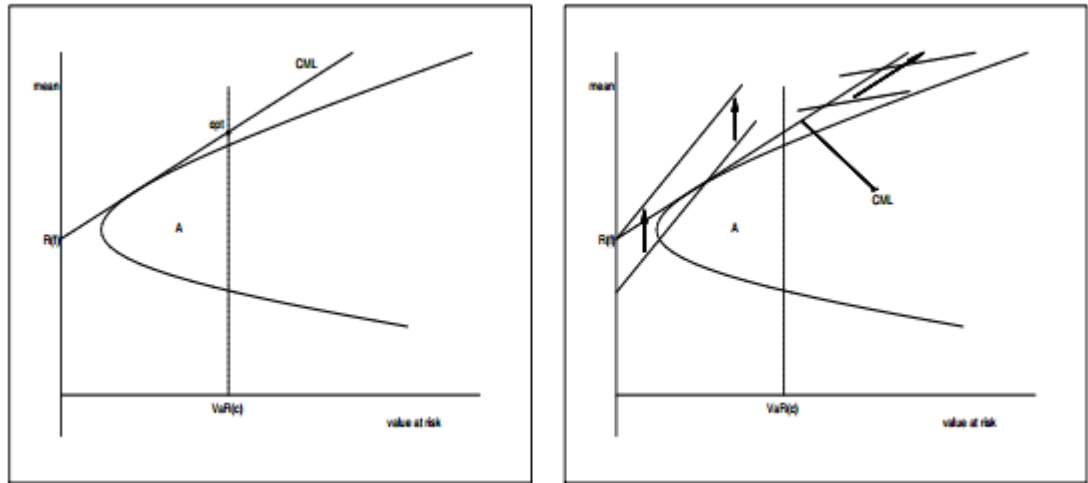
што се може записати као:

$$\max \left\{ \mu_p \mid \mu_p = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f, VaR_\alpha \leq VaR_c, \bar{1}^T \theta + \theta_f = C_0 \right\}$$

чије је решење баш оптималан Телсеров портфолио са безризичним асетом. Оптималне вредности су

$$\mu_{opt} = \frac{-s VaR_c + C_0 z_\alpha \mu_f}{z_\alpha + s}, \sigma_{opt} = -\frac{C_0 \mu_f + VaR_c}{z_\alpha + s}, VaR_\alpha = VaR_c.$$

Оптимална тачка је пресечна тачка *CML* линије и *VaR<sub>c</sub>* линије.



Слика 7: Максимизирање *EVA* линије са безризичним асетом

## 4.2 EVA са утрошеним капиталом

Ако радимо са *EVA* утрошеним капиталом, проблем се мења. Решење проблема

$$\max \left\{ E(R_p) - r_{cap} VaR_\alpha \mid E(R_p) = \mu_p = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f, VaR_\alpha \leq VaR_c, \bar{1}^T \theta + \theta_f = C_0 \right\}$$

је опет налажење максимума  $u$  у *EVA* линији  $\mu_p = u + r_{cap} VaR_\alpha$ , са нагибом  $r_{cap}$ . Али како је ефикасна граница *CML* (са нагибом  $\frac{-s}{z_\alpha + s}$  у *mean - VaR* простору), имамо три случаја.

Ако је нагиб *EVA* линије већи од нагиба *CML*, највећа *EVA* линија почиње у безризичној тачки, која ће бити оптимум.

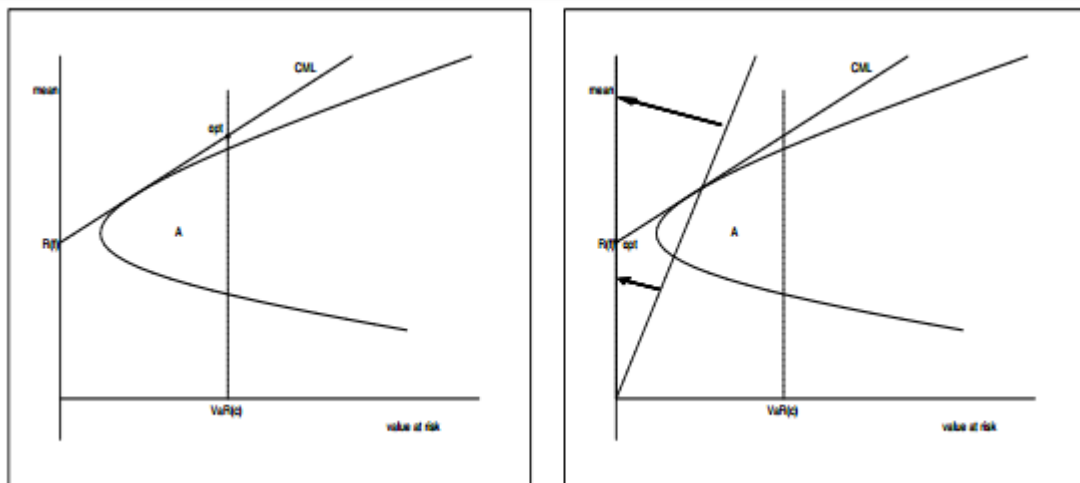
Ако је нагиб од *CML* већи од нагиба *EVA*, *EVA* линија ће се померити нагоре док не досегне Телсеров портфолио, који ће бити оптимум.

Ако су два нагиба иста, свака тачка на *CML* је оптимална, докле год је на левој страни  $VaR_c$  константне линије.

Јасно је да је максимизација *EVA* са утрошеним капиталом и имовине без ризика није добра, зато што је оптимална тачка на левом екстремуму или је Телсеров портфолио. Тако да кад имамо имовину без ризика, перформансе *EVA* нису одговарајуће објективне функције.

## 4.3 RAROC са алоцираним капиталом

За проблем максимизације *RAROC* –  $a$  са алоцираним капиталом и безризичним асетом, добијамо исти резултат као са *EVA* алоцираним капиталом и безризичним асетом. Како је максимизација  $\frac{E(R_p)}{C_0}$  (где је  $C_0$  константа) иста као максимизација  $E(R_p)$ , проналажење оптимума је баш Телсеров проблем са безризичним асетом. Па је оптимална тачка пресечна тачка од *CML* и  $VaR_c$  константне линије.



Слика 8: Максимизирање  $RAROC$  линије са безризичним асетом

#### 4.4 $RAROC$ са утрошеним капиталом

Ако се бавимо утрошеним капиталом решење је другачије. Знамо да максимизација количника  $\frac{E(R_p)}{VaR_\alpha}$  значи проналажење највећег нагиба  $RAROC$  линије. Можемо ротирати  $RAROC$  линију док не досегне безризичну тачку. Приметимо да се не зауставља на тангентној тачки, као што је у случају без безризичног асета. Како  $VaR$  иде у нулу док је померамо у безризичну тачку,  $RAROC$  количник тежи бесконачности.

