Одабрана поглавља геометрије Б, школска 2018/19
Први домаћи задатак
(примена комплексних бројева у планиметрији)

1. Скицирати скуп тачака у комплексној равни које су дате условом:

(а) $\arg \frac{z-1}{z+1} = -\frac{\pi}{2}$;

(б) $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$;

(в) $|2z| \geqslant |1 + z^2|$.

2. (а) Нека се A и B две разне тачке и $k > 0$, $k \neq 1$, дати реалан број. Доказати да је скуп тачака M чији је однос растојања од датих тачака A и B једнак k једна кружница и одредити центар и полупречник. Овај круг се назива Аполонијев круг.

(б) Уколико је $k = 1$, посматрани скуп је симетрала дужи AB. Одредити њену једначину.

3. Доказати да у сваком четвороуглу $ABCD$ важи неједнакост $AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC$, при чему једнакост важи ако и само ако су тачке A, B, C, D на правој или кружници и тачке A и C, односно B и D нису суседне. Ова неједнакост је у литератури позната као Птоломејева неједнакост, а случај једнакости се често назива Птоломејева теорема.

4. Сваки од наредних примера решити на два начина: прво користећи само алгебарски облик комплексног броја, а затим и користећи формуле за ротацију око тачке у комплексној равни за дати угао.

(а) Дати су комплексни бројеви $z_1 = -2 + 2i$, $z_2 = 3 + i$. Одредити све комплексне бројеве z_2 такве да је троугао чија су темена $z_1 z_2 z_3$ једнакостраничан.

(б) Дати су комплексни бројеви $z_1 = 1+i$, $z_3 = -1+i\sqrt{3}$. Одредити комплексне бројеве z_2, z_4 такве да је четвороугао одређен тачкама $z_1 z_2 z_3 z_4$ квадрат чија су темена z_1, z_3 наспрамна.

(в) Дати су комплексни бројеви $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 2i$. Одредити комплексне бројеве z_3, z_4 такве да је четвороугао одређен тачкама $z_1 z_2 z_3 z_4$ квадрат чија су темена z_1, z_2 суседна.

(г) Нека у комплексној равни теменима ромба $ABCD$ одговарају тачке a, b, c, d, где је $b = 3 + i$, $d = 1 - 3i$ и важи $AC = 2BD$. Одредити a и c.

5. (а) Нека су a, b, c координате темена троугла у комплексној равни. Доказати да је троугао ABC једнакостраничан акко је $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, при чему је и позитивно оријентисан акко је $a + b\omega + c\omega^2 = 0$, а негативно оријентисан акко је $a\omega^2 + b\omega + c = 0$, где је $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(б) Нека комплексни бројеви z_1, z_2, z_3 имају једнаке модуле и нека образују темена једнакостраничног троугла. Доказати да бројеви $z_1 z_2, z_2 z_3, z_3 z_1$ образују такође темена једнакостраничног троугла.

6. У равни су дате две кружнице k_1 и k_2. Нека је A једна њихова пресечна тачка. По кружницама се крећу муве M_1 и M_2 константним брзинама, свака увек у истом смеру, тако да увек пролазе кроз тачку A у истим моментима времена. Доказати да постоји непокретна тачка P у равни кружница која је у сваком тренутку подједнако удаљена од мува M_1 и M_2.

7. Са исте стране дужи PQ конструисани су међусобно слични и исто оријентисани троуглови KPQ, QLP, PQM (подразумевамо да је редослед темена одговарајући). Доказати да је троугао KLM такође сличан и исто оријентисан са конструисаним троугловима.

8. Над страницама AB, BC, CD, DA четвороугла $ABCD$ у његовој спољашњости конструисани су квадрати чији су центри тачке O_1, O_2, O_3, O_4. Означимо са E, F, G, H средишта дужи O_1O_3, BD, O_2O_4, AC.

(а) Доказати да су дужи O_1O_3 и O_2O_4 међусобно нормалне и подударне.

(б) Доказати да је четвороугао $EFGH$ квадрат.

