Задаци за вежбу из Анализе 1

1. Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) следећих скупова:

а) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \dfrac{-x^2+2x-3}{x^2-4x+3} < 3\right\}$

б) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle|\ |x + \dfrac{1}{x} - 4| \leqslant 2\right\}$

в) $C = \{x \in \mathbb{R}|\ \log_x 32 > 5\}$

г) $D = \left\{x \in \mathbb{R}|\ \log_{\frac{1}{3}}\left(\log_4\left(x^2-5\right)\right) > 0\right\}$

д) $E = \left\{x \in \mathbb{R}|\ 2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leqslant 9\right\}$.

2. Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) следећих скупова:

а) $A = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n} \middle|\ n \in \mathbb{N}\right\}$

б) $B = \left\{n^{\frac{(-1)^n}{n}} \middle|\ n \in \mathbb{N}\right\}$

в)$C = \left\{2 + \dfrac{3}{n} \middle|\ n \in \mathbb{N}\right\}$

г)$D = \left\{\dfrac{n+1}{2n+3} \middle|\ n \in \mathbb{N}\right\}$

д)$E = \left\{\dfrac{n^2+3n+2}{n+1} \middle|\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. Доказати да је $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

4. Доказати да је $n! \geqslant 2^n$ за $n \geqslant 4$.

5. Доказати да је:

1) $4^{n+1} + 6n + 5$ дељив са 9
2) $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ дељив са 17
3) $30^n + 12^n - 8^n - 1$ дељив са 11.

6. Израчунати $\frac{1}{1\cdot4} + \frac{1}{4\cdot7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$.

7. Решити следеће диференцне једначине:

а) $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, за $n \geqslant 2$, $a_1 = 5$ и $a_2 = 7$.
б) $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$, $x_0 = 2$ и $x_1 = 5$.
в) $2x_{n+1} - x_n = 1$, за $n \geqslant 0$ и $x_0 = 2$.
г) $x_{n+1} = \frac{1-4x_n}{1-6x_n}$, за $n \geqslant 1$ и $x_1 = \frac{3}{5}$.

8. Нека је популација бактерија n сати од почетка експеримента x_n милиграма. Претпоставимо да је на почетку било 4 мг бактерија и да се количина бактерија сваког сата повећава за 25%. Поставити диференцну једначину за овај проблем, решити је, а затим одредити количину бактерија после 15 сати.

9.* Одредити вредност детерминанте $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 \end{vmatrix}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

10.* Популација чинчила у Аустралији повећа се сваке године за 3%, али их 6 буде продато модној индустрији због крзна. Са a_n означимо број чинчила након n година и нека их тренутно има 350.

1) Одредити диференцну једначину која описује понашање ове популације.
2) Решити диференцну једначину из дела (1) и одредити број чинчила након 15 година.
3) Да ли ће се популација чинчила икада удвостручити? Ако да, колико година ће бити потребно за то?
4) Модна индустрија захтева да купи 15 чинчила сваке године, због повећане потражње њиховог крзна. Да ли би одлука да се ово одобри довела до изумирања чинчила у Аустралији? Ако да, након колико година?

11.* Израчунати збир $T_n = 1 + 3q + 5q^2 + \ldots + (2n+1)q^n$.