### 5 Пример:

Претпоставимо да инвеститор инвестира 1 евро ( $C_0 = 1$ ). Он може да бира у коју од седам компанија може да инвестира 1 евро, то су *Elsevier*, *Fortis*, *Getronics*, *Heineken*, *Philips*, *Shell*, и *Unilever*. База података је из периода од 1.1.1990. до 31.10.2003..

Претпоставимо да принос портфолија има студентову  $t_6$  расподелу, и да је ниво поверења за  $VaR$  97.5% ( $1 - \alpha$ ), па је  $\alpha = 0.025$ .

$z_{0.025} = k_{0.025} \sqrt{\frac{n-2}{n}} = -2.447 \sqrt{\frac{6-2}{6}} = -1.998$ . Стопа утрошка капитала је 10% годишње. Како радимо на дневном нивоу, имамо да је  $r_{cap} = 1 - 0.9^{\frac{1}{250}} = 0.000421$ . У овом примеру ћемо узети да је

$$VaR_c = 0.05.$$

1.) EVA са алоцираним капиталом

Када имамо EVA са алоцираним капиталом, оптимални портфолио је Телсеров портфолио, па је

$$\mu_T = \frac{bz_{0.025}C_0 + dVaR_c - z_{0.025}\sqrt{d((a - z_{0.025}^2)C_0^2 + 2bVaR_cC_0 + cVar_c^2)}}{cz_{0.025}^2 - d} = 0.000753$$

$$\sigma_T = \frac{-VaR_c - \mu_T}{z_{0.025}} = 0.0507$$

$$\theta_T = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((c\mu - b\bar{1})\mu_T + (a\bar{1} + b\mu)C_0) = \begin{pmatrix} -0.1747505 \\ -0.2062316 \\ -0.1011052 \\ 1.6775940 \\ 0.3156858 \\ -0.3527087 \\ -0.1391418 \end{pmatrix}$$

Оптимум је на графику означен тачком  $T$ .

2.) EVA са утрошеним капиталом

Сада рачунамо  $r_{cap}^*$  да бисмо видели који портфолио је оптималан, тангентни или Телсеров.

$$r_{cap}^* = \frac{d\sigma_T}{-d\sigma_T - z_{0.025}(c\mu_T - bC_0)} = 0.0105 > r_{cap} \text{ па је оптимални портфолио опет Телсеров портфолио.}$$

3.) RAROC са алоцираним капиталом

У случају RAROC-a са алоцираним капиталом, оптимални портфолио је Телсеров портфолио.

4.) RAROC са утрошеним капиталом

Код RAROC - a са утрошеним капиталом проверавамо да ли је оптимални портфолио тангентни или Телсеров.

$$VaR_{tg} = -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_{0.025})C_0 = 0.0259 < 0.05 = VaR_c$$

па је оптимални портфолио тангетни.

$$\mu_{tg} = \frac{a}{b}C_0 = 0.000596$$

$$\sigma_{tg} = \frac{\sqrt{a}}{b}C_0 = 0.0132$$

$$\theta_{tg} = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((c\mu - b\bar{1})\mu_{tg} + (a\bar{1} + b\mu)C_0) = \begin{pmatrix} 0.03756899 \\ -0.06339551 \\ -0.02138607 \\ 0.72519937 \\ 0.08114285 \\ 0.10884831 \\ 0.13810108 \end{pmatrix}$$

То је тачка  $Tg$  на графику.

Сада ћемо израчунати за које  $r_{cap}$  ће  $EVA$  портфолио са утрошеним капиталом бити исти као  $RAROC$  портфолио са

утрошеним капиталом. Мора да важи  $r_{cap} = \frac{-\sqrt{a}}{z_{0.025} + \sqrt{a}} = 0.0177$  на дневном нивоу, што значи да је  $r_{cap} = 1 - (1 - 0.0177)^{250} = 0.989$  на годишњем нивоу. Значи, ако је стопа утрошеног капитала 98.9%, два оптимума су једнака.

## 5.) Модел са безризичним асетом

### 1. $EVA$ и $RAROC$ са алоцираним капиталом

У случају када имамо  $EVA$  и  $RAROC$  са алоцираним капиталом и безризичним асетом, оптимални портфолио јесте Телсеров портфолио са безризичном имовином, и оптимум је пресек  $CML - a$  и  $VaR_c$  линије. На графику је означена са  $R$ .

$$\mu_T = \frac{-sVaR_c + C_0z_\alpha\mu_f}{z_\alpha + s} = 0.0007711107$$

$$\sigma_T = \frac{C_0\mu_f + VaR_c}{z_\alpha + s} = 0.02541097$$

$$VaR_\alpha = VaR_c$$

$$\theta_T = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_N \\ \theta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{VaR_c + \mu_f C_0 \Sigma^{-1}(\mu_f \bar{1} - \mu)}{s(s + z_\alpha)} \\ \frac{(a - b\mu_f + sz_\alpha C_0 + VaR_c(b - c\mu_f))}{s(z_\alpha + s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.07570421 \\ -0.17768830 \\ -0.07916257 \\ 1.61721506 \\ 0.25895579 \\ -0.12571938 \\ 0.02844115 \\ -0.4295623 \end{pmatrix}$$

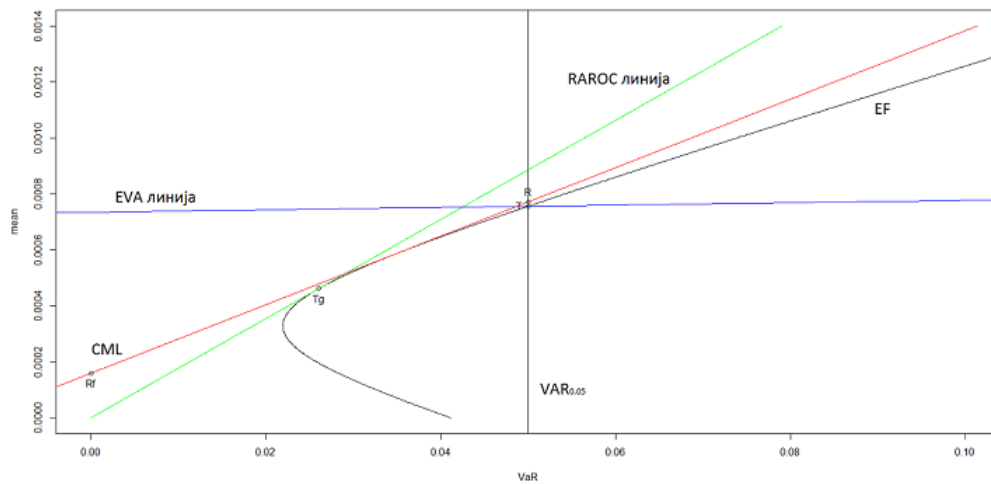
### 2. $EVA$ са утрошеним капиталом

Упоређујемо нагиб *EVA* линије и нагим од *CML*. Нагиб за *EVA* је  $r_{cap} = 0.0004213533$ , а нагиб за *CML* је  $\frac{-s}{z_{0.025} + s} = 0.01224377$ .

