ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА

Први домаћи задатак

1. Нека је дат простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Нека је, даље, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ произвољан низ догађаја из $\mathcal{A}$ и $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотон низ догађаја из $\mathcal{A}$.

а) Доказати да важи једнакост:

$$P(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) \qquad .$$

б) Доказати да важи неједнакост:

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \qquad .$$

в) Ако је $0 \leq \lambda \leq 1$ и $P(A_n) = \lambda$ за свако $n \in \mathbb{N}$, доказати да важе неједнакости:

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \lambda,\ P(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \lambda \qquad .$$

2. Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ случајних величина дефинисаних на истом простору вероватноћа, при чему X_n, за свако $n \in \mathbb{N}$, има густину расподеле дату са

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!},\ x > 0.$$

Нека је $A_n = \{X_n \geq 2n\}$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

3. Нека су X_1, X_2, X_3 независне случајне величине са стандардном нормалном расподелом, а

$$Y_1 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}},\ Y_2 = \frac{X_1 + X_2 - 2X_3}{\sqrt{6}},\ Y_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}}.$$

Одредити густину расподеле случајног вектора (Y_1, Y_2, Y_3).