ГЕОМЕТРИЈА 3
задаци за рад на вежбама и самостални рад студената

Криве

1. Параметризовати елипсу, хиперболу и параболу дате:

(а) у канонском облику у Декартовом координатном систему;

(б) у поларном координатном систему чији је центар нека жижа криве другог реда, а оса се поклапа са осом криве која садржи жижу.

2. (а) Одредити неку параметризовану криву чији траг представља скуп свих тачака у равни које се добијају као траг фиксиране тачке на растојању d од центра диска полупречника r који се котрља без клизања по равној подлози. Скицирати.

(б) Испитати регуларност те криве у зависности од тога да ли је $d < r$, $d > r$ или $d = r$.

3. Дата је астроида својом једначином у Декартовим координатама $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

(а) Одредити неку параметризацију дате криве и доказати да њен траг представља трајекторију фиксиране тачке кружнице полупречника $\frac{a}{4}$ који се котрља без клизања изнутра по непокретном кругу полупречника a. Скицирати.

(б) Доказати да је дужина одсечка тангентне линије астроиде одређеног координатним осама константна.

(в) Одредити неку параметризовану криву на сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ чија је ортогонална пројекција на xOy-раван дата крива.

4. Дата је кардиоида својом поларном једначином $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$.

(а) Доказати да је дата крива затворена и израчунати њену дужину.

(б) Доказати да траг ове криве представља трајекторију фиксиране тачке кружнниче полупречника $\frac{a}{2}$ који се котрља без клизања споља по непокретном кругу полупречника $\frac{a}{2}$. Скицирати.

5. Дата је Архимедова спирала својом поларном једначином $\rho = a\theta$ $(a \neq 0)$.

(а) Доказати да дата крива представља трајекторију тачке која се креће константном брзином по полуправој са почетком у координатном почетку, која ротира константном угаоном брзином око координатног почетка.

(б) Одредити неку параметризовану криву на конусу $x^2 + y^2 = a^2 z^2$ чија је ортогонална пројекција на xOy-раван дата крива.

6. Дата је логаритамска спирала својом поларном једначином $\rho = ca^\theta$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0)$.

(а) Доказати да је угао између вектора положаја и тангенте логаритамске спирале константан.

(б) Одредити природну параметризацију дате криве узимајући за почетну тачку координатни почетак. Образложити зашто је то могуће.

(в) Доказати да су криве $\rho_1 = c_1 a^\theta$ и $\rho_2 = c_2 a^\theta$ $(c_1 \neq c_2)$ подударне међусобно.

7. (домаћи) Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих тачака у координатној равни које задовољавају услов да је производ растојања од тачака $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ једнак b^2 $(a, b > 0)$.

(а) Доказати да поларне координате тачака скупа $\mathcal{S}$ задовољавају једначину $\rho^4 - 2a^2\rho^2\cos(2\theta) = b^4 - a^4$. Скицирати скуп $\mathcal{S}$ за $a < b$, $a = b$, $a > b$.

(б) Уколико је $a = b = 1$, доказати да је $\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sqrt{2}\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)$, $t \in (0, 2\pi)$, једна параметризована крива чији је траг скуп $\mathcal{S}$ (без једне тачке), са самопресеком у координатном почетку.

(в) Одредити једначине оскулатпрних кругова и тангенти криве γ у координатном почетку.

8. Дата је ланчаница као график функције $y = a\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, $a > 0$.

(а) Параметризовати дату криву на два начина - тако да јој означена кривина буде позитивна, а затим негативна. Одредити Френеов репер обе те параметризоване криве.

(б) Одредити геометријско место тачака (тј. њену инволуту) које описује фиксирана тачка праве која се лепи за ланчаницу без клизања, са почетком у тачки $(0, a)$.

9. Дата је трактриса $\beta(t) = 2(\cos t + \ln(\mathrm{tg}(\frac{t}{2})), \sin t)$, $t \in (0, \pi)$.