Како је нагиб за *CML* већи од нагиба за *EVA* имамо да је оптималан портфолио Телсеров портфолио за безризичном имовином.

### 3. *RAROC* са утрошеним капиталом

У случају *RAROC* – *a* са утрошеним капиталом оптимални портфолио је безризични портфолио који нам даје бесконачни *RAROC*.



Слика 9: Оптимални *EVA* и *RAROC* портфолии



# Modelovanje neizvesnosti ulaznih parametara

Predmet : Elementi finansijske matematike

Profesor : Bojana Milošević

Autori : Sonja Jovanović i Sandra Petakov

June 1, 2017

## 7.1. Uvod

Postoje nekoliko tehnika predloženih u literaturi za kontrolisanje neizvesnosti parametara. Osnovna zamisao je smanjenje osetljivosti optimalnog portfolija na neizvesnost unosa. Drugim rečima, ako se ulazni parametri  $\mu$  i  $\Sigma$  promene za mali iznos, optimalni portfolio ne bi trebalo mnogo da se promeni. Treba napomenuti da  $\mu$  predstavlja očekivani prinos portfolija (u evrima) a  $\Sigma$  matricu kovarijacija prinosa portfolija.

Frost i Savarino predlažu da se ograniče ponderi portfolija tako da jedna investicija ne postane previše bitna za portfolio. Čopra predlaže da se koristi Džejms - Steinerova ocena srednjih vrednosti, dok Blek i Literman sugrešu Bajesovu ocenu srednjih vrednosti i kovarijacija. Džorion istražuje Bajes - Steinerove ocene. Postoje i pristupi bazirani na uzorcima i pristupi bazirani na scenarijima koji su opisani u radovima Mišoda i Ziembe. Sve ove metode smanjuju osetljivost alokacije portfolija na ulazne parametre, ali ne daje nikakve garancije za performans portfolija.

Predlog za model neizvesnosti je nasto nakon mnogo diskusija sa statističarima i ekonomičarima u okviru Rabobanke. Definišemo funkciju raspodele verovatnoće za neizvesne parametre  $\mu$  i  $\Sigma$  i uključimo ovo u problem optimizacije. Objektivna funkcija koja predstavlja očekivani prinos u Teslerovom pristupu, sad treba da se bavi ne samo neizvesnošću prinosa koji su dati sa  $\mu$  i  $\sigma$  već i sa neizvesnošću ova poslednja dva parametra. Dakle, kreiran je 'drugi sloj' neizvesnosti. Ovo mora da dovede do kreiranja nove zajedničke raspodele prinosa portfolija koji zavisi od prinosa, srednjih vrednosti i kovarijacija investicija. Medjutim, postoje izvesni problemi sa ovom metodom. Prvo, funkcije raspodele parametara  $\mu$  i  $\Sigma$  je veoma teško odrediti. Drugo, i ako se ove funkcije raspodele odrede, nova zajednička funkcija raspodele verovatno neće biti eliptička. Bez obzira na to, ovaj metod idalje ne daje nikakve garancije za performans portfolija.

Stog razmotrimo drugačiji pristup. Za ulazne parametre  $\mu$  i  $\sigma$  se očekuje da 'upadaju' u interval poverenja i da se problem optimizacije reši za najgori scenario. Interval poverenja se zove niz neizvesnosti. Ovo znači da ako, na primer, radimo sa ograničenom vrednošću pri riziku (oznaka VaR), ni u jednom od mogućih slučajeva će vrednost pri riziku portfolija preći ograničenje

vrednosti pri riziku. Stoga je investitoru obezbedjen odredjen prinos portfolija zato što je optimizovan najgori scenario.

## 7.2. Skupovi neizvesnosti

Prepostavimo da investitor ne zna tačne vrednosti vektora srednje vrednosti prinosa i matrice kovarijacije, ali zna interval u kojem leže parametri. Intervali su ograničeni donjom granicom L i gornjom granicom U, pa možemo zapisati

$$\begin{aligned}\mu_i^L &\leq \mu_i \leq \mu_i^U \\ \sigma_{ij}^L &\leq \sigma_{ij} \leq \sigma_{ij}^U\end{aligned}$$

Umesto gore navedene notacije koristimo sledeću :

$$\begin{aligned}\mu_i^0 &= (\mu_i^L + \mu_i^U)/2, \beta_i = (\mu_i^U - \mu_i^L)/2 \\ \sigma_{ij}^0 &= (\sigma_{ij}^L + \sigma_{ij}^U)/2, \delta_{ij} = (\sigma_{ij}^U - \sigma_{ij}^L)/2\end{aligned}$$

i dobijamo :

$$\begin{aligned}\mu_i^0 - \beta_i &\leq \mu_i \leq \mu_i^0 + \beta_i, \forall i \\ \sigma_{ij}^0 - \delta_{ij} &\leq \sigma_{ij} \leq \sigma_{ij}^0 + \delta_{ij}, \forall i, j\end{aligned}$$

Stoga, skupovi neizvesnosti srednje vrednosti prinosa  $S_m$  i kovarijacije  $S_v$  se mogu zapisati kao :

$$S_m = \{\mu : \mu^0 - \beta \leq \mu \leq \mu^0 + \beta\} \quad (7.1)$$

$$S_v = \{\Sigma : \Sigma^0 - \Delta \leq \Sigma \leq \Sigma^0 + \Delta\} \quad (7.2)$$

## 7.3. Programiranje konusa drugog reda

Optimalne vrednosti za Markovic i Teslerov portfolio (bez neizvesnosti parametara) su bile eksplicitni izrazi dobijeni korišćenjem ili Lagranžove metode ili Kun-Takerovih uslova. Do sada, nije moguće odrediti eksplicitan izraz za optimalne vrednosti kada uzimamo u obzir ishode najgoreg scenarija za

parametre neizvesnosti. Ovaj problem svodi se na problem konusa drugog reda (SOCP) koji se veoma brzo može kompjuterski rešiti. SOCP je optimizacioni problem sledeće forme :

$$\text{Min}\{f^T x \mid \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, i = 1, 2, \dots, N\} \quad (7.3)$$

gde je  $\|\cdot\|$  standardna Euklidova norma, pa je  $\|u\| = \sqrt{u^T u}$  za vektor  $u$ . Vektori  $f$ ,  $x$  i  $c$  su  $n$ -dimenzionalni, a  $x$  je promenljiva odluke. Postoji  $N$  ograničenja.

