Увод у комплексну анализу - поправни колоквијум, 16.01.2013.

Презиме и име, група ____________________________________

1. Скицирати скуп $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| \dfrac{z+2}{z-2i} \right| > 1 \right\}$.

2. Навести пример функције која:

а) има пребројиво много чисто имагинарних нула ________

б) је $\mathbb{C}$-диференцијабилна само у тачки $z = 3i$ ________

в) не задовољава Коши-Риманове услове ни у једној тачки. ________

3. Функција $f(z) = (\mathrm{Im} z)^2 + i(\mathrm{Re} z)^2$ непрекидна је на скупу ____________, $\mathbb{C}$-диференцијабилна на скупу ____________ и аналитичка на скупу ____________.

4. **а)** Пресликавање $f(z) = e^z - z$ је конформно на $\mathbb{C}$. **Т Н**

б) Скуп $\{z^2 \,|\, z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant 3, 0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2}\}$ је компактан у $\mathbb{C}$. **Т Н**

в) Мебијусове трансформације су бијекције на $\overline{\mathbb{C}}$. **Т Н**

г) $\mathbb{C}$ је векторски простор димензије 2 над $\mathbb{C}$. **Т Н**

д) Функција Жуковског је "1-1" на горњој полуравни. **Т Н**

5. Одредити билинеарно пресликавање B тако да је $B(i) = 0$, $B(-i) = \infty$ и $B(0) = -1$, затим пресликати $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z > 0\}$.

6. Одредити бар једну аналитичку функцију $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ чији је реални део $u(x, y) = x^2 - y^2$.

---

1. Функцију $f(z) = \dfrac{1}{3z + 4i}$ представити Тејлоровим редом у диску са центром у $z = 2i$ и назначити где важи развој.

2. **а)** Интеграл целе функције по произвољној дужи је нула.**Т Н**

б) Ако се две аналитичке функције на области D поклапају у пребројиво много тачака, онда су оне идентички једнаке на скупу D. **Т Н**

в) Ако је функција анлитичка у тачки, онда је она бесконачно диференцијабилна у тој тачки. **Т Н**

г) Функција $f(z) = \sin \dfrac{z}{z+1}$ има есенцијални сингуларитет у тачки $z = -1$.**Т Н**

3. Одредити све сингуларитете функције $f(z) = \dfrac{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} z)}{z^2 + 3z + 2}$, као и њихову врсту.

4. Израчунати интеграл функције $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-5i}}}{(z-2)(z+3)}$ по позитивно оријентисаној контури:

а) $|z| = 4$;

б) $|z| = 1$.

5. Решити једначину $\sin z = 2$.

6. Израчунати интеграл $\int\limits_{\gamma} (z^3 + iz + 2\overline{z}) \mathrm{d}z$, где је γ негативно оријентисана кружница са центром у $z = 1$ полупречника $R = 3$.