# Одабрана поглавља геометрије Б, школска 2018/19
## Трећи домаћи задатак
## Афини простори и афина пресликавања

**1.** Доказати следеће "аксиоме" или њихове последице, при синтетичком заснивању еуклидске геометрије, у произвољном афином простору над пољем $\mathbb{R}$:

(а) За сваке три неколинеарне тачке постоји тачно једна раван која их садржи;

(б) Ако две разне равни имају заједничку тачку, онда је њихов пресек права;

(в) Ако су тачке $A, B, C$ различите и колинеарне, тада је тачно једна од њих између преостале две;

(г) Ако тачка $A$ није на правој $\Pi$, тада у њиховој равни $\Sigma = \langle A, \Pi \rangle$ постоји тачно једна права $\Gamma$ која садржи тачку $A$ и не сече праву $\Pi$.

**2.** (а) Доказати да су две разне хиперравни у афином простору димензије $n > 1$ или паралелне или се секу по потпростору димензије $n-2$.

(б) Доказати да је сваки афини потпростор димензије $k$ афиног простора димензије $n$ пресек неких $n-k$ различитих хиперравни.

**3.** Дата су два потпростора $\Pi = A + \mathbb{U}$ и $\Gamma = B + \mathbb{W}$ у афином простору са директрисом $\mathbb{V}$.

(а) Доказати да је директриса најмањег афиног потпростора који садржи $\Pi$ и $\Gamma$ (афини омотач њихове уније) $\mathbb{U} + \mathbb{W} + \mathcal{L}(\overrightarrow{AB})$. Димензија овог афиног простора једнака је $\dim \mathbb{U} + \dim \mathbb{W} - \dim(\mathbb{U} \cap \mathbb{W})$ или $\dim \mathbb{U} + \dim \mathbb{W} - \dim(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) + 1$, у зависности од тога да ли се $\Pi$ и $\Gamma$ секу или не.

(б) Уколико су потпростори $\Pi$ и $\Gamma$ суплементарни ($\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$), доказати да је њихов пресек једна тачка. Специјално, уколико је афини простор уједно и еуклидски, тада за сваку тачку $P$ постоји тачно један потпростор $\Gamma$ који је садржи и ортогоналан је на $\Pi$. Његова директриса је $\mathbb{W} = \mathbb{U}^{\perp}$, суплементаран је са $\Pi$ и сече $\Pi$ у тачно једној тачки $P'$ која представља ортогоналну пројекцију тачке $P$ на потпростор $\Pi$.

**4.** Навести примере дводимензионих равни у четвородимензионом простору $\mathbb{R}^4$ које су:

(а) паралелне и различите;

(б) делимично паралелне;

(в) мимоилазне;

(г) секу се у тачки;

(е) секу се по правој.

**5.** У афином простору $\mathcal{A}$ димензије 4 дати су скупови тачака $\Pi$ и $\Gamma$ чије координате у односу на дати афини репер $Oe$ задовољавају услове:

$$\Pi = \left.\begin{array}{ll} 2x + 5y + 2z - 6t & = 3 \\ 3x + 8y + 3z - 7t & = 7 \end{array}\right\}, \qquad \Gamma = \left.\begin{array}{ll} 4x + 2y + 3z - 6t & = 3 \\ 5x - 4y + 3z - 5t & = 2 \end{array}\right\}.$$

Доказати да су ови скупови афини потпростори простора $\mathcal{A}$, одредити њихове директрисе и испитати њихов међусобни положај.

**6.** У петодимензионом афином простору $\mathcal{A}$ дати су права $\Delta : x_1 = 2 + t$, $x_2 = -t$, $x_3 = -1 - t$, $x_4 = 1 + 2t$, $x_5 = -3t$, $t \in \mathbb{R}$ и дводимензиона раван $\Gamma : x_1 = r + 3s$, $x_2 = -1 + 4r - s$, $x_3 = -3 + r + s$, $x_4 = 4 - r + s$, $x_5 = -2 + s$, $r, s \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити узајамни положај праве $\Delta$ и равни $\Gamma$.

(б) Одредити афини потпростор $\Sigma$ најмање димензије који садржи праву $\Delta$ и раван $\Gamma$.