Programiranje konusa drugog reda je klasa problema koja leži između linearnog i semidefinitnog programiranja (SDP). SOCP se sada može rešiti mnogo efikasnije od SDP problema tako da ako se SDP problem može zapisati kao SOCP to je poželjno.

Ograničenja u (7.3) se nazivaju ograničenja konusa drugog reda. Napomenimo da se standardni konus drugog reda dimenzije  $k$  definiše sa

$$C_k = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix} \right\} \text{ gde važi } \|u\| \leq t \quad (7.4)$$

i gde je  $u$   $(k - 1)$ -dimenzionalni vektor, a  $t$  skalar. Na primer, u trodimenzionalnom prostoru ( $k = 3$ ) važi da je formula standardnog konusa drugog reda

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sada pretpostavimo da imamo sledeći niz tačaka

$$\begin{pmatrix} A_i \\ c_i^T \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_i \\ d_i \end{pmatrix}$$

gde je  $A_i$   $(k - 1) \times n$  matrica, a  $c_i$  i  $b_i$  vektori, respektivno, od  $n$  odnosno  $(k - 1)$  dimenzija i  $d_i$  je skalar. Kada ovaj niz tačaka leži na standardnom konusu dimenzije  $k$ , sledeće mora da važi :

$$\begin{pmatrix} A_i \\ c_i^T \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_i \\ d_i \end{pmatrix} \in C_k \iff \begin{pmatrix} A_i x + b_i \\ c_i^T x + d_i \end{pmatrix} \in C_k$$

I zbog (7.4) mora vžiti

$$\|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i$$

što je ograničenje konusa drugog reda u (7.3).

SOPC obuhvata familiju linearnih programa koji se mogu videti tako što je  $A_i$  nula-matrica, a  $b_i$  nula-vektor i tada se ograničenje transformiše u linearno ograničenje  $0 \leq c_i^T x + d_i$ .

SOCP obuhvata mnogo više problema optimizacije kao što su kvadratni problemi, problemi sa hiperboličkim ograničenjima i problemi koji uključuju sume i maksimume normi.

Za rešavanje SOCP-a postoje neke dostupne metode unutrašnje tačke. Ove metode su implementirane u kompjuterskim softverima kao što su SEDUMI i SDPT3. Koristićemo SEDUMI paket.

## 7.4. Optimizacija portfolija i SOCP

Prethodno, Markovicov portfolio i Teslerov portfolio su optimizovani sa ograničenom vrednošću pri riziku (VaR). Korišene su tehnike Lagranža i Kun-Takera da bi se dobili eksplicitni izrazi optimalnih portofija. Ovi problemi mogu biti zapisani kao SOCP problem.

### 7.4.1. Markovic

Podsetimo se da je Markovicov problem optimizacije oblika

$$Max \left\{ \mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \theta^T \Sigma \theta \mid \bar{\Gamma}^T \theta = C_0 \right\}$$

sa pozitivnim parametrom apsolutne averzije riziku  $\gamma$ . Ovo se drugacije može zapisati kao

$$Min \left\{ \theta^T \Sigma \theta - \frac{2}{\gamma} \mu^T \theta \mid \bar{\Gamma}^T \theta = C_0 \right\}$$

Primetimo i da važi sledeće

$$\begin{aligned} \theta^T \Sigma \theta - \frac{2}{\gamma} \mu^T \theta &= (\Sigma^{\frac{1}{2}} \theta)^T (\Sigma^{\frac{1}{2}} \theta) - \frac{1}{\gamma} \theta^T \Sigma^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu - \frac{1}{\gamma} \mu^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma^{\frac{1}{2}} \theta \\ &\quad + \left( \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right)^T \left( \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right) - \left( \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right)^T \left( \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right) \\ &= \left( \Sigma^{\frac{1}{2}} \theta - \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right)^T \left( \Sigma^{\frac{1}{2}} \theta - \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right) - \frac{1}{\gamma^2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu \\ &= \left\| \Sigma^{\frac{1}{2}} \theta - \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right\|^2 - \frac{a}{\gamma^2} \end{aligned}$$

Stoga problem optimizacije možemo zapisati kao

$$Min \left\{ \left\| \Sigma^{\frac{1}{2}} \theta - \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right\|^2 - \frac{a}{\gamma^2} \mid \bar{\Gamma}^T \theta = C_0 \right\}$$

Zbog toga što, u SOCP problemu, mora postojati linearna objektivna funkcija, mi dodajemo promenljivu  $t$  da bismo to dostigli što nam daje dodatno ograničenje. Rezultat je

$$Min \left\{ t \mid \begin{array}{l} \left\| \Sigma^{\frac{1}{2}} \theta - \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right\| \leq t \\ 0 = \bar{\Gamma}^T \theta - C_0 \end{array} \right\}$$

što predstavlja SOCP forme (7.3) koji pripada optimalnom Markovic portfoliju.

#### 7.4.2. Tesler

Ista stvar je sa Teslerovim problemom optimizacije. Prethodno je pokazano da se Teslerov problem sa prinosima koji imaju eliptičku raspodelu, maksimumom vrednosti pri riziku  $Var_c$  (što implicira ograničenje  $P\{R_p \leq Var\} \leq \alpha$ ) i odgovarajućim (negativnim) kvantilom  $z_\alpha$  može zapisati u obliku

$$Max \left\{ \mu^T \theta \mid \begin{array}{l} \mu^T \theta \geq -Var_c - z_\alpha \sqrt{\theta^T \Sigma \theta} \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \end{array} \right\}$$

Ovo se veoma lako može transformisati u SOCP problem. Ako iskoristimo to da je  $\sqrt{\theta^T \Sigma \theta} = \|\Sigma^{\frac{1}{2}} \theta\|$  onda dobijamo

$$Min \left\{ -\mu^T \theta \mid \begin{array}{l} \|\Sigma^{\frac{1}{2}} \theta\| \leq \frac{1}{-z_\alpha} \mu^T \theta + \frac{1}{-z_\alpha} Var_c \\ 0 = \bar{1}^T \theta - C_0 \end{array} \right\}$$

## 7.5 Optimizacija portfolija sa neizvesnošću

Pogledajmo problem optimizacije sa setom neizvesnosti za parametre  $\mu$  i  $\Sigma$ , kako to je opisano u (7.1) i (7.2) respektivno. Objasnili smo da ćemo rukovati sa neizvesnošću ocenjujući najgori moguć scenario. Ali šta je najgori očekivani slučaj prihoda i kovarijacije? Ako nisu dozvoljene kratke prodaje (npr. nema zaduživanja), jasno je da je najgori očekivani slučaj prihoda minimalni očekivani prihod, što je donja granica  $\mu - \beta$ . Ali u ovom radu smo dozvolili kratke prodaje (zaduživanja), tako da ovo nije dovoljno. Ako investitor ide kratko u aktivu, najgori očekivani slučaj prihoda za tu aktivu je najveći mogući prihod, jer to košta investitora najviše novca. Onda moramo da se nosimo sa najvećim očekivanim prihodom za ovu aktivu, ili gornju granicu  $\mu_i + \beta_i$ . Za kovarijacije možemo koristiti iste razloge. Zaključak je, možemo reći, da od investicione politike zavisi da li moramo da koristimo gornju ili donju granicu za očekivani prihod i matricu kovarijacije.

