Senka

Neka je tačka $T(m, n, k)$ izvor svetlosti, ravan α ravan na koju pada senka, tačka $S(a, b, c)$ centar sfere i neka je sfera zadata jednačinom σ : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

Ukoliko su tačke T i S sa raznih strana ravni α, tada je za

1) $d(S, \alpha) \geq r$ senka jednaka praznom skupu,

2) $d(S, \alpha) < r$ kontura "senke" jednaka preseku sfere i ravni, pri čemu je osvetljena kalota sfere koju ravan odseca, a koja je sa iste strane ravni α kao i tačka T.

Ukoliko su tačke T i S sa iste strane ravni α u zavisnosti od položaja izvora svetlosti, sfere i ravni na koju pada senka mogući su različiti slučajevi. Ovde će biti nabrojani samo neki karakteristični slučajevi, dok za preostale slučajeve čitaoc može i sam zaključiti šta će biti kontura senke.

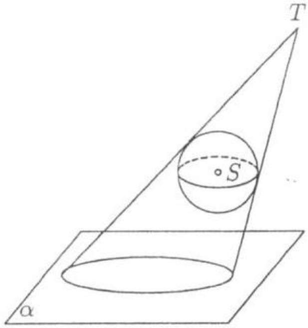
Ukoliko je $TS = r$, odnosno ukoliko je izvor svetlosti na sferi i ravan α i sfera σ nemaju zajedničkih tačaka, tada je za

1) $d(T, \alpha) = d(S, \alpha) + r$ senka sfere na ravan α jednaka celoj ravni α,

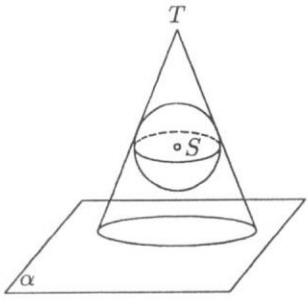
2) $d(S, \alpha) - r < d(T, \alpha) < d(S, \alpha) + r$ senka sfere na ravan α jednaka poluravni, pri čemu je granica određena presekom ravni α i tangentne ravni na sferu u tački T. Senka pripada poluprostoru određenom ovom tangentnom ravni kome pripada i sfera,

3) $d(T, \alpha) = d(S, \alpha) - r$ senka sfere na ravan α jednaka praznom skupu.

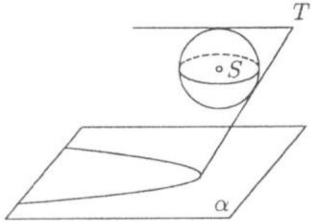
Ukoliko su tačke T i S sa iste strane ravni α i $TS > r$, tj. izvor svetlosti je van sfere, tada u zavisnosti od toga da li za konus čije je teme tačka T i koji dodiruje sferu postoji izvodnica koja je paralelna ravni α (uz vođenje računa o tome da je rastojanje izvora svetlosti od ravni na koju pada senka veće od odgovarajućih rastojanja tačaka sfere od te ravni) mogu nastupiti sledeći slučajevi:



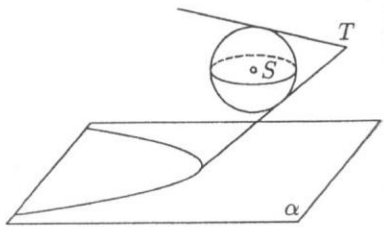
senka je elipsa



senka je krug



senka je parabola



senka je hiperbola

Slika uz zad. 298

1) ukoliko postoje dve takve izvodnice, tj. ako je $d(S,\alpha) - r < d(T,\alpha) < d(S,\alpha) + r$, tada je kontura senke jedna grana hiperbole, a senka sfere je "unutrašnja oblast" te grane hiperbole

2) ukoliko takva izvodnica postoji i jedinstvena je, tj. ako je $d(T,\alpha) = d(S,\alpha) + r$, tada je senka sfere "unutrašnja oblast" parabole

3) ukoliko je $d(T,\alpha) > d(S,\alpha) + r$, tada takve izvodnice nema i senka sfere je, u opštem slučaju, oblast ograničena elipsom, a u specijalnom, kada je osa normalna na ravan na koju pada senka, senka je unutrašnjost kruga.

4) ukoliko je $d(T,\alpha) \leq d(S,\alpha) - r$ senka sfere je prazan skup.

Iz uslova zadatka tačka T i sfera su sa iste strane ravni Oxz i sfera dodiruje ovu ravan. Da bi se odredila jednačina konture senke sfere treba ispitati da li postoji izvodnica konusa, čije je teme tačka T i koji je opisan oko date sfere, koja je paralelna ravni Oxz, uz vođenje računa o tome da je rastojanje izvora svetlosti od ravni na koju pada senka veće od odgovarajućih rastojanja tačaka sfere od te ravni. Ova izvodnica se lako nalazi, ukoliko postoji, i to tako što se kroz tačku T (izvor svetlosti) postavi ravan paralelna ravni Oxz (ravan na koju pada senka) i proveri se da li ona ima presek sa konusom, odnosno sa sferom oko koje je konus opisan. U ovom slučaju to je ravan $y = 4$ i ona sa sferom ima jedinstvenu zajedničku tačku koja ima koordinate $(1, 4, 1)$, pa postoji tačno jedna izvodnica paralelna ravni Oxz, a sve ostale tačke sfere su bliže ravni na koju pada senka od tačaka ove izvodnice. Zbog toga je kontura senke sfere σ parabola (u zadatku se nije tražilo da se nađe njena jednačina i da se ona svodi na kanonski oblik), a senka sfere "unutrašnja oblast" te parabole.

U slučaju da se traži i jednačina konture senke sfere, ona se, za ovakav položaj izvora svetlosti i sfere, dobija kao presek konusa opisanog oko sfere sa vrhom u izvoru svetlosti i ravni na koju pada senka. U ovom zadatku jednačina konusa je $4x^2 + 3y^2 - 4yz - 8x - 4y + 16z - 28 = 0$, a ravan na koju pada senka je Oxz ravan, pa je jednačina konture senke data sa $y = 0$, $4x^2+3y^2-4yz-8x-4y+16z-28 = 0$, odnosno $y = 0$, $4x^2-8x+16z-28 = 0$. Ova kriva je parabola $y = 0$, $(x-1)^2 = -4(z-2)$.

Napomena: Da bi kontura senke bila nađena parabola, neophodno je da koordinate izvora svetlosti budu takve da rastojanje izvora svetlosti od ravni na koju pada senka (u ovom slučaju od Oxz ravni) bude veće od rastojanja svih tačaka sfere osim jedne (čija je senka "beskonačno" daleka tačka). U slučaju kada je rastojanje izvora svetlosti od ravni na koju pada senka manje od rastojanja bilo koje tačke sfere od ove ravni tada sfera ne baca senku. Bez obzira na to, ako bi se samo tražio presek konusa sa temenom u datom izvoru svetlosti koji je opisan oko sfere i ravni na koju pada senka ovaj presek bi postojao, pa se ne bi dobilo tačno rešenje. U ovom slučaju je samo tačka $A(1, 4, 1)$ sfere na istom rastojanju od ravni Oxz kao i izvor svetlosti M, dok su sve ostale tačke na manjem rastojanju, pa je nađena parabola stvarno senka date sfere σ na ravan Oxz.