**7.** У петодимензионом афином простору $\mathcal{A}$ дати су афини потпростори $\Pi :\ x_1 - x_2 - x_5 + 1 = 0$, $2x_1 + x_3 + x_5 - 3 = 0$, $3x_2 - x_4 + 3x_5 - 5 = 0$ и $\Gamma :\ x_1 = 2 + t + s, x_2 = -1 - 2t, x_3 = -3s, x_4 = 4 - 2t + 3s, x_5 = 3 + s;\ t, s \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити узајамни положај потпростора $\Pi$ и $\Gamma$.

(б) Одредити једначину потпростора $\Sigma$ најмање димензије који садржи $\Pi$, паралелан је са $\Gamma$ и садржи тачку $M(1, 2, 1, 2, 0)$.

**8.** Ако су $\Pi$ и $\Gamma$ две праве у афином простору $\mathcal{A}$ и $T_{PQ}$ тежиште система тачака $(P, Q)$, доказати да је скуп $\Sigma = \{T_{PQ} : P \in \Pi, Q \in \Gamma\}$ афини потпростор паралелан са $\Pi$ и $\Gamma$ и одредити његову димензију у зависности од међусобног поожаја $\Pi$ и $\Gamma$.

**9.** Нека је $T_{PQ}$ тежиште система тачака $A$, $P$, $Q$, при чему је $A$ фиксирана тачка афиног простора $\mathcal{A}^n$, а $P$ и $Q$ припадају редом датим афиним потпросторима $\Pi$ и $\Gamma$.

(а) Доказати да је скуп $\Sigma = \{T_{PQ} \mid P \in \Pi,\ Q \in \Gamma\}$ један афини потпростор од $\mathcal{A}$ паралелан са $\Pi$ и $\Gamma$.

(б) Испитати детаљно специјалан случај $n = 3$ и $\dim \Pi = \dim \Gamma = 1$.

**10.** Дат је троугао $ABC$ у еуклидској равни. Одредити барицентричне координате:

(а) ортоцентра $H$, центра описане кружнице $O$ и тежишта $T$, па затим показати да важи $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$;

(б) центра Ојлеровог круга датог троугла.

**11.** (а) Доказати да је композиција две централне симетрије $\sigma_A \circ \sigma_B$ транслација и одредити њен вектор.

(б) Доказати да је композиција три централне симетрије $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C$ централна симетрија и одредити њен центар.

(в) Шта је композиција коначно много централних симетрија афиног простора?

**12.** (а) Доказати да је композиција хомотетије и транслације афиног простора опет хомотетија и одредити њен центар и коефицијент.

(б) Доказати да је композиција две хомотетије афиног простора хомотетија или транслација.

(в) Доказати да скуп свих хомотетија и транслација чини нормалну подгрупу афине групе.

**13.** Нека су $A$ и $B$ две фиксиране тачке афиног простора $\mathcal{A}$.

(а) Уколико је $\pi(M)$ тежиште система тачака $(A, B, M)$, доказати да је тиме дефинисано афино пресликавање $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

(б) Уколико тачка $P$ припада потпростору $\Pi$ и $T_P$ је тежиште система тачака $(A, B, P)$, доказати да је скуп $\Gamma = \{T_P : P \in \Pi\}$ један потпростор од $\mathcal{A}$ паралелан са $\Pi$.

**14.** Нека је $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ пресликавање којим се свакој тачки $M$ из $\mathcal{A}$ придружује тачка $\pi(M) = M'$ одређена са $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. Доказати да је пресликавање $\pi$ централна симетрија.

**15.** Нека су $A, B, C$ три неколинеарне тачке и $\pi$ пресликавање које произвољној тачки $M$ додељује тачку $M'$ за коју важи $\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$. Доказати да је пресликавање $\pi$ афино и одредити тип пресликавања $\pi$ у зависности од реалне константе $\alpha$.