### 7.5.1 Markovic

Markovicov problem optimizacije portfolija u najgorem mogućem slučaju je

$$Max_{\theta} \left\{ min_{\mu, \Sigma} [\mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \theta^T \Sigma \theta] \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

gde je  $\gamma$  parametar averzije prema riziku. Pošto je  $\gamma > 0$  možemo problem zapisati kao

$$Max_{\theta} \left\{ min_{\mu} [\mu^T \theta] - \frac{1}{2} \gamma max_{\Sigma} [\theta^T \Sigma \theta] \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

Prvo, nadjemo izraz za minimalni očekivani prihod :

$$\begin{aligned} Min_{\mu} [\mu^T \theta] &= min_{\mu} \sum_i \mu_i \theta_i = \sum_{i: \theta_i < 0} (\mu_i^0 + \beta_i) \theta_i + \sum_{i: \theta_i \geq 0} (\mu_i^0 - \beta_i) \theta_i \\ &= \sum_i \mu_i^0 \theta_i + \sum_{i: \theta_i < 0} \beta_i \theta_i - \sum_{i: \theta_i \geq 0} \beta_i \theta_i = \sum_i (\mu_i^0 \theta_i - \beta_i |\theta_i|) \\ &= (\mu_0)^T \theta - \beta^T |\theta| \quad (7.6) \end{aligned}$$

Možemo isto da uradimo i sa maksimalnom disperzijom. To nam daje



$$\begin{aligned}
Max_{\Sigma}[\theta^T \Sigma \theta] &= Max_{\Sigma} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \theta_i \theta_j \\
&= \sum_{i,j:\theta_i \theta_j < 0} (\sigma_{ij}^0 - \delta_{ij}) \theta_i \theta_j + \sum_{i,j:\theta_i \theta_j \geq 0} (\sigma_{ij}^0 + \delta_{ij}) \theta_i \theta_j \\
&= \sum_{i,j} \sigma_{ij}^0 \theta_i \theta_j + \sum_{i,j} \delta_{ij} |\theta_i \theta_j| = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^0 \theta_i \theta_j + \sum_{i,j} \delta_{ij} |\theta_i| |\theta_j| \\
&= \theta^T \Sigma^0 \theta + |\theta|^T \Delta |\theta| \quad (7.7)
\end{aligned}$$

Sa ovim rezultatom, problem optimizacija (7.5) postaje prostiji :

$$Max_{\theta} \left\{ (\mu_0)^T \theta - \beta^T |\theta| - \frac{1}{2} \gamma |\theta|^T \Sigma^0 \theta - \frac{1}{2} \gamma |\theta|^T \Delta |\theta| \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

Ovaj problem je SOCP, tako da se može rešiti na efikasan način. Da bi se to pokazalo, mora imati malo posla. Dodajemo dve promenljive  $\rho$  i  $\tau$  u objektivnu funkciju. Dobijamo

$$Max_{\theta, \rho, \tau} \left\{ (\mu_0)^T \theta - \beta^T |\theta| - \frac{1}{2} \gamma \rho - \frac{1}{2} \gamma \tau \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \rho \geq \theta^T \Sigma^0 \theta \\ \tau \geq |\theta|^T \Delta |\theta| \end{array} \right\}$$

Primetimo da za svaku pozitivno definitnu matricu  $A$ , vektor  $x$  i pozitivni skalar  $y$  možemo da pišemo :

$$\begin{aligned}
x^T A x \leq y &\Leftrightarrow 4x^T A x \leq 4y \Leftrightarrow 4x^T A x - 2y + y^2 + 1 \leq 2y + y^2 + 1 \\
&\Leftrightarrow 4x^T A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} x + (1 - y)^2 \geq (1 + y)^2 \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} 2A^{\frac{1}{2}} x \\ 1 - y \end{array} \right\| \geq (1 + y)
\end{aligned}$$

Koristeći ovo, možemo prepraviti dva ograničenja i dobiti sledeće

$$Max_{\theta, \rho, \tau} \left\{ (\mu_0)^T \theta - \beta^T |\theta| - \frac{1}{2} \gamma (\rho + \tau) \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \left\| \begin{array}{l} 2(\Sigma^0)^{\frac{1}{2}} \theta \\ 1 - \rho \end{array} \right\| \leq (1 + \rho) \\ \left\| \begin{array}{l} 2\Delta^{\frac{1}{2}} |\theta| \\ 1 - \tau \end{array} \right\| \leq (1 + \tau) \end{array} \right\}$$

što je skoro SOCP kao u (7.3). Jedini problem je apsolutna vrednost znaka  $\theta$ . Možemo zameniti  $|\theta|$  novim  $n$ -dimenzionim vektorom  $\eta$  i dodati ograničenja  $\eta_i \geq \theta_i$  i  $\eta_i \geq -\theta_i$  za sve  $i$ , što garantuje  $\eta_i \geq |\theta_i|$ . Drugi nain suočavanja sa apsolutnom vrednošću je da zamenimo  $\theta$  i  $|\theta|$  sa  $\theta = \theta^+ - \theta^-$  i  $|\theta| = \theta^+ + \theta^-$  respektivno i dodamo pozitivnost ograničenjima  $\theta_i^+, \theta_i^- \geq 0$  za svako  $i$ . Koristimo prvu transformaciju, koja dovodi do SOCP:

$$Min_{\theta, \rho, \tau, \eta} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Gamma}^T \theta = C_0 \\ \left\| \frac{2(\Sigma^0)^{\frac{1}{2}} \theta}{1 - \rho} \right\| \leq (1 + \rho) \\ \left\| \frac{2\Delta^{\frac{1}{2}} \eta}{1 - \tau} \right\| \leq (1 + \tau) \\ \eta_i \geq \theta_i, \forall i \\ \eta_i \geq -\theta_i \forall i \end{array} \right\}$$

Ovo je formulacija optimizacije problema Markovica kao SOCP. Kao što je navedeno ranije, ovo može da se rešava korišćenjem računara. MATLAB program koji se koristi, robustmarkovitz.m, je u dodatku C.