(а) Доказати да је одсечак тангенте дате криве одређен тачком криве и пресеком са $x-$осом константне дужине.

(б) Доказати да је $\gamma(s) = \begin{cases} (2e^{-\frac{s}{2}}, \int\limits_0^s \sqrt{1-e^{-t}}dt), & s \geqslant 0 \\ (2e^{\frac{s}{2}}, \int\limits_0^s \sqrt{1-e^{t}}dt), & s \leqslant 0 \end{cases}$ једна природна репараметризација дате криве.

(в) Одредити геометријско место центара оскулаторних кругова дате криве (тј. њену еволуту).

10. Дат је кружни хеликс $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $b \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити Френеов репер, кривину и торзију ове криве. Израчунати углове које координатне равни Френеовог репера образују са $z-$осом.

(б) Одредити параметризоване криве на јединичној сфери коју описују тангентно/нормално/бинормално векторско поље дате криве транслирани у координатни почетак.

(в) Одредити параметризоване криве чији је траг на фиксираном растојању d од кружног хеликса дуж његових тангентних/нормалних/бинормалних линија.

11. Нека је α просторна крива која представља скуп решења једначине у цилиндричним координатама $z = \rho = e^{2\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити параметризацију криве α, доказати да крива припада конусу $z = \sqrt{x^2+y^2}$ и скицирати је. Која крива је пројекција криве α на $xy-$раван?

(б) Одредити природну параметризацију криве узимајући за почетну тачку врх конуса (образложити зашто је то могуће).

(в) Одредити Френеов репер, кривину и торзију криве. Написати Френе-Сереове формуле у тачки $(0, e^{\pi}, e^{\pi})$ користећи добијене вредности.

(г) Одредити једначине оскулаторне, ректификационе и нормалне равни криве у тачки $(0, e^{\pi}, e^{\pi})$.

12. Дата је регуларна раванска крива α и тачке P и Q ван ње. Нека је M_0 тачка криве у којој збир растојања $PM+QM$, $M \in \alpha$, достиже минимум. Доказати да је симетрала угла $\measuredangle PM_0Q$ нормална на тангенту криве α у тачки M_0.

13. (а) Доказати да постоји јединствено векторско поље $X(t)$ (Дарбуово векторско поље) дуж криве $\alpha = \alpha(t)$ параметризоване произвољним параметром, за које важи: $T' = X \times T$, $N' = X \times N$, $B' = X \times B$.

(б) Одредити Дарбуов вектор кружног хеликса.

14. Доказати да за природно параметризовану криву важи:

(а) $[B', B'', B'''] = \tau^5(\frac{\kappa}{\tau})'$, $\kappa, \tau \neq 0$;

(б) (домаћи) $[T', T'', T'''] = \kappa^5(\frac{\tau}{\kappa})'$, $\kappa \neq 0$.

15. Одредити параметризацију раванске криве (до на директну изометријску трансформацију равни) чија је дата означена кривина у зависности од природног параметра s и доказати да је у питању назначена крива:

(а) $\kappa_z(s) = \frac{1}{as+b}$ $(a \neq 0)$ - логаритамска спирала;

(б) $\kappa_z(s) = \frac{a}{a^2+s^2}$ $(a \neq 0)$ - ланчаница;

(в) $\kappa_z(s) = \frac{1}{\sqrt{as}}$ $(a > 0)$ - кружна инволута.

16. (а) Доказати да је слика криве $\alpha(t) = (\sqrt{2}\cos t + \sin t + 1, -\sqrt{2}\sin t + 2, -\sqrt{2}\cos t + \sin t + 3)$, $t \in \mathbb{R}$, кружница. Одредити раван и неку сферу у чијем пресеку лежи слика дате криве.

(б) Доказати да је слика криве $\beta(t) = (5\cos t, 3\cos t - 4\sin t, 4\cos t + 3\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, елипса. Одредити раван и неки елипсоид у чијем пресеку лежи слика дате криве.