**16.** Доказати да је пресликавање $\sigma : P \mapsto P'$ произвољног афиног простора дато са $\overrightarrow{PP'} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC}$ афино и одредити тип и компоненте пресликавања у зависности од реалних параметара $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

**17.** Нека су $A$, $B$, $C$ три фиксиране неколинеарне тачке афиног простора $\mathcal{A}^n$ и $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ реални бројеви такви да $\alpha+\beta+\gamma \neq 1$. Означимо са $M$ барицентар система тачака $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$, $(C, \gamma)$, $(M, 1)$.

(а) Доказати да је пресликавање $\sigma_{\alpha\beta\gamma} : M \to M'$ транслација или хомотетија.

(б) Представити $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ у координатама за $n = 2$. Ако су $A(0, 0)$, $B(4, 1)$, $C(2, 2)$ координате тачака у односу на дати репер афине равни, представити у координатама пресликавање $\sigma_{111}$ и скицирати путању произвољне тачке $M$.

**18.** Нека је $\sigma$ афино пресликавање афиног простора $\mathcal{A}$ такво да је за сваку тачку $M \in \mathcal{A}$, тачка $\sigma^2(M)$ средиште дужи $M\sigma(M)$.

(а) Доказати да је, за сваку тачку $M \in \mathcal{A}$, барицентар тачака $(M, 1)$, $(\sigma(M), 2)$ фиксна тачка при пресликавању $\sigma$.

(б) Одредити $\sigma$ у случају када има тачно једну фиксну тачку.

**19.** Нека је $\sigma$ недегенерисано афино пресликавање простора $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ скуп свих транслација простора $\mathcal{A}$ које комутирају са $\sigma$.

(а) Доказати да је $\mathcal{K}$ Абелова група у односу на композицију пресликавања.

(б) Ако је тачка $A$ фиксна тачка трансформације $\sigma$ и $\tau \in \mathcal{K}$, онда је $\tau(A)$ фиксна тачка за $\sigma$. Доказати.

(в) Ако су $A$ и $B$ фиксне тачке за $\sigma$, онда је транслација за вектор $\overrightarrow{AB}$ елемент скупа $\mathcal{K}$. Доказати.

**20.** Одредити формуле афине трансформације $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ у односу на дати афини репер $Oe$ афине равни $\mathcal{A}$, којом се тачка $A(1, 1)$ пресликава у тачку $A'(2, 3)$, а праве $\Pi : x - y = 2$ и $\Sigma : x + y = 0$ у праве $\Pi' : x - y = 3$ и $\Sigma' : 7x - 5y = -3$.

**21.** (а) Одредити формуле афиног пресликавања које има фиксну праву $x + y = 6$, а праве $y = 1$ и $y = 3x - 2$ слика редом у праве $x + 2y = 7$ и $2x + y = 8$. Доказати да је дато пресликавање дилатација и одредити основне компоненте.

(б) Одредити једначину елипсе која је слика круга $(x - 6)^2 + y^2 = 16$, скицирати је и одредити њену површину.

**22.** (а) Одредити формуле афине трансформације $\Phi$ у односу на репер $Oe$ афине равни која пресликава праве $a : y = 0$, $b : x = 0$ и $c : x - y = 1$ редом у праве $b$, $c$ и $a$.

(б) Трансформацијом $\Phi$ добијеном под (а) пресликати област $\mathcal{D} = \{(x,y) \mid 4x^2 - 12xy + 10y^2 + 8x - 16y + 7 < 0,\ \frac{3}{2} < y < \frac{5}{2}\}$.

**23.** (а) Одредити формуле афине трансформације $\Phi$ еуклидске равни којом се тачка $(0,0)$ слика у тачку $(2,5)$, а праве $\Delta : x - y + 1 = 0$ и $\Sigma : 5x + 4y + 5 = 0$ су фиксне.

(б) Одредити реалне коефицијенте $\alpha$, $\beta$ такве да важи $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1$, где је $\Phi_1$ дилатација са основом $\Delta$, правцем $\Sigma$ и коефицијентом $\alpha$, а $\Phi_2$ дилатација са основом $\Sigma$, правцем $\Delta$ и коефицијентом $\beta$.

(в) Одредити једначину и површину елипсе $\mathcal{E}$ која је слика круга $(x+1)^2 + y^2 = 1$ при пресликавању $\Phi$.