### 7.5.2 Tesler

U najgorem mogućem scenariju, Telser-ova optimizacija problema sa VaR ograničenjem postaje

$$Max_{\theta} \left\{ Min_{\mu} [\mu^T \theta] \left| \begin{array}{l} \bar{\Gamma}^T \theta = C_0 \\ Max_{\mu, \Sigma} [P(R_p \leq -VaR_c)] \leq \alpha \end{array} \right. \right\}$$

Pošto za robusnu srednju vrednost imamo

$$Min_{\mu} [\mu^T \theta] = (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta|$$

a za VaR ograničenje

$$\begin{aligned} Max_{\mu, \Sigma} [P(R_p \leq -VaR_c)] \leq \alpha &\iff Max_{\mu, \Sigma} \frac{-VaR_c - \mu^T \theta}{\sqrt{\theta^T \Sigma \theta}} \leq z_{\alpha} \\ \iff \frac{-VaR_c - Min_{\mu} \mu^T \theta}{Max_{\Sigma} \sqrt{\theta^T \Sigma \theta}} \leq z_{\alpha} &\iff -Min_{\mu} \mu^T \theta - z_{\alpha} Max_{\Sigma} \sqrt{\theta^T \Sigma \theta} \leq VaR_c \end{aligned}$$

što može biti transformisano u :

$$\begin{aligned} -(\mu^0)^T \theta + \beta^T |\theta| - z_{\alpha} \sqrt{\theta^T \Sigma \theta + |\theta|^T \Delta \theta} &\leq VaR_c \\ \iff -z_{\alpha} \left\| \frac{(\Sigma^0)^{\frac{1}{2}} \theta}{|\Delta^{\frac{1}{2}} \theta|} \right\| &\leq (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| + VaR_c \end{aligned}$$

imamo sledeći problem optimizacije :

$$Max_{\theta} \left\{ \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| \left| -z_{\alpha} \left\| \begin{array}{l} \|(\Sigma^0)^{\frac{1}{2}} \theta\| \\ \|\Delta^{\frac{1}{2}} \theta\| \end{array} \right\| \right. \leq (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| + VaR_c \end{array} \right\}$$

Kako bi ovo postao SOCP problem, uvodimo nove promenljive  $\rho$  i  $\tau$ , pa problem postaje:

$$Max_{\theta, \rho, \tau} \left\{ \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| \left| -z_{\alpha} \left\| \begin{array}{l} \rho \\ \tau \end{array} \right\| \right. \leq (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| + VaR_c \\ \|(\Sigma^0)^{\frac{1}{2}} \theta\| \leq \rho \\ \|\Delta^{\frac{1}{2}} \theta\| \leq \tau \end{array} \right\}$$

Poslednji korak je uvođenje nove promenljive  $\eta$  da sklonimo apsolutnu vrednost parametra. To nam daje SOCP.

$$Max_{\theta, \rho, \tau, \eta} \left\{ \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ (\mu^0)^T \theta - \beta^T \eta \left| -z_{\alpha} \left\| \begin{array}{l} \rho \\ \tau \end{array} \right\| \right. \leq (\mu^0)^T \theta - \beta^T \eta + VaR_c \\ \|(\Sigma^0)^{\frac{1}{2}} \theta\| \leq \rho \\ \|\Delta^{\frac{1}{2}} \eta\| \leq \tau \\ \eta_i \geq \theta_i, \forall i \\ \eta_i \geq -\theta_i, \forall i \end{array} \right\}$$

Ovaj SOCP može biti rešen korišćenjem MATLAB programa `robust-telser.m` u dodatku C.

## 7.6 Realističiji pristup

Kao to ćemo videti u primeru, gore opisan pristup je vrlo konzervativan. Glavni razlog za to je definicija varijacije portfolija najgoreg slučaja  $((\sigma_p^2)^{wc})$  koju smo koristili. Kada izvodimo ovu varijaciju portfolia najgoreg slučaja (7.7) uzimamo za svaki element  $\sigma_{ij}$  kovarijacione matrice element najgoreg slučaja.

Formula :

$$((\sigma_p^2)^{wc}) = (\theta^T \Sigma \theta)^{wc} = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{wc} \theta_i \theta_j$$

Ovo znači da kovarijaciona matrica najgoreg slučaja  $\Sigma^{wc}$  može biti prikazana kao:

$$\Sigma^{wc} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{wc} & \sigma_{12}^{wc} & \cdots & \sigma_{1n}^{wc} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}^{wc} & \sigma_{n2}^{wc} & \cdots & \sigma_{nn}^{wc} \end{pmatrix}$$

Ali da li je velika verovatnoća da će se ovaj poseban slučaj dogoditi? Odgovor je ne. To je zato što se ova određena kovarijaciona matrica najgoreg slučaja sastoji od kovarijacija koje ne pripadaju jedna drugoj. Kovarijacije su izvedene iz različitih matrica kovarijacije, pa je poremećena korelacija između kovarijacija.

Zato je logičnije napisati varijaciju portfolija najgoreg slučaja na sledeći način:

$$(\sigma_p^2)^{wc} = (\theta^T \Sigma \theta)^{wc} = \left( \sum_{i,j} \sigma_{ij} \theta_i \theta_j \right)^{wc}$$

Tako da je kovarijaciona matrica najgoreg slučaja data sa

$$\Sigma^{wc} = \left( \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \right)^{wc}$$

Pretpostavimo da investitor zna (na primer iz proučavanja prošlosti) da postoji  $m$  mogućih matrica kovarijacija  $\Sigma^1, \Sigma^2, \dots, \Sigma^m$ . Onda je matrica kovarijacije najgoreg mogućeg slučaja u prvom značenju matrica koja se sastoji

od svih elemenata najgoreg mogućeg slučaja  $\sigma_{ij}^k$  za svako  $j = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Matrica kovarijacije najgoreg mogućeg slučaja u drugom značenju je matrica najgoreg mogućeg slučaja  $\Sigma^k$  za svako  $k = 1, \dots, m$ .

U ovoj novoj situaciji ne modelujemo parametar neizvesnosti u  $\mu$ . To je zato što je, prema stručnjacima u Rabobank-u, neizvesnost u kovarijaciji mnogo važnija od neizvesnosti u srednjim vrednostima. Pored toga, neizvesnost u  $\mu$  je veoma teško meriti.

### 7.6.1 Markovic

Ovaj novi način modelovanja neizvesnosti može da se primeni na optimalni portfolio Markovica. Pretpostavimo da postoji  $m$  mogućih matrica kovarijacije  $\Sigma^1, \Sigma^2, \dots, \Sigma^m$  i da je srednji vektor "izvestan". Onda se robusni problem Markovica

$$Max_{\theta} \left\{ \min_{\mu, \Sigma} [\mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \theta^T \Sigma \theta] \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

može transformisati u :

$$\begin{aligned} & Max_{\theta} \left\{ \mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \max_k [\theta^T \Sigma^k \theta] \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \right\} \\ \iff & Max_{\theta} \left\{ \mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \rho \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \rho \geq \max_k [\theta^T \Sigma^k \theta] \end{array} \right\} \\ \iff & Max_{\theta} \left\{ \mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \rho \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \rho \geq \theta^T \Sigma^k \theta, \forall k \end{array} \right\} \\ \iff & Min_{\theta} \left\{ -\mu^T \theta + \frac{1}{2} \gamma \rho \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \left\| \frac{2(\Sigma^k)^{\frac{1}{2}} \theta}{1 - \rho} \right\| \leq 1 + \rho, \forall k \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Ovo je SOCP. Primetimo da je ovaj izraz jednostavniji od prethodno napravljene verziju neizvesnosti problema Markovica. Odgovarajući MATLAB program `robustmarkovitz2.m` je u dodatku C.

