Одабрана поглавља геометрије Б, школска 2018/19
Други домаћи задатак
Изометрије и сличности еуклидских простора

1. Одредити формуле следећих пресликавања еуклидске равни:

(а) ротација која слика тачке $(1,2)$ и $(\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{3}{2})$ редом у тачке $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2})$ и $(2,1)$;

(б) клизајућа рефлексија која слика тачке $(0,0)$ и $(0,1)$ редом у тачке $(1,1)$ и $(2,1)$;

(в) композиција хомотетије са центром у тачки $(2,1)$ и коефицијентом 3 и рефлексије у односу на праву $x+3y=5$;

(г) обе хомотетије које сликају круг $x^2+y^2=1$ на круг $(x-3)^2+(y-1)^2=3$.

2. Доказати да су пресликавања дата формулама у односу на ортонормирани репер Oe_1e_2 еуклидске равни изометрије или сличности и одредити њихове основне компоненте:

(а) $$\begin{aligned} x' &= -x + 2, \\ y' &= -y - 4; \end{aligned}$$

(б) $$\begin{aligned} x' &= -3x, \\ y' &= 3y - 4; \end{aligned}$$

(в) $$\begin{aligned} x' &= -\tfrac{5}{13}x - \tfrac{12}{13}y - \tfrac{14}{13}, \\ y' &= -\tfrac{12}{13}x + \tfrac{5}{13}y + \tfrac{47}{13}; \end{aligned}$$

(г) $$\begin{aligned} x' &= 5x - 12y + 8, \\ y' &= 12x + 5y - 16. \end{aligned}$$

3. Ако је Oe ортонормирани репер еуклидске равни, доказати да постоји тачно један реалан број α за који је формулама $x' = 1 + \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$, $y' = \alpha + \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y$, дефинисана једна рефлексија те равни и одредити осу те рефлексије.

4. Одредити у комплексним координатама формуле:

(а) ротације око тачке $(2,3)$ за угао $\frac{\pi}{3}$;

(б) клизајуће рефлексије у односу на праву $y = x+3$, којом се тачка $(1,6)$ слика у тачку $(5,6)$.

5. (а) Доказати да је пресликавање дато формулом $z' = i\bar{z} + (4+2i)$ у комплексним координатама изометрија и одредити јој основне компоненте.

(б) Доказати да је пресликавање дато формулом $z' = 2(-1+\sqrt{3}i)z + (4-2i)$ у комплексним координатама сличност и представити га као композицију неке транслације, хомотетије и ротације.

6. Еуклидски простор $\mathbb{E}^3$ је оријентисан својим ортонормираним репером Oe. Одредити формуле:

(а) ротације за угао $\frac{\pi}{3}$ око векторске праве (кроз координатни почетак O) која је оријентисана својим вектором правца $(1,0,1)$;

(б) завојног кретања чија је оса права $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ оријентисана својим вектором правца, угао ротације $-\frac{3\pi}{4}$ и вектор транслације $(0,-2,-2)$;

(в) осноротационе рефлексије за угао $\frac{2\pi}{3}$, чија је основа раван $2x-y+2z-3=0$ и оса права оријентисана вектором $\overrightarrow{SP}$, где је P тачка $(3,0,3)$ и S њен пресек са равни основе.

7. Еуклидски простор $\mathbb{E}^3$ је оријентисан својим ортонормираним репером Oe. Доказати да су следећим формулама у односу на тај репер одређене изометрије или сличности, одредити основне компоненте и скицирати путању произвољне тачке:

(а) $$\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{2}{3}z, \\ y' &= -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z + 1, \\ z' &= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}z + 2; \end{aligned}$$

(б) $$\begin{aligned} x' &= -x - 2y + 2z + 1, \\ y' &= -2x + 2y + z + 1, \\ z' &= 2x + y + 2z; \end{aligned}$$

(в) $$\begin{aligned} x' &= \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3}z + 3, \\ y' &= -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y + \tfrac{2}{3}z + 1, \\ z' &= \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}z + 8; \end{aligned}$$

(г) $$\begin{aligned} x' &= -4x - 8y + z + 14, \\ y' &= 4x - y + 8z + 6, \\ z' &= 7x - 4y - 4z - 8. \end{aligned}$$

8. Нека је P произвољна тачка еуклидског простора $\mathbb{E}^3$ и $\overrightarrow{OP} = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ њен вектор положаја.