**24.** (а) Одредити формуле фамилије афиних пресликавања у односу на фиксирани репер $Oe$ афине равни тако да се координатне осе $Ox$ и $Oy$ пресликавају редом на праве $2x + 3y + 1 = 0$ и $x - y - 7 = 0$.

(б) Одредити међу добијеним пресликавањима она која нису афине трансформације.

(в) Доказати да је међу добијеним пресликавањима тачно једно дилатација.

**25.** (а) Одредити формуле афиног пресликавања афине равни које темена $B(-3,0)$ и $C(3,0)$ троугла $ABC$ оставља фиксним, а теме $A(1,4)$ пресликава у средиште странице $BC$.

(б) Доказати да је добијено пресликавање паралелно пројектовање, одредити основне компоненте пројектовања, као и слику круга описаног око троугла $ABC$ при овом пресликавању.

**26.** (а) Одредити формуле афине транформације $\Phi$ еуклидске равни при којој су тачке $B(5,1)$ и $C(2,4)$ фиксне и која тачку $A(1,1)$ пресликава у центар круга описаног око троугла $ABC$.

(б) Доказати да је пресликавање $\Phi$ дилатација и одредити њене компоненте и фиксне праве.

(в) Одредити једначину и површину елипсе $\mathcal{E}$ која је слика круга описаног око троугла $ABC$ при пресликавању $\Phi$.

**27.** Одредити формуле афине трансформације којом се паралелограм $ABCD$ са теменима $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(3,1)$, $D(1,1)$ слика у квадрат $ABDE$. Које је пресликавање у питању?

**28.** Одредити слику тачке $M(-2,5)$ и праве $y = 0$ при:

(а) паралелном пројектовању на праву $x + y - 1 = 0$, паралелно правој $x - 5y - 2 = 0$;

(б) афиној симетрији у односу на праву $x + y - 1 = 0$, паралелно правој $x - 5y - 2 = 0$.

**29.** Одредити формуле следећих афиних пресликавања афине равни у односу на афини репер $Oe$, као и слику круга $x^2 + y^2 = 1$:

(а) дилатације чија је основа права $y = -x$, правац права $y = x$ и коефицијент $-4$;

(б) трансвекције чија је основа права $y = -x$, којом се оса $Ox$ слика на осу $Oy$.

**30.** Нека су $A(0,2)$, $B(3,5)$, $C(-3,5)$, $D(-3,-1)$ тачке афине равни, дате својим координатама у односу на афини репер $Oe$.

(а) Доказати да је систем тачака $(A,B,C)$ једна афина база и одредити барицентричне координате произвољне тачке $M(x,y)$ у тој бази.

(б) Доказати да постоји јединствена афина трансформација $\Phi$ за коју важи $\Phi(A,B,C) = (B,C,D)$ и одредити формуле те трансформације у односу на дати репер.

**31.** Нека су $p$ и $q$ две праве у афиној равни $\mathcal{A}$ које се секу у тачки $A$.

(а) Ако је $\sigma_p$ афина симетрија у односу на праву $p$ паралелно са $q$ и $\sigma_q$ афина симетрија у односу на праву $q$ паралелно са $p$, доказати да је њихова композиција $\sigma = \sigma_p \circ \sigma_q$ централна симетрија у односу на тачку $A$.

(б) Доказати да је скуп $\mathbb{S} = \{\varepsilon, \sigma_p, \sigma_q, \sigma_A\}$ једна подгрупа афине групе и одредити њену таблицу. Која је група у питању?

**32.** Нека је $ABC$ тротеменик у афиној равни и $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ афине симетрије (дилатације са коефицијентом $-1$) чије су основе праве одређене тежишним дужима тротеменика, а правци праве одређене одговарајућим страницама тротеменика. Доказати да су сва афина пресликавања која фиксирају скуп $\{A,B,C\}$ композиције две од симетрија $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$, као и да чине подгрупу афине групе изоморфну симетричној групи $\mathbb{S}_3$.