### 7.6.2 Tesler

Za Teslerov problem sa *VaR* ograničenjem možemo da uradimo isto. Robusno VaR ograničenje je

$$\begin{aligned}
\max_{\mu, \Sigma} [P(R_p \leq -VaR_c)] \leq \alpha &\iff \max_k \frac{-VaR_c - \mu^T \theta}{\sqrt{\theta^T \Sigma^k \theta} \leq z_\alpha} \\
\iff \frac{-VaR_c - \mu^T \theta}{\max_k \sqrt{\theta^T \Sigma^k \theta} \leq z_\alpha} &\iff -z_\alpha \max_k \sqrt{\theta^T \Sigma^k \theta} \leq \mu^T \theta + VaR_c \\
&\iff -z_\alpha \sqrt{\theta^T \Sigma^k \theta} \leq \mu^T \theta + VaR_c, \forall k \\
&\iff -z_\alpha \|(\Sigma^k)^{\frac{1}{2}} \theta\| \leq \mu^T \theta + VaR_c, \forall k
\end{aligned}$$

Tako da robusni Telser-ov problem optimizacije postaje

$$\text{Min}_\theta \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Gamma}^T \theta = C_0 \\ -\mu^T \theta \Big|_{-z_\alpha \|(\Sigma^k)^{\frac{1}{2}} \theta\| \leq \mu^T \theta + VaR_c, \forall k} \end{array} \right\}$$

Ovo je još jedna verzija neizvesnog Telser-ovog problema optimizacije. MATLAB program za rešavanje ovoga se zove `robusttelsers2.m` i može da se nadje u dodatku C.

## 7.7 Primer

U ovom primeru se koristi MATLAB za dobijanje rezultata. Prvo se traže skupovi neizvesnosti od  $\mu$  i  $\Sigma$ . Važno pitanje je kako odrediti skupove neizvesnosti. Tutuncu and Koenig [2002] predlažu dva metoda. Prvi metod je bootstrap metod, gde su vremenske serije bootstrap-ovane na osnovu dostupnih podataka. Drugi metod je metod pomeranja okvira. Uzima se okvir od 60 dana i u ovom okviru se odredjuju srednje vrednosti i kovarijacije. Okvir se vraća unazad vremenski kako bi se dobile donje i gornje granice za srednje vrednosti i kovarijacije.

Ovde se koristiti varijanta poslednjeg metoda. Dakle, uzima se okvir od 60 dana i u ovom okviru se odredjuju srednje vrednosti i kovarijacije. Zatim se prozor pomera unazad 60 dana kako bi se izračunao drugi srednji vektor i matrica kovarijacije. To se radi 60 puta (jer se koristi baza sa 3609 opservacija), tako da na kraju imamo 60 mogućih srednjih vektora i 60 mogućih matrica kovarijacije. Primetimo da je ostalo 9 opservacija koje se ignorišu. Iz ovih podataka odredjuju se skupovi neizvesnosti :

$\times 10^{-3}$	$\mu_i^L$	$\mu_i^U$
Elsevier	-4.79	4.86
Fortis	-6.37	8.35
Getronics	-32.79	29.21
Heineken	-3.28	6.26
Philips	-12.00	7.59
Royal Dutch	-3.19	4.71
Unilever	-4.88	4.71

Sa ovim donjim i gornjim granicama za srednje vrednosti lako je odrediti  $\mu^0$  i  $\beta$ .

$$\mu_i^0 = (\mu_i^L + \mu_i^U)/2, \beta_i = (\mu_i^U - \mu_i^L)/2, \forall i$$

$$\mu^0 = \begin{pmatrix} 0.036 \\ 0.988 \\ -1.793 \\ 1.493 \\ -2.204 \\ 0.760 \\ -0.088 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \quad \beta = \begin{pmatrix} 4.826 \\ 7.358 \\ 31.002 \\ 4.771 \\ 9.791 \\ 3.952 \\ 4.796 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

Donje i gornje granice za kovarijacije:

$\times 10^{-3}$	Els	For	Get	Hei	Phi	RDu	Uni
Elsevier	0.057	-0.009	-0.017	-0.049	-0.045	-0.065	-0.035
	1.721	1.300	2.109	0.448	1.060	0.549	0.528
Fortis	-0.009	0.065	-0.171	-0.029	-0.219	-0.006	0.000
	1.300	2.508	2.185	0.532	1.830	1.340	0.994
Getronics	-0.017	-0.171	0.059	-0.175	-0.048	-0.222	-0.430
	2.109	2.185	29.715	0.707	1.977	0.990	1.127
Heineken	-0.049	-0.029	-0.175	0.039	-0.166	-0.030	-0.005
	0.448	0.532	0.707	1.024	0.525	0.420	0.352
Philips	-0.045	-0.219	-0.048	-0.166	0.081	-0.065	-0.556
	1.060	1.830	1.977	0.525	3.049	1.242	0.838
Royal Dutch	-0.065	-0.006	-0.222	-0.030	-0.065	0.029	-0.022
	0.549	1.340	0.990	0.420	1.242	1.156	0.758
Unilever	-0.035	0.000	-0.430	-0.005	-0.556	-0.022	0.031
	0.528	0.994	1.127	0.352	0.838	0.758	0.986

Odgovarajue matrice  $\Sigma^0$  i  $\Delta$  su:

$$\Sigma^0 = \begin{pmatrix} 0.889 & 0.645 & 1.046 & 0.200 & 0.508 & 0.242 & 0.247 \\ 0.645 & 1.287 & 1.007 & 0.252 & 0.806 & 0.667 & 0.497 \\ 1.046 & 1.007 & 14.887 & 0.266 & 0.965 & 0.384 & 0.348 \\ 0.200 & 0.252 & 0.266 & 0.532 & 0.180 & 0.195 & 0.173 \\ 0.508 & 0.806 & 0.965 & 0.180 & 1.565 & 0.589 & 0.141 \\ 0.242 & 0.667 & 0.384 & 0.195 & 0.589 & 0.592 & 0.368 \\ 0.247 & 0.497 & 0.348 & 0.173 & 0.141 & 0.368 & 0.509 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0.832 & 0.654 & 1.063 & 0.249 & 0.553 & 0.307 & 0.282 \\ 0.654 & 1.221 & 1.178 & 0.281 & 1.024 & 0.673 & 0.497 \\ 1.063 & 1.178 & 14.828 & 0.441 & 1.012 & 0.606 & 0.778 \\ 0.249 & 0.281 & 0.441 & 0.493 & 0.346 & 0.225 & 0.178 \\ 0.553 & 1.024 & 1.012 & 0.346 & 1.484 & 0.653 & 0.697 \\ 0.307 & 0.673 & 0.606 & 0.225 & 0.653 & 0.564 & 0.390 \\ 0.282 & 0.497 & 0.778 & 0.178 & 0.697 & 0.390 & 0.478 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

Za naš drugi način rešavanja neizvesnosti, opisano u poglavlju 6, moramo da koristimo 60 matrica kovarijacije koje su već određene.

