Први колоквијум из Анализе 2а за Л смер

група А

1. Нека су на скупу X задате метрике d_1 и d_2 такве да је $d_1(x,y) \leqslant 2\,d_2(x,y)$ за све $x,y \in X$. Доказати да важи:

а) Ако је B_1 отворена кугла у простору (X,d_1), а B_2 отворена кугла у (X,d_2), онда је за свако $x \in X$ и за свако $\varepsilon > 0$ $B_2(x;\frac{\varepsilon}{2}) \subset B_1(x;\varepsilon)$.

б) Ако је $A \subset X$ отворен у простору (X,d_1), онда је A отворен и у простору (X,d_2).

в) Ако је (X,d_2) повезан метрички простор, онда је то и (X,d_1).

2. Доказати да је скуп $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+2y^2+z^2 \leqslant 5-z^4\}$ компактан у простору $\mathbb{R}^3$ са еуклидском метриком d_2.

3. Нека је $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

а) Испитати непрекидност функције f на $\mathbb{R}^2$.

б) Испитати диференцијабилност функције f на $\mathbb{R}^2$.

в) Одредити извод функције f у правцу произвољног јединичног вектора $\overrightarrow{v}$ у тачки $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

4. Одредити u'_x, u'_y и u'_z ако је $u = f\left(x, \dfrac{y}{x}, \dfrac{xz}{y}\right)$, где је f диференцијабилна функција на $\mathbb{R}^3$.

Први колоквијум из Анализе 2а за Л смер

група А

1. Нека су на скупу X задате метрике d_1 и d_2 такве да је $d_1(x,y) \leqslant 2\,d_2(x,y)$ за све $x,y \in X$. Доказати да важи:

а) Ако је B_1 отворена кугла у простору (X,d_1), а B_2 отворена кугла у (X,d_2), онда је за свако $x \in X$ и за свако $\varepsilon > 0$ $B_2(x;\frac{\varepsilon}{2}) \subset B_1(x;\varepsilon)$.

б) Ако је $A \subset X$ отворен у простору (X,d_1), онда је A отворен и у простору (X,d_2).

в) Ако је (X,d_2) повезан метрички простор, онда је то и (X,d_1).

2. Доказати да је скуп $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+2y^2+z^2 \leqslant 5-z^4\}$ компактан у простору $\mathbb{R}^3$ са еуклидском метриком d_2.

3. Нека је $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

а) Испитати непрекидност функције f на $\mathbb{R}^2$.

б) Испитати диференцијабилност функције f на $\mathbb{R}^2$.

в) Одредити извод функције f у правцу произвољног јединичног вектора $\overrightarrow{v}$ у тачки $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

4. Одредити u'_x, u'_y и u'_z ако је $u = f\left(x, \dfrac{y}{x}, \dfrac{xz}{y}\right)$, где је f диференцијабилна функција на $\mathbb{R}^3$.