

Писмени испит из Диференцијалних једначина А (В смер), 14.1.2019.

1. У просторији температуре  $30^{\circ}\text{C}$  температура кафе у шољи је  $60^{\circ}\text{C}$ . Након пет минута температура кафе у шољи је  $55^{\circ}\text{C}$ . Користећи Њутнов закон хлађења одредити колико ће минута температура кафе бити између  $45^{\circ}\text{C}$  и  $60^{\circ}\text{C}$ ?

2. Нека је дата диференцијална једначина  $y' = y - y^2 + e^{2x}$ .

а) Не решавајући диференцијалну једначину показати да за свако решење једначине које задовољава услов  $y(0) = a$ , где је  $a \in (-1, 1)$ , важи да је  $-e^x < y(x) < e^x$ ;

б) решити диференцијалну једначину;

в) одредити решење које задовољава услов  $y(0) = 0$  и наћи максимални интервал на коме је дефинисано то решење.

3. Нека је  $L(y) = y^{(4)} - 4y^{(3)} + 7y'' - 12y' + 12y$ .

а) Одредити сва решења  $\varphi(x)$  једначине  $L(y) = 0$  која не теже ка бесконачности када  $x \rightarrow +\infty$ ;

б) одредити број нула нетривијалног решења  $\varphi(x)$  из дела а) на сегменту  $[0, 2019]$ ;

в) формирати линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима најнижег могућег реда чија су сва решења облика  $\varphi(x)$  из дела а);

г) да ли за произвољну линеарну диференцијалну једначину у стандардном облику чији су коефицијенти непрекидне функције на  $(a, b)$ , а која је истог реда као једначина из дела в), постоји решење које је осцилаторно на неком сегменту  $[\alpha, \beta]$ , где је  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ ? Ако постоји такво решење навести га, а ако не постоји, доказати да не постоји;

д) решити диференцијалну једначину  $L(y) = 2 \cos(x) \cos(3x)$ .

4. Решити диференцијалну једначину  $y''y - y'^2 = y^2 \left( \sqrt{x^2 - \frac{y'}{y}} + 2x \right)$ .

Писмени испит из Диференцијалних једначина А (В смер), 14.1.2019.

1. У просторији температуре  $30^{\circ}\text{C}$  температура кафе у шољи је  $60^{\circ}\text{C}$ . Након пет минута температура кафе у шољи је  $55^{\circ}\text{C}$ . Користећи Њутнов закон хлађења одредити колико ће минута температура кафе бити између  $45^{\circ}\text{C}$  и  $60^{\circ}\text{C}$ ?

2. Нека је дата диференцијална једначина  $y' = y - y^2 + e^{2x}$ .

а) Не решавајући диференцијалну једначину показати да за свако решење једначине које задовољава услов  $y(0) = a$ , где је  $a \in (-1, 1)$ , важи да је  $-e^x < y(x) < e^x$ ;

б) решити диференцијалну једначину;

в) одредити решење које задовољава услов  $y(0) = 0$  и наћи максимални интервал на коме је дефинисано то решење.

3. Нека је  $L(y) = y^{(4)} - 4y^{(3)} + 7y'' - 12y' + 12y$ .

а) Одредити сва решења  $\varphi(x)$  једначине  $L(y) = 0$  која не теже ка бесконачности када  $x \rightarrow +\infty$ ;

б) одредити број нула нетривијалног решења  $\varphi(x)$  из дела а) на сегменту  $[0, 2019]$ ;

в) формирати линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима најнижег могућег реда чија су сва решења облика  $\varphi(x)$  из дела а);

г) да ли за произвољну линеарну диференцијалну једначину у стандардном облику чији су коефицијенти непрекидне функције на  $(a, b)$ , а која је истог реда као једначина из дела в), постоји решење које је осцилаторно на неком сегменту  $[\alpha, \beta]$ , где је  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ ? Ако постоји такво решење навести га, а ако не постоји, доказати да не постоји;

д) решити диференцијалну једначину  $L(y) = 2 \cos(x) \cos(3x)$ .

4. Решити диференцијалну једначину  $y''y - y'^2 = y^2 \left( \sqrt{x^2 - \frac{y'}{y}} + 2x \right)$ .