## Kalkulacije

Računamo optimalni portfolio Markovica, uzimajući u obzir parametre nesigurnosti, koristeći program MATLAB-a `robustmarkovitz.m`. Za parametar averzije prema riziku uzimamo  $\gamma = 2$ . Ovo daje optimalni portfolio

$$\theta_{opt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5168 \\ 0 \\ 0.4832 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sa očekivanim portfolio prihodom  $\mu_p = 0.380 \times 10^3$  i standardnom devijacijom  $\sigma_p = 0.0122$ . Ako uzmemo da je  $\gamma = 10$  dobijamo sledeći optimalni



portfolio:

$$\theta_{opt} = \begin{pmatrix} 0.059 \\ 0 \\ 0 \\ 0.498 \\ 0 \\ 0.375 \\ 0.067 \end{pmatrix}, \quad \mu_p = 0.379 \times 10^{-3}, \quad \sigma_p = 0.0117$$

Telserov optimalni portfolio sa  $VaR$  ograničenjem sa parametrima neizvesnosti se računa pomoću programa `robusttelsr.m`. Uzimamo  $VaR_c = 0.05$  i pretpostavljamo da imamo studentovu t-raspodelu, tako da je  $z_\alpha = 1.998$  za  $\alpha = 0.025$ , računamo Telserov optimalni portfolio. Ovo nam daje:

$$\theta_{opt} = \begin{pmatrix} 0.119 \\ -0.001 \\ -0.001 \\ 0.415 \\ -0.001 \\ 0.157 \\ 0.311 \end{pmatrix}, \quad \mu_p = 0.368 \times 10^{-3}, \quad \sigma_p = 0.0115$$

Ako se primenjuje manje rigorozan način suočavanja sa neizvesnošću, kao što je opisano u delu 6, koristimo program `robustmarkovitz2.m` za optimalni portfolio Markovica sa parametrom neizvesnosti. Za  $\gamma = 2$  dobijamo:

$$\theta_{opt} = \begin{pmatrix} 0.353 \\ -0.054 \\ 0.019 \\ 0.367 \\ -0.077 \\ 0.111 \\ 0.283 \end{pmatrix}, \quad \mu_p = 0.346 \times 10^{-3}, \quad \sigma_p = 0.0121$$

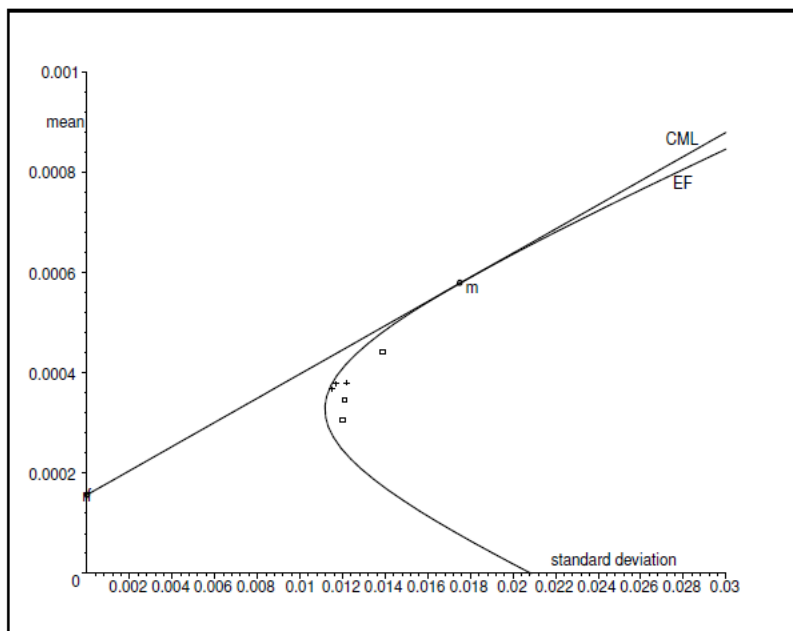
A za  $\gamma = 10$ :

$$\theta_{opt} = \begin{pmatrix} 0.349 \\ -0.049 \\ 0.017 \\ 0.247 \\ -0.123 \\ 0.232 \\ 0.327 \end{pmatrix}, \quad \mu_p = 0.306 \times 10^{-3}, \quad \sigma_p = 0.0120$$

Za Telserov robustan optimalni portfolio (upotreba robusttelsr2.m), rezultati su:

$$\theta_{opt} = \begin{pmatrix} 0.319 \\ -0.077 \\ -0.064 \\ 0.634 \\ 0.019 \\ -0.096 \\ 0.266 \end{pmatrix}, \quad \mu_p = 0.441 \times 10^{-3}, \quad \sigma_p = 0.0139, \quad VaR_\alpha = 0.0272$$

Optimalne tačke mogu biti iscrtan na sledećem grafiku. Grafik je u okviru (framework-u) srednje vrednosti i standardne devijacije. Tačke u obliku krsta spadaju u prvi način rešavanja neizvesnosti, a tačke u obliku kvadrata pripadaju drugom načinu.



Primetimo da optimalne tačke nisu na efikasnoj granici (skup svih portfolija). Pošto radimo sa parametrima neizvesnosti investitor ulaže sigurnije. Zapravo, efikasna granica se menja, jer ona nije više efikasna. Nove efikasne tačke se mogu izračunati u više navrata računajući efikasnu standardnu devijaciju za datu srednju vrednost. Pokretanje ove simulacije daje sledeću novu granicu, gde se koristi drugi način rešavanja neizvesnosti. Granica koja je najbliža staroj efikasnoj granici je očekivana nova granica. Ova granica se javlja kada se pojavi neizvesna matrica kovarijacije za očekivanu matricu kovarijacije, na osnovu svih podataka u prethodnih 13 godina.

Portfolija u obliku kvadrata su na ovoj granici, kao što se može videti na grafiku. Nova granica na unutrašnjoj strani drugih granica je efikasna granica koja nastaje kada se pojavi najgori slučaj matrice kovarijacije. Jasno je da, kada je ovo najgori mogući scenario, investitor mora biti veoma rezervisan.