17. Дата је параметризована крива $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ са $\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}), & t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0), & t < 0 \\ (0,0,0), & t = 0 \end{cases}$.

(а) Испитати регуларност дате криве и израчунати њену кривину. У којим тачкама је кривина једнака 0?

(б) Израчунати торзију дате криве у свим тачкама. Да ли је крива раванска?

18. (а) Ако све тангентне линије регуларне криве садрже фиксну тачку, тада слика те криве припада некој правој. Доказати.

(б) Ако све нормалне линије регуларне криве садрже фиксну тачку, тада слика те криве припада некој кругу. Доказати.

19. (а) Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $0 \in I$, $\kappa \neq 0$, природно параметризована крива. Доказати да је $[X - \alpha(0), \alpha'(0), \alpha''(0)] \equiv 0$, $X = (x, y, z)$, једначина оскулаторне равни у тачки $\alpha(0)$.

(б) Доказати да се све оскулаторне равни неке регуларне криве са кривином различитом од нуле садрже фиксну тачку акко је та крива раванска.

20. (а) Нека је $\alpha(t)$, $t \in I$, регуларна крива. Доказати да је $\alpha(t)$ сферна крива ако и само ако постоји $c \in \mathbb{R}^3$ тако да је $(\alpha(t) - c) \perp T(t)$ за свако $t \in I$.

(б) Доказати да све нормалне равни неке регуларне криве са кривином различитом од нуле садрже фиксну тачку акко је та крива сферна.

21. Нека је α природно параметризована крива која припада сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

(а) Изразити вектор положаја тачака криве α у Френеовој бази те криве.

(б) Доказати да за кривину κ и торзију $\tau \neq 0$ криве α важи $\tau^2(R^2 - \frac{1}{\kappa^2}) = (\frac{\kappa'}{\kappa^2})^2$. Специјално, важи $\kappa \geqslant \frac{1}{R}$.

(в) Доказати да је вектор убрзања дате криве α супротан вектору положаја тачке са криве ако и само ако је крива део великог круга.

22. Уопштена завојна линија (хеликс) је просторна крива чији тангентни вектор заклапа константан угао $\theta \in (0, \pi)$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, са фиксираним ненула вектором $v \in \mathbb{R}^3$. Уопштени хеликс лежи на цилиндру чије су изводнице одређене правцем v и тачкама криве. Доказати да је крива уопштена завојна линија акко важи један од услова:

(а) нормале су нормалне на v;

(б) бинормале граде константан угао са v;

(в) $\frac{\kappa}{\tau} = \mathrm{const}$.

23. Доказати да је дата крива уопштени хеликс, одредити фиксиран вектор v и угао θ између вектора v и тангенте криве γ у произвољној тачки, као и једначину цилиндра на коме лежи та крива:

(а) $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, $t \in \mathbb{R}$;

(б) $\gamma(t) = (\mathrm{ch} t, \mathrm{sh} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

24. Еволута регуларне природно параметризоване криве $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ је крива $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ дефинисана у тачкама где је $\kappa(s) \neq 0$, дата са $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N(s)$, а њена инволута је крива $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ дата са $\gamma(s) = \alpha(s) + (c - s)T(s)$, $c \in I$. Испитати регуларност и одредити означену кривину, кривину и Френеов репер кривих β и γ преко одговарајућих величина криве α.

25. Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива, кривине различите од нуле, таква да вектор положаја сваке тачке $\alpha(s)$ лежи у ректификационој равни криве у тој тачки (тзв. ректификациона крива).

(а) Доказати да је однос торзије и кривине дате криве линеарна функција по природном параметру s.

(б) Уколико је $\beta : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{S}^2$ природно параметризована сферна крива, доказати да је крива $\alpha : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ дата са $\alpha(s) = \frac{1}{\cos s} \beta(s)$ ректификациона крива.