**33.** Нека је $\pi$ паралелно пројектовање афиног простора $\mathcal{A}$ са афиним репером $Oe_1e_2e_3$, чија је основа $\Pi:\ 2x + y - z + 1 = 0$, директриса права $\Gamma = \langle G, u\rangle$, $G(-1,2,3)$, $u = 2e_1 + e_2 - e_3$, а $\eta_{S,k}$ хомотетија са центром $S(2,2,-2)$ и коефицијентом $-2$. Одредити формуле пресликавања $\pi \circ \eta_{S,k}$, а затим испитати које афино пресликавање је добијено на овај начин.

**34.** Нека је $Oe_1e_2e_3$ афини репер афиног просора $\mathcal{A}$. Одредити формуле пројектовања $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ на раван $\Pi : 2x - y + z - 2 = 0$, паралелно правој $\Gamma = \langle A, u\rangle$, где је $A(-1,0,1)$ и $u = e_1 + 2e_2 + e_3$, затим пројектовања $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ на праву $\Gamma$, паралелно равни $\Pi$ и композиције $\sigma \circ \pi$.

**35.** Одредити основне компоненте и врсту афине трансформације дате својим формулама у односу на афини репер $Oe_1e_2e_3$ афиног простора $\mathcal{A}^3$:

(а) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x' &=& 3x &+& 6y &+& 4z &-& 1, \\ y' &=& -2x &-& 5y &-& 4z &+& 1, \\ z' &=& 2x &+& 6y &+& 5z &-& 1; \end{array}$ (в) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x' &=& 5x &+& 2y &-& 2z &+& 2, \\ y' &=& -4x &-& y &+& 2z &-& 2, \\ z' &=& 8x &+& 4y &-& 3z &+& 4; \end{array}$

(б) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x' &=& 2x &+& 4y &-& 4z &+& 1, \\ y' &=& 3x &+& 6y &-& 6z &+& 2, \\ z' &=& -4x &-& 8y &-& 8z &+& 6; \end{array}$ (г) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x' &=& 7x &-& 4y &+& 8z &+& 2, \\ y' &=& 6x &-& 3y &+& 8z &+& 2, \\ z' &=& 3x &-& 2y &+& 5z &+& 1. \end{array}$

**36.** У афином простору $\mathcal{A}$ димензије 3 са афиним репером $Oe$ одредити формуле:

(а) дилатације чија је основа раван $\Pi : 2x - y + z = 2$ и која слика тачку $O$ у тачку $S(2,1,2)$;

(б) трансвекције чија је основа раван $\Pi : 2x + y + 2z - 3 = 0$ и која слика тачку $S(1,0,1)$ у тачку $S'(0,4,0)$.

**37.** У четвородимензионом афином простору дата је хиперраван $\Pi : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$ и тачка $M(3,-1,-2,-1)$. Одредити формуле:

(а) паралелног пројектовања на хиперраван $\Pi$ којим се тачка $M$ слика у тачку $M'(2,1,2,1)$;

(б) дилатације чија је основа хиперраван $\Pi$, при којој се тачка $M$ слика у тачку $M'(\frac{3}{2},2,4,2)$;

(в) трансвекције чија је основа хиперраван $\Pi$, при којој се тачка $M$ слика у тачку $M'(1,0,-3,-2)$.

**38.** У афином простору димензије 4 дати су афини потпростори $\Pi : x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0,\ x_1 + x_2 = x_4$ и $\Gamma : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - 2x_4 - 3 = 0$.

(а) Доказати да су $\Pi$ и $\Gamma$ суплементарни.

(б) Одредити формуле пројектовања на потпростор $\Pi$, паралелно са $\Gamma$, као и слику тачке $M(5,0,-3,4)$.

**39.** У четвородимензионом еуклидском простору дати су дводимензиони афини потпростори: $\Pi$ одређен тачком $P(4,5,3,2)$ и векторима $u_1 = (1,0,1,0), u_2 = (0,1,0,0)$ и $\Sigma$ одређен тачком $Q(1,-2,1,-3)$ и векторима $w_1 = (3,2,3,2), w_2 = (0,1,0,1)$.

(а) Доказати да су потпростори $\Pi$ и $\Sigma$ делимично паралелни.

(б) Израчунати растојање тачке $P$ од потпростора $\Sigma$, као и тачке $Q$ од потпростора $\Pi$.