(а) Доказати да се вектор $\vec{v}$ може заротирати до вектора колинеарног са вектором правца $z-$осе композицијом две ротације: око $y-$осе у негативном смеру за угао φ одређен са $\cos\varphi = \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2+v_3^2}}$, $\sin\varphi = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_3^2}}$ (након чега се добија вектор $\vec{v'}$ у $yz-$равни) и ротације око $x-$осе у позитивном смеру за угао ψ одређен са $\cos\psi = \frac{\sqrt{v_1^2+v_3^2}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$, $\sin\psi = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$. Приметимо да је φ угао између пројекције вектора $\vec{v}$ на $xz-$раван и вектора правца $z-$осе, док је ψ угао између вектора $\vec{v'}$ добијеног након прве ротације од вектора $\vec{v}$ и вектора правца $z-$осе. Приметимо да уколико тачка P већ припада $y-$оси, потребно је изоставити прву ротацију око $y-$осе.

(б) Поновити поступак из дела (а) са ротацијама редом: око $x-$осе до $xz-$равни, па око $y-$осе; око $z-$осе до $xz-$равни, па око $y-$осе.

(в) Користећи резултат из дела (а), доказати да је матрица ротације за угао α у позитивном смеру око праве кроз координатни почетак и тачку P чији је вектор правца $\vec{v}=\overrightarrow{OP}$ јединични дата са

$$\begin{pmatrix} v_1^2+(1-v_1^2)\cos\alpha & v_1v_2(1-\cos\alpha)-v_3\sin\alpha & v_1v_3(1-\cos\alpha)+v_2\sin\alpha \\ v_1v_2(1-\cos\alpha)+v_3\sin\alpha & v_2^2+(1-v_2^2)\cos\alpha & v_2v_3(1-\cos\alpha)-v_1\sin\alpha \\ v_1v_3(1-\cos\alpha)-v_2\sin\alpha & v_2v_3(1-\cos\alpha)+v_1\sin\alpha & v_3^2+(1-v_3^2)\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

9. Нека је A матрица ротације простора $\mathbb{E}^3$, са уоченим ортонормираним репером Oe, $e=[e_1,e_2,e_3]$, у односу на осу која садржи тачку O и оријентисана је јединичним вектором правца $\vec{v}=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3$, за оријентисани угао α.

(а) Доказати да је $A=E+D\sin\alpha+D^2(1-\cos\alpha)$, где је $D=\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$.

(б) Доказати да важе релације $\mathrm{tr}A=1+2\cos\alpha$, $A-A^T=2D\sin\alpha$, па на основу њих, за дату матрицу ротације A, одредити јединични вектор правца (до на знак) осе ротације и одговарајући угао ротације.

(в) Уколико вектор правца осе $\vec{v}$ није јединични, означимо са $\mu=\frac{|\vec{v}|}{\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}$ и $\lambda=|\vec{v}|^2+\mu^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2+\mu^2$, при чему подразумевамо да је $\mu=0$ за $\alpha=\pi$. Доказати да је тада матрица ротације (тзв. Ојлерова матрица придружена реалном броју μ и вектору $\vec{v}\neq 0$)

$$\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \mu^2+v_1^2-v_2^2-v_3^2 & 2(v_1v_2-v_3\mu) & 2(v_1v_3+v_2\mu) \\ 2(v_1v_2+v_3\mu) & \mu^2+v_2^2-v_1^2-v_3^2 & 2(v_2v_3-v_1\mu) \\ 2(v_1v_3-v_2\mu) & 2(v_2v_3+v_1\mu) & \mu^2+v_3^2-v_1^2-v_2^2 \end{pmatrix}.$$

Приметимо да се добијена матрица не мења уколико сваки од бројева v_1,v_2,v_3,μ помножимо истим скаларом различитим од нуле. Упоредити добијену матрицу са матрицом добијеном у делу (а), као и са матрицом добијеном у претходном задатку.

