Писмени испит из Диференцијалних једначина А, 3.6.2021.

1. Две шоље топлог чаја познатих почетних температура $T_1(0) = T_2(0) = T_0$ су остављене да се хладе на собној температури T_∞ (таквој да важи $T_\infty < T_0$). Прва шоља се остави недирнута и промена њене температуре $T_1(t)$ у времену се може моделирати Њутновим законом хлађења

$$\frac{dT_1}{dt} = -a(T_1(t) - T_\infty),$$

где је $a > 0$ дата константа која зависи од структуре шоље и геометрије поставке. У другу шољу се од тренутка $t = \frac{1}{a}$ почне сипати вода константном брзином која је све топлија и топлија (линеарно са временом) и промена њене температуре $T_2(t)$ у времену (за $t \neq \frac{1}{a}$) се може моделирати као

$$\frac{dT_2}{dt} = -a(T_2(t) - T_\infty) + tH\left(t - \frac{1}{a}\right),$$

где је са H означена Хевисајдова функција

$$H(x) = \begin{cases} 1\,, \ x \geqslant 0; \\ 0\,, \ x > 0. \end{cases}$$

а) Одредити температуре чаја у обе шоље, $T_1(t)$ и $T_2(t)$ за време $t \geqslant 0$, претпостављајући да је температура непрекидна функција од времена. Претпоставити да су константе T_0, T_∞ и a познате.

б) Описати шта се дешава са овим температурама када $t \to \infty$.

2. Решити диференцијалну једначину $yy'' = y'^2 + \dfrac{xy^3}{2y'} + \dfrac{y'y}{2x} + \dfrac{y^3}{2xy'}$.

3. Нека су $a(t)$ и $b(t)$ непрекидне функције на $\mathbb{R}$ и нека је дата диференцијална једначина

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0.$$

Нека су $x_1(t)$ и $x_2(t)$ два решења једначине које задовољавају почетне услове $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ и $x_2'(0) = 7$.

а) Доказати да су функције x_1 и x_2 пропорционалне односно да постоји $c \in \mathbb{R}$ такво да је $x_1(t) = c \cdot x_2(t)$.

б) Ако је $a(t) = -t$ и $b(t) = -2$ одредити x_1.