СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ

Први домаћи задатак

1. Нека су $X_1, X_2, \dots, X_n$ независне случајне величине са равномерном расподелом на сегменту $[0,1]$ и нека су $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ независне случајне величине, такође, са равномерном расподелом на сегменту $[0,1]$. Претпоставља се да су случајне величине X_i и Y_j независне за $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Уведу се ознаке:

$$G_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I\{X_k < t\}, H_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I\{Y_k < t\}, F_n(t_1,t_2) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I\{X_k < t_1, Y_k < t_2\}.$$

Нека је $\alpha_n = G_n(0.5) \cdot H_n(0.5) - F_n(0.5, 0.5)$, $B_n = n\alpha_n - na$, где је $a > 0$. Показати:

$$Ee^{tB_n} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \frac{1}{2^n} \psi^n \left(\frac{s}{n}, n\right)$$

где је $\psi(x,n) = 0.5e^{-an}(e^{(x-1)n} + 1)^x (e^{xn} + 1)^{1-x}$.

2. Нека су α и β реални бројеви, $\alpha \neq \beta$, а X и Y $L^2(\Omega)$ случајни елементи који имају математичко очекивање једнако 0. Нека је, даље, са $Z(t) = Xe^{i\alpha t} + Ye^{i\beta t}$, $t \in T$, дефинисан случајан процес $\mathbf{Z} = \{Z(t), t \in T\}$.

а) Ако за случајне елементе X и Y важи: $E(X\overline{Y}) = E(\overline{X}Y) = 0$, доказати да је случајан процес $\mathbf{Z}$ стационаран.

б) Доказати да је $\mathbf{Z}$ реалан процес ако је $\alpha + \beta = 0$ и $X = \overline{Y}$.

3. Нека је $\mathbf{X} = \{X(t), t \geq 0\}$ Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$.

а) Нека је случајна величина $Y(t)$ дефинисана са $Y(t) = 3X(t) - X(3t)$, $t \geq 0$. Одредити корелациону функцију случајног процеса $\{Y(t), t \geq 0\}$ и испитати да ли је он стационаран.

б) Нека је τ_3 тренутак реализације трећег догађаја у процесу $\mathbf{X}$ и нека је случајна величина V дата са $V = X(3\tau_3)$. Одредити расподелу вероватноће случајне величине V.