10. Нека је q јединични кватернион различит од нуле и $C_q:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ пресликавање дефинисано са $C_q(p)=qpq^{-1}$ (конјугација).

(а) Доказати да су конјугације $C_{q'}$ и $C_{q''}$ иста пресликавања акко је $q'=\pm q''$.

(б) Доказати да је конјугација изометрија простора $\mathbb{H}$, као и простора чистих кватерниона $\mathrm{Im}\mathbb{H}\cong\mathbb{R}^3$. Уколико је $q=[\cos\frac{\alpha}{2},\vec{v}\sin\frac{\alpha}{2}]$ и $|\vec{v}|=1$, пресликавање C_q је ротација простора $\mathbb{R}^3$ за угао α око јединичног вектора $\vec{v}$ у позитивном смеру.

(в) Означимо са $R_q:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ и $L_q:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ редом десно и лево множење кватернионом q, тј. $R_q(p)=pq$, $L_q(p)=qp$. Доказати да је $C_q=L_q\circ R_{\overline{q}}=R_{\overline{q}}\circ L_q$, па на основу матрица левог и десног множења у бази $e=[1,i,j,k]$ доказати да је матрица конјугације C_q дата са

$$[C_q]_e=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2(y^2+z^2) & 2(xt-wz) & 2(xz+yw) \\ 0 & 2(xy+zw) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-xw) \\ 0 & 2(xz-yw) & 2(yz+xw) & 1-2(x^2+y^2) \end{pmatrix},$$

где је $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ јединични вектор, $q=w+xi+yj+zk=\cos\frac{\alpha}{2}+v_1\sin\frac{\alpha}{2}i+v_2\sin\frac{\alpha}{2}j+v_3\sin\frac{\alpha}{2}k$. Упоредити добијену матрицу са матрицама добијеним у претходна два задатка.

(г) Уколико је $\vec{v}\perp p$, доказати да је $C_q(p)=qpq^{-1}=\tilde{q}p$, где је $q=\cos\frac{\alpha}{2}+v_1\sin\frac{\alpha}{2}i+v_2\sin\frac{\alpha}{2}j+v_3\sin\frac{\alpha}{2}k$, а $\tilde{q}=\cos\alpha+v_1\sin\alpha i+v_2\sin\alpha j+v_3\sin\alpha k$. Дакле, у овом случају је довољно једно множење кватерниона да бисмо одредили слику дате тачке при векторској ротацији.

11. Користећи кватернионе одредити слику тачке $(2,0,0)$ при ротацији еуклидског простора $\mathbb{E}^3$:

(а) око $z-$осе за угао π, па за угао $\frac{\pi}{4}$;

(б) око праве $\frac{x}{1}=y=\frac{z}{1}$ за угао π, па за угао $\frac{\pi}{2}$.

12. Еуклидски простор $\mathbb{E}^3$ оријентисан је својом канонском базом $Oe_1e_2e_3$. Одредити матрицу векторске ротације за угао $\frac{\pi}{2}$ око праве оријентисане својим вектором $c=(p,q,r)$. Посебно размотрити случај $c=(1,2,2)$, користећи:

(а) ротације око координатних оса;

(б) промену базе;

(в) кватернионе.

