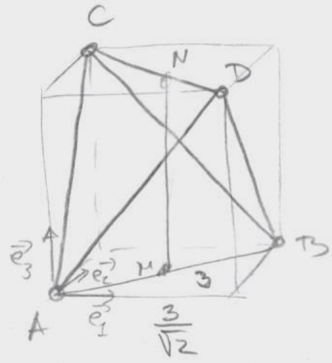
РЕШЕЊА Г1 гр#2

(1)



Правилан тетраедар ивице 3 може да се упише у коцку ивице $\frac{3}{\sqrt{2}}$

Уведимо координатни систем:

коор. почетак $A(0,0,0)$

коор. вектори су јединични вектори колинеарни ивицама коцке

У овако изабраном коор. систему темена тетраедра имају координате

$A(0,0,0)$, $B(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}},0)$, $C(0,\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})$, $D(\frac{3}{\sqrt{2}},0,\frac{3}{\sqrt{2}})$

$$V=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & 0 & 3/\sqrt{2}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{27}{2\sqrt{2}}+\frac{27}{2\sqrt{2}}\right|=\frac{9}{2\sqrt{2}}$$

$$d(AB,CD)=\frac{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AC}]\right|}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}|}=$$

$$=\frac{\left|\begin{vmatrix} 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 0 \\ 3/\sqrt{2} & -3/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2}\end{vmatrix}\right|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\underbrace{\sin\measuredangle\underbrace{(AB,CD)}_{90^\circ}}_{1}}=\frac{\left|-\frac{27}{2\sqrt{2}}-\frac{27}{2\sqrt{2}}\right|}{3\cdot 3\cdot 1}=\frac{\frac{27}{2\sqrt{2}}}{9}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

II начин: d

Најкраће растојање 2 тачке са мимоилазних правих је дуж заједничке нормале те две праве: M - средиште AB, N - средиште CD

$d=MN=\frac{3}{\sqrt{2}}$ (исто као ивица коцке). (MN је заједничка нормала правих AB и CD)

(2) $\vec{p}=(2,-3,1)$, $P(1,2,-4)$, $\vec{n_\alpha}=(2,1,-1)$

$\beta \parallel p \Rightarrow \vec{n_\beta}\perp\vec{p}$

$\beta\perp\alpha \Rightarrow \vec{n_\beta}\perp\vec{n_\alpha}$

$$\vec{n_\beta}=\vec{p}\times\vec{n_\alpha}=\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ 2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(2,4,8)\sim(1,2,4)$$

$\beta:\ (x-1)+2(y-2)+4(z+4)=0$

$\boxed{\beta:\ x+2y+4z+11=0}$

II начин за запремину

$$V=\frac{1}{3}B\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}=\frac{9}{2\sqrt{2}}$$

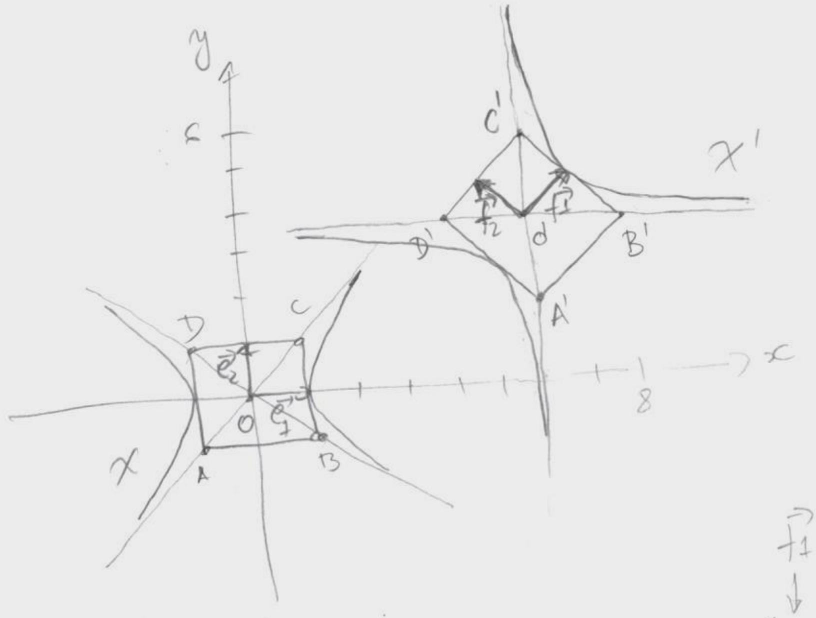
површина основе

Висина је $\frac{2}{3}$ велике дијагонале коцке: $\frac{2}{3}a\sqrt{3}$

ивица коцке $a=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\frac{3^2\sqrt{3}}{4}$

③



формуле афиног пресликавања f:

$O(0,0)\quad O'(6,4)$

$\vec{e_1} \xrightarrow{f} \vec{f_1}=(1,1)$

$\vec{e_2} \longrightarrow \vec{f_2}=(-1,1)$

$$f:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{array}{cc} \vec{f_1}\downarrow & \vec{f_2}\downarrow \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \end{array}}_{M} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{array}{c} O'\downarrow \\ \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\cdot \operatorname{adj} M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Инверзно пресликавање: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{X}:\ x^2 - y^2 = 1$

$f(\mathcal{X}):\ \left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 5\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 1\right)^2 = 1$

$f(\mathcal{X}):\ x'y' - 4x' - 6y' + 23 = 0$ ⇝ хипербола

Изометрије чувају дужине.

f слика квадрат ивице 2 у квадрат ивице $2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ f није изометрија

f је композиција ротације за $\frac{\pi}{4}$, хомотетије са коеф. $\sqrt{2}$ и транслације за вектор $\vec{OO'} = (6,4)$

$\Rightarrow$ f је трансформација сличности !!