(в) Израчунати углове између вектора $\overrightarrow{PQ}$ и потпростора $\Pi$ и $\Sigma$.

(г) Израчунати растојање између $\Pi$ и $\Sigma$, као и једначину њихове заједничке нормале.

**40.** У четвородимензионом еуклидском простору $\mathbb{E}^4$ дата је права $\Delta : x_1 = 4 + t, x_2 = 3 + 2t, x_3 = -3 - t, x_4 = 7 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$ и тачке $A(4,1,-1,-1)$, $B(-1,2,4,0)$, $C(0,3,0,-2)$.

(а) Одредити тачку $A_1$ симетричну тачки $A$ у односу на праву $\Delta$.

(б) Одредити једначину сфере чији је центар тачка $A_1$ и која садржи тежиште троугла $ABC$.

**41.** У петодимензионом еуклидском простору дате су дводимензионе равни $\Pi : x_1 = s, x_2 = t, x_3 = 0, x_4 = t, x_5 = s$, $s,t \in \mathbb{R}$ и $\Gamma : x_1 = q, x_2 = 1, x_3 = 2p, x_4 = 0, x_5 = 0,\ p,q \in \mathbb{R}$ ($\Pi : x_1 = t, x_2 = -2, x_3 = t, x_4 = s, x_5 = 0,\ t,s \in \mathbb{R}$ и $\Gamma : x_1 = 0, x_2 = p, x_3 = q, x_4 = p, x_5 = q + 1,\ p,q \in \mathbb{R}$).

(а) Доказати да су равни $\Pi$ и $\Gamma$ мимоилазне и представити их као пресек неких хиперравни.

(б) Одредити једначину праве $\Delta$ која представља њихову заједничку нормалу, а затим једначину сфере која додирује ове равни и центар јој припада правој $\Delta$.

**42.** Дате су равни $\Pi$ и $\Gamma$ и права $\Delta$ у четвородимензионом еуклидском простору својим једначинама $\Pi : x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0$, $\Gamma : x_1 + x_2 - x_3 - 3 = 0$, $\Delta : \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4}{-1}$.

(а) Одредити пресек равни $\Pi$ и $\Gamma$, као и угао диедара између њих.

(б) Одредити једначине симетралних равни диедара које образују равни $\Pi$ и $\Gamma$.

(в) Одредити једначине две сфере чији центри леже на правој $\Delta$ и које додирују равни $\Pi$ и $\Gamma$.

**43.** У четвородимензионом еуклидском простору дати су раван $\Pi : x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 15 = 0$ и права $\Gamma : x_1 = s + 2, x_2 - 2s, x_3 = -s - 1, x_4 = -s - 2,\ s \in \mathbb{R}$. Одредити једначину праве $\Delta$ која припада равни $\Pi$, са правом $\Gamma$ заклапа најмањи угао и на најмањем је растојању од координатног почетка.

**44.** У петодимензионом еуклидском простору дате су афини потпростори $\Pi :\ x_2 + x_5 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3$ и $\Gamma :\ x_1 = 2 + 2q,\ x_2 = 1 - 5p + q,\ x_3 = 1 + 2p - q,\ x_4 = 3 + 2p + 3q,\ x_5 = 2 - 5p + 3q,\ p,q \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити узајамни положај равни $\Pi$ и $\Gamma$, као и афини потпростор најмање димензије који их садржи.

(б) Одредити ортогоналну пројекцију равни $\Gamma$ на раван $\Pi$, као и димензију пројекције.

**45.** Дат је скуп тачака $A_1, \dots, A_m$ еуклидског простора $\mathbb{E}^n$ и пресликавање $f$ које свакој тачки $P$ простора придружује тачку $Q$ такву да је $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA_1} + \cdots + \overrightarrow{PA_m}$.

(а) Доказати да је $f$ хомотетија, одредити њен центар и коефицијент.

(б) Ако је $m = 3$ и тачке $A_1, A_2, A_3$ су неколинеарне, одредити криву коју описује тачка $Q$ док се тачка $P$ креће по описаном кругу троугла $A_1A_2A_3$.