9. Над страницама AB, BC, CD, DA четвороугла $ABCD$ у његовој спољашњости конструисани су једнакостранични троуглови ABA_1, BCB_1, CDC_1, DAD_1, чији су центри тачке O_1, O_2, O_3, O_4. Означимо са P, Q, R средишта дужи B_1C_1, C_1D_1, AB, редом.

(а) Доказати да је троугао PQR једнакостраничан.

(б) Уколико додатно важи једнакост $AC = BD$, доказати да су праве O_1O_3 и O_2O_4 нормалне међусобно.

10. Одредити координате центра описане кружнице, уписане кружнице, тежишта и ортоцентра троугла у комплексној равни чија су темена тачке $a = 1 + i$, $b = 5 + i$, $c = 2 + 4i$.

11. (а) Доказати да су координате центра описане кружнице и ортоцентра троугла OAB комплексне равни (O је координатни почетак) дати са

$$o = \frac{ab(\overline{a}-\overline{b})}{\overline{a}b - a\overline{b}}, \qquad h = \frac{(\overline{a}b + a\overline{b})(a-b)}{a\overline{b} - \overline{a}b}.$$

(б) Нека се дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу у тачки O. Означимо са T_1 и T_2 тежишта троуглова AOD и BOC, а са H_1 и H_2 ортоцентре троуглова AOB и COD. Доказати да су праве T_1T_2 и H_1H_2 међусобно нормалне.

12. (а) Означимо са A_1, B_1, C_1 тачке у којима тангенте описане кружнице троугла ABC секу праве BC, CA, AB, редом. Доказати да су тачке A_1, B_1, C_1 колинеарне.

(б) Означимо са A_2, B_2, C_2 тачке у којима тангенте описане кружнице троугла ABC секу средње линије троугла паралелне страницама BC, CA, AB, редом. Доказати да су тачке A_2, B_2, C_2 колинеарне, као и да је права њима одређена нормална на Ојлерову праву троугла ABC.

13. (а) Нека тачке A, B, C, D припадају јединичној кружници комплексне равни са центром у координатном почетку. Доказати да се праве одређене тетивама AB и CD секу акко је $ab \neq cd$, као и да пресечна тачка има координате

$$\frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}.$$

(а) Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао. Праве AB и CD секу се у тачки E, праве AD и BC у тачки F и праве AC и BD у тачки G. Доказати да је центар описаног круга четвороугла O ортоцентар троугла EFG. Ово тврђење се назива Брокарова теорема.

14. Нека је D произвољна тачка на кружници описаној око троугла ABC, а A', B', C' подножја нормала из тачке D на правама BC, AC, AB редом.

(а) Доказати да су тачке A', B', C' колинеарне. Права одређена њима зове се Симсонова права тачке D у односу на троугао ABC.

(б) Доказати да Симсонова права тачке D полови дуж HD, где је H ортоцентар троугла ABC, као и да је паралелна правама AA'', BB'', CC'', где су A'', B'', C'' друге тачке пресека описане кружнице троугла и правих DA', DB', DC'.

(в) Доказати да пресек Симсонових правих тачке A у односу на троугао BCD и тачке B у односу на троугао ACD припада правој одређеној тачком C и ортоцентром троугла ABD.

(г) Доказати да се Симсонове праве тачака A, B, C, D у односу на троуглове BCD, ACD, ABD, ABC секу у једној тачки. Уколико означимо ту тачку са P, одредити геометријско место тачака P када се тачка D шета по описаној кружници троугла ABC.

(д) Уколико је E такође тачка са кружнице описане око троугла ABC, доказати да је угао између Симсонових правих тачака D и E у односу на троугао ABC једнак половини централног угла тетиве DE.

15. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао. Означимо са H_A, H_B, H_C, H_D редом ортоцентре троуглова BCD, ACD, ABD, ABC; са T_A, T_B, T_C, T_D њихова тежишта и са E_A, E_B, E_C, E_D центре њихових Ојлерових кругова.

(а) Доказати да се нормале из средишта страница четвороугла на праву одређену наспрамном страницом секу у једној тачки. Означимо ту тачку са E. У литератури је њен најчешћи назив антицентар четвороугла $ABCD$.

(б) Нека је T тежиште четвороугла $ABCD$, а O центар описане кружнице. Доказати да је $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$, тј. да је T средиште дужи OE.