4) $\Pi: x^2 - yz + 1 = 0$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ Одредимо сопствене вредности и векторе матрице M

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) = (1-\lambda)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$$

1° $\lambda = 1$ $\quad M\vec{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} 0 &= 0 \\ -y - 1/2 z &= 0 \\ -1/2 y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = z = 0$$

$\Rightarrow \vec{v} = (x, 0, 0)$

Јединични сопствени вектор је $f_1 = (1, 0, 0)$

2° $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x &= 0 \\ -\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ -\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -z \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{v} = (0, -z, z) \sim (0, -1, 1)$

Јединични сопствени вектор је $\vec{f_2} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3° $\lambda = -\frac{1}{2}$ $\quad \vec{f_3} \perp \vec{f_1}, \vec{f_2} \Rightarrow \vec{f_3}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

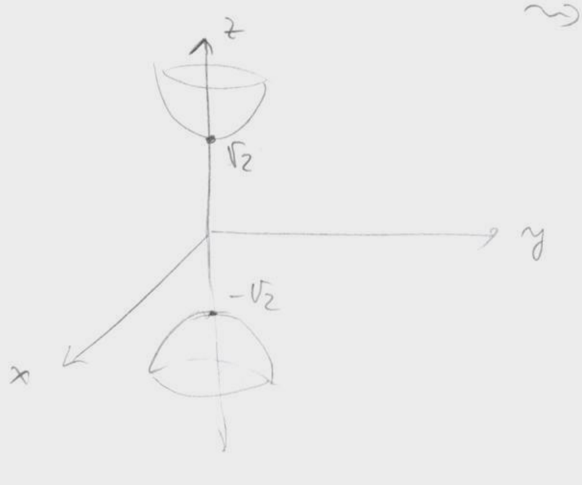
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{f_1} & \vec{f_2} & \vec{f_3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$x^2 - yz + 1 = 0$

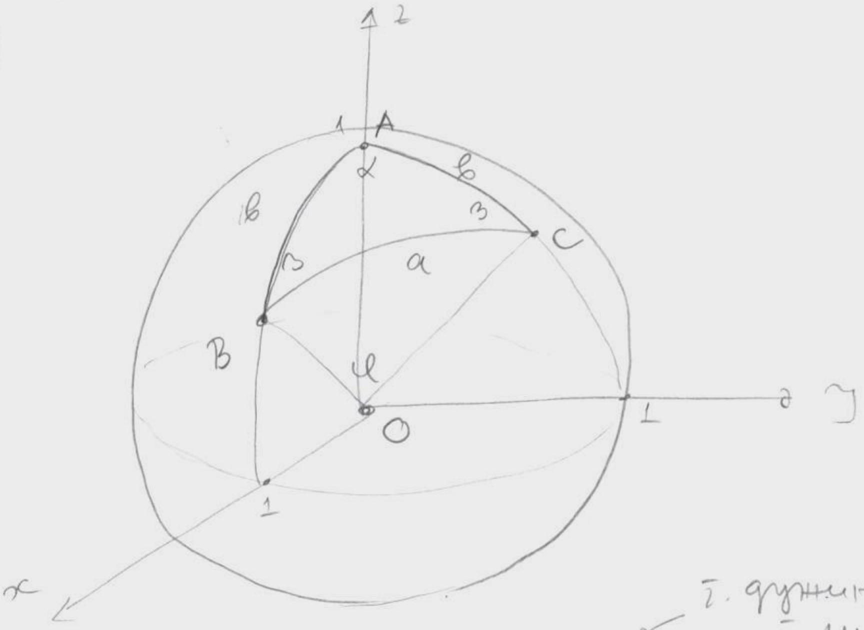
$x'^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) + 1 = 0$

$\boxed{x'^2 + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{2} = -1}$ Површ у канонском облику

$\rightsquigarrow$ Двограни хиперболоид



(5)

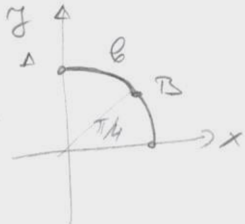


ΔABC
углови $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = ?$
ивице a, b

г. дужине
г. ширина

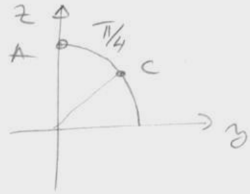
$A(0,0,1)$ северни пол $\quad A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad B\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \quad \boxed{b = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = \frac{\pi}{4}}$



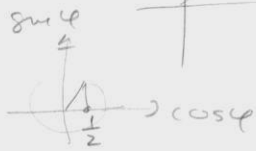
$\alpha = \frac{\pi}{2}$ је географска дужина тачке C, $\overset{\frown}{AC} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ г. шир. је $\frac{\pi}{4}$

$C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, тј. $\boxed{C\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

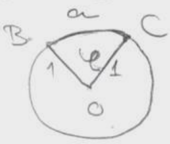


$\varphi = \measuredangle BOC$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OB} \circ \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OC}|} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$



$$\boxed{a = \overset{\frown}{BC} = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{R}} \cdot \varphi = \frac{\pi}{3}}$$



ивица сферног троугла је део великог круга који садржи тачке B и C

углови: $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{\beta = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}}$

Површине: $P = (\alpha+\beta+\beta-\pi)\cdot \overset{1}{\underset{\shortparallel}{R}} = \left(\frac{\pi}{2} + 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \pi\right) =$

$= 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{2}$

II начин за углове:

$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \sin c \cos\beta \qquad c = b = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\beta \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{4}} \cos\beta$

$\Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}}$

Домаћи: Доказати $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = \arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}$