Писмени испит из Анализе 1а, други, трећи и четврти ток **27. јануар 2011.**

1. Нека је реалан низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \frac{-x_n}{2+{x_n}^2}$ за $n \geqslant 1$.

а) Доказати да су подниз парних и подниз непарних чланова низа $(x_n)_{n\geqslant 1}$ монотони.

б) Испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n\geqslant 1}$ и у случају конвергенције наћи му граничну вредност.

2. Израчунати $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt[5]{1+x^2} - \sin(\sin x) - \frac{8}{15}x^3}{xe^{x^2} - x(1+x^2)}$.

3. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = (x + \frac{1}{2})\ln(1 + \frac{1}{x})$.

4. Нека је $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ диференцијабилна функција и нека је $|f'(x)| < 1$. Доказати да једначина $f(x) = x$ има јединствено решење.

5. Нека је дат низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ за који важи $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

а) Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$.

б) Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{a_n}}{\sqrt{n}}$.

Напомена: Бодују се задаци 1, 2 и 3, као и један од задатака 4 или 5.

Писмени испит из Анализе 1а, други, трећи и четврти ток **27. јануар 2011.**

1. Нека је реалан низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са $x_1 < 0$ и $x_{n+1} = \frac{-x_n}{2+{x_n}^2}$ за $n \geqslant 1$.

а) Доказати да су подниз парних и подниз непарних чланова низа $(x_n)_{n\geqslant 1}$ монотони.

б) Испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n\geqslant 1}$ и у случају конвергенције наћи му граничну вредност.

2. Израчунати $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[5]{1+x^2} + \frac{8}{15}x^3}{xe^{x^2} - x(1+x^2)}$.

3. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = (\frac{1}{2} - x)\ln(1 - \frac{1}{x})$.

4. Нека је $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ диференцијабилна функција и нека је $|f'(x)| < 1$. Доказати да једначина $f(x) = x$ има јединствено решење.

5. Нека је дат низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ за који важи $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

а) Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$.

б) Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{a_n}}{\sqrt{n}}$.

Напомена: Бодују се задаци 1, 2 и 3, као и један од задатака 4 или 5.