Колоквијум из Анализе 3б **20.5.2012.**

1. Нека је $X = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \mid \alpha_i \in \mathbb{C},\ \alpha_i = 0$ за све осим коначно много $i \in \mathbb{N}\}$ простор са нормом $||(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)|| = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |\alpha_i|$. Нека је оператор $T : X \to X$ задат на следећи начин:

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \ldots).$$

1) Доказати да је T добро дефинисан ограничен линеарни оператор и одредити $||T||$.

2) Доказати да је оператор T "1-1".

3) Нека је $S : X \to X$ задат са:

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \ldots, \ldots).$$

Испитати да ли је S ограничен.

4) Доказати да је оператор S инверзан оператору T и објаснити како је то могуће, имајући у виду Банахову теорему о хомеоморфизму.

2. Нека је $f : C[-1, 1] \to \mathbb{C}$ дефинисан са $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\mathrm{d}t - \frac{x(-1) + x(0) + x(1)}{3}$. Доказати да је f ограничени линеарни функционал и наћи $||f||$.

3. Испитати слабу и јаку конвергенцију низа вектора $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где је $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$ у простору $l^p(\mathbb{N})$ за $1 < p < +\infty$.