Метрички простори

1. Нека је M коначан скуп и $\mathcal{P}(M)$ партитивни скуп од M. Нека је $d(A,B) = \mathbf{card}(A \triangle B)$, за све $A, B \in \mathcal{P}(M)$. Доказати да је d метрика.

2. Нека је функција $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |x_1 - x_2|, & y_1 = y_2 \\ |x_1 - x_2| + 2, & y_1 \neq y_2 \end{cases}.$$

(а) Доказати да је d метрика на $\mathbb{R}^2$.

(б) Доказати да је скуп $A(t) = (-1,1) \times \{t\}$ отворен за свако $t \in \mathbb{R}$.

(в) Да ли је скуп $(-1,1) \times [-1,1]$ отворен?

3. Одредити унутрашњост, скуп тачака нагомилавања, затворење и руб следећих скупова (подразумевају се стандардне метрике на назначеним скуповима):

(а) $[0,5) \cup \{6\}$ у $\mathbb{R}$;

(б) $\{\frac{1}{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$ у $\mathbb{R}$;

4. Нека је функција $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$d(m,n) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, & m \neq n \\ 0, & m = n \end{cases}.$$

(а) Доказати да је d метрика на $\mathbb{N}$.

(б) Описати куглу са центром у 3 и полупречником $\dfrac{7}{6}$.

(в) Одредити све Кошијеве низове у метричком простору $(\mathbb{N}, d)$. Да ли је дати простор комплетан?

5. Дате су функције $d_1, d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са $d_1(x,y) = |x-y|$, $d_2(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$.

(а) Доказати да је функција d_2 метрика на скупу $\mathbb{R}$ (d_1 је стандардна метрика на $\mathbb{R}$).

(б) Ако је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев у метричком простору $(\mathbb{R}, d_1)$, доказати да је Кошијев и у метричком простору $(\mathbb{R}, d_2)$.

(в) Доказати да је низ $x_n = n$ Кошијев у $(\mathbb{R}, d_2)$, али није у $(\mathbb{R}, d_1)$ (тј. не важи обрат тврђења (б)).

6. Нека је $(C[0,1], d)$ метрички простор реалних непрекидних функција на $[0,1]$ са метриком

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Нека је $A = \{f_\alpha \in C[0,1] \mid f_\alpha(x) = \alpha x, \alpha \in [0,1]\}$.

(а) Доказати да је A компактан у $(C[0,1], d)$.

(б) Израчунати $d(f, A)$, ако је $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$.

7. (а) Доказати да је скуп $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \leqslant 2019\}$ компактан у простору $\mathbb{R}^2$ са еуклидском метриком.

(б) Показати да $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant \frac{1}{x}, x > 0\}$ није компактан у простору $\mathbb{R}^2$ са еуклидском метриком. Да ли је комплетан?

8. Дато је пресликавање $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ са $f(x) = \log(1+x)$.

(а) Доказати да важи неједнакост $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$.

(б) Да ли функција f испуњава услове Банаховог става (метрика на $[0,+\infty)$ је стандардна)?

(в) Да ли функција f има непокретну тачку?

9. Доказати да постоји јединствена непрекидна функција $f \in C[0,1]$ која задовољава једначину $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos\left(\frac{f(t)}{2}\right) dt$.

10. Доказати да је метрички простор (M,d) повезан ако и само ако су $\emptyset$ и M једини истовремено отворени и затворени скупови.

11. Нека су на скупу X задате метрике d_1 и d_2 такве да је $d_1(x,y) \leqslant 2d_2(x,y)$ за све $x, y \in X$.

(а) Ако је B_1 отворена кугла у простору (X, d_1), а B_2 отворена кугла у (X, d_2), онда за свако $x \in X$ и за свако $\varepsilon > 0$ важи $B_2(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B_1(x, \varepsilon)$.

(б) Ако је $A \subseteq X$ отворен у простору (X, d_1), онда је A отворен и у простору (X, d_2).

(в) Ако је (X, d_2) повезан метрички простор, онда је то и (X, d_1).