(в) Доказати да је T уједно и тежиште четвороугла $T_AT_BT_CT_D$, као и да се хомотетијом са центром T и коефицијентом $-\frac{1}{3}$ четвороугао $ABCD$ слика на четвороугао $T_AT_BT_CT_D$. Специјално, ови четвороуглови су слични.

(г) Доказати да се централном симетријом у односу на тачку E четвороугао $ABCD$ слика на четвороугао $H_AH_BH_CH_D$. Специјално, ови четвороуглови су подударни.

(д) Доказати да се Ојлерови кругови разматраних троуглова секу у антицентру E, као и да се хомотетијом са центром F и коефицијентом $-\frac{1}{2}$ четвороугао $ABCD$ слика на четвороугао $E_AE_BE_CE_D$, где је F тачка за коју важи $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OE}$. Специјално, ови четвороуглови су слични.

16. (а) Нека уписани круг троугла ABC додирује странице троугла BC, CA, AB редом у тачкама P, Q, R. Уколико уписана кружница има центар у координатном почетку и јединични полупречник, доказати да су координате центра описане кружнице и ортоцентра троугла ABC дате са

$$o = \frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(p+r)}, \qquad h = \frac{2(p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 + pqr(p+q+r))}{(p+q)(q+r)(p+r)}.$$

(б) Уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F, а X, Y, Z су редом средишта страница EF, FD, DE. Доказати да центар уписаног круга припада правој одређеној центрима кругова описаних око троуглова ABC и XYZ.

17. Дат је тангентни четвороугао $ABCD$ чији уписани круг са центром S додирује странице AB, BC, CD, AD редом у тачкама M, N, P, Q.

(а) Доказати да су средишта дијагонала AC, BD и тачка S колинеарне.

(б) Доказати да су праве AC, BD, MP, NQ конкурентне. Ово тврђење се назива Њутнова теорема.

(в) Доказати да су праве AC, MN, PQ конкурентне. Уколико је њихов пресек тачка K, доказати да је $KS \perp BD$.

18. Доказати да су површине P_1 оријентисаног троугла ABC, односно P_2 четвороугла $ABCD$, уписаних у јединичну кружницу са центром у координатном почетку дате формулама

$$P_1 = \frac{i}{4}\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}, \qquad P_2 = \frac{1}{4i}\frac{(a-c)(b-d)(ac-bd)}{abcd}.$$

19. (а) Доказати да за површину оријентисаног конвексног многоугла $A_1A_2\cdots A_n$ важи формула

$$\frac{1}{2}\mathrm{Im}(a_1\overline{a_2} + a_2\overline{a_3} + \ldots + a_{n-1}\overline{a_n} + a_n\overline{a_1}).$$

(б) Нека су $B_1, B_2, \ldots, B_n$ средишта страница $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ конвексног многоугла $A_1A_2\ldots A_n$. Доказати да је површина многоугла $B_1B_2\ldots B_n$ не мања од половине површине многоугла $A_1A_2\ldots A_n$.

20. (а) Нека је $A_1A_2\ldots A_n$ правилан многоугао чији је центар тачка O и M произвољна тачка. Доказати да је збир квадрата растојања тачке M до темена многоугла једнак $n(OM^2 + R^2)$, где је R полупречник описаног круга многоугла. Специјално, уколико је тачка M са описане кружнице датог многоугла, важи да је збир квадрата растојања тачке M до темена многоугла једнак $2nR^2$.

(б) Доказати да је збир квадрата растојања произвољне тачке M са описане кружнице датог правилног $2n-$тоугла $A_1A_2\ldots A_{2n-1}A_{2n}$ до темена са парним индексима једнак збиру квадрата растојања до темена са непарним индексима.

(в) Нека су $d_1, d_2, d_{2n-1}, d_{2n}$ растојања произвољне тачке M са описане кружнице датог правилног $2n-$тоугла $A_1A_2\ldots A_{2n-1}A_{2n}$ до правих одређених страницама $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2n-1}A_{2n}, A_{2n}A_1$. Доказати да је $d_1 \cdot d_3 \cdots d_{2n-1} = d_2 \cdot d_4 \cdots d_{2n}$.