13. Еуклидски простор $\mathbb{E}^3$ оријентисан је својом канонском базом $Oe_1e_2e_3$. Доказати да је датом матрицом A одређена једна векторска ротација и одредити њену осу и одговарајући угао у односу на једну од оријентација те осе, уколико је:

(а) $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$; (б) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; (в) $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

14. Нека су σ и π рефлексије еуклидског простора $\mathbb{E}^3$ у односу на његове векторске равни $\mathbb{U} : y-z = 0$ и $\mathbb{W} : x-2y+z = 0$, редом.

(а) Одредити матрице пресликавања σ, π, $\pi \circ \sigma$.

(б) Доказати да је матрица A пресликавања $\pi \circ \sigma$ матрица једне ротације око векторске праве која се добија у пресеку равни $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$, одредити јој угао и упоредити га са углом између равни $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$.

15. Одредити све парове реалних бројева (a, b) за које је формулама

$$\begin{array}{ccccccc} x' & = & ax & + & by & + & bz, \\ y' & = & bx & + & ay & + & bz, \\ z' & = & bx & + & by & + & az, \end{array}$$

одређена једна ротација еуклидског векторског простора $\mathbb{R}^3$.

16. Одредити формуле афине трансформације еуклидског простора $\mathbb{E}^3$ која представља композицију хомотетије са центром у тачки $A(1, 0, 2)$ и коефицијентом 2, раванске рефлексије у односу на раван $\Pi : x+2y-z+3 = 0$ и хомотетије са центром у тачки $B(2, -3, -4)$ и коефицијентом $\frac{1}{2}$. Одредити затим слику сфере $x^2 + y^2 + 2y + z^2 - 2z = -1$ при овој трансформацији.

17. У четвородимензионом еуклидском простору задата је дводимензиона раван $\Pi : x_1 + x_2 = 1, x_3 + x_4 = 0$. Одредити формуле:

(а) нормалне пројекције на раван Π;

(б) симетрије у односу на раван Π.

18. У четвородимензионом еуклидском простору $\mathbb{E}^4$ дата је права $\Delta : x_1 = t, x_2 = 1 + t, x_3 = -2 + t, x_4 = -t,\ t \in \mathbb{R}$, раван $\Pi : 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$ и тачка $S(1, 2, -1, 0)$.

(а) Одредити формуле афине трансформације τ која представља композицију централне симетрије са центром у тачки S и симетрије у односу на праву Δ.

(б) Одредити формуле афине трансформације σ која представља композицију хомотетије са центром у тачки S и коефицијентом -2 и рефлексије у односу на раван Π.

(в) Доказати да су трансформације τ, σ сличности простора $\mathbb{E}^4$ и одредити центар и коефицијент тих сличности. Да ли су композиције из (а), (б) канонска разлагања ових сличности?

19. Нека је $\Pi = P + \mathbb{U}$ хиперраван у еуклидском простору $\mathbb{E}^k$ са директрисом $\mathbb{V}$ и $\vec{n}$ неки њен јединични вектор нормале (тада ја $\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathcal{L}(\vec{n})$) и M произвољна тачка.

(а) Доказати да су ортогонална пројекција M_0 тачке M и тачка M_1 симетрична са M у односу на Π редом одређене са $\overrightarrow{PM_0} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PM} \circ \vec{n}$, $\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PM} - 2\overrightarrow{PM} \circ \vec{n}$.

(б) Уколико је у односу на неки ортонормирани репер Oe хиперраван Π дата својом једначином $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = b$ и тачка $M(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, тада је растојање тачке M хиперравни Π дато формулом

$$\frac{|a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_km_k - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2}}.$$

20. (а) Доказати да је скуп свих изометрија датог еуклидског простора које фиксирају дати скуп Π (не обавезно тачка-по-тачка) једна подгрупа групе свих изометрија тог простора.

(б) Доказати да за сваку коначну групу неких изометрија еуклидског простора постоји бар једна тачка коју фиксирају све изометрије из те групе.