Увод у комплексну анализу - писмени испит **18.1.2013.**

1. Нека је f аналитичка функција на области D. Доказати следећа тврђења:

а) Ако је реални део функције f константан на D, онда је и f константна на D.

б) Ако је $|f|$ константна функција на D, онда је и f константна на D.

в) Слика области D при неконстантном пресликавању f не може бити ни права ни кружница.

Решење: $f = u + iv$ је аналитичка, па важе $C - R$ услови на области D. Како је u константна, то су парцијални изводи по x и по y нула. Из ова два податка добијамо да су и парцијални изводи v такође нула. Закључујемо да је v константна, а самим тим је и f константна. За део под б) само применимо $C - R$ услове у поларном облику. Део в) је примена претходног. Претпоставимо да је слика права. Онда бисмо могли да заротрамо и транслирамо праву до поклапања са имагинарном осом. Таква композиција је аналитичка функција чији је реални део нула, па пресликавање мора бити константно. Контрадикција. Слично, ако је слика круг, можемо га транслирати тако да му центар буде у координатном почетку и извести контрадикцију на основу дела б). Овај задатак може се урадити на више начина, још један би био користећи теорему о отвореном пресликавању.

2. Одредити Мебијусову трансформацију B која јединичну кружницу K_1 слика на кружницу $K_2 = \{w \in \mathbb{C} \,|\, |w-i| = 1\}$ и за коју је $B(0) = \dfrac{i}{2}$ и $B(1) = 0$. Пресликати затим доњу полураван пресликавањем B.

Решење: Имамо у шта се сликају две тачке. Ако одредимо слику и неке треће тачке, можемо добити формулу пресликавања (помоћу оне "велике" формуле). Тачке $z = 0$ и $z = \infty$ су симетричне у односу на јединичну кружницу. Онда су и њихове слике симетричне у односу на слику јединичне кружнице, тј. у односу на кружницу K_2. Дакле, треба одредити тачку симетричну тачки $z = \frac{i}{2}$ у односу на K_2. То ће бити тачка $z = -i$ (нпр. транслирамо до јединичног круга, нађемо симетричну, па вратимо назад: $\dfrac{1}{\overline{(\frac{i}{2} - i)}} + i$). Када све ово заменимо у формулу, добијемо да је $B(z) = -i\dfrac{z-1}{z+2}$. Слика задате области је полураван $\mathrm{Re}z < 0$.

3. Функцију $f(z) = \dfrac{1 + iz}{2 + z + 2z^2 + z^3}$ представити Лорановим редом који конвергира у тачки $z = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}i$.

Решење: Треба развити функцију на прстену $1 < |z| < 2$. Прво треба раставити полином у имениоцу. $2 + z + 2z^2 + z^3 = (2+z)(1+z^2) = (2+z)(1+iz)(1-iz)$, па је $f(z) = \dfrac{1}{(2+z)(1-iz)} = \dfrac{A}{2+z} + \dfrac{B}{1-iz}$. Стандардно се одређују тражене константе. Још је можда згодно написати $1 - iz = -i(i+z)$. Надаље све као на вежбама.

4. Нека је $a \neq 2$ позитивна константа и C_a кружница полупречника a са центром у координатном почетку, оријентисана позитивно. Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_{C_a} \frac{z^2 + e^z}{z^2(z-2)}\mathrm{d}z$.

Решење: Дати интеграл једнак је "$2\pi i$ пута сума резидума унутар контуре". Када је $a < 2$, онда је само сингуларитет $z = 0$ унутар контуре, док је за $a > 2$ и $z = 2$ унутра. Тачка $z = 0$ је пол другог реда, а $z = 2$ првог. Добије се да је $I = -\dfrac{3\pi i}{2}$ за $a < 2$, а $I = \pi i\dfrac{e^2 + 1}{2}$ за $a > 2$.

5. Израчунати интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 7x - \cos 5x}{x^2}\mathrm{d}x$.

Решење: Подинтегрална функција је парна, па је $I = 2\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 7x - \cos 5x}{x^2}\mathrm{d}x$. Како је лимес подинтегралне функције када се приближавамо нули једнак $-12 < \infty$, то је $x = 0$ отклоњиви сингуларитет, тј. није проблем. Даље, ако се померимо од нуле, подинтегрална функција је ограничена са $\dfrac{2}{x^2}$, а $\displaystyle\int\limits_1^{\infty} \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x < \infty$. Закључак је да дати интеграл конвергира, тј. његова вредност је неки коначан РЕАЛАН број. Грешка би била раздвојити дати интеграл на разлику два, јер $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 7x}{x^2}\mathrm{d}x$ и $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 5x}{x^2}\mathrm{d}x$ засебно дивергирају!! Уводимо функцију $g(z) = \dfrac{e^{7iz} - e^{5iz}}{z^2}$. Правимо стандардну контуру ("полупрстен"). Бирамо ϵ и R тако да за $|z| > R$ и $|z| < \epsilon$ нема сингуларитета функције g. Како унутар ове контуре нема сингуларитета, то је $\displaystyle\int\limits_{C_{\epsilon,R}} g(z)\mathrm{d}z = 0$. Са друге стране, $\displaystyle\int\limits_{C_{\epsilon,R}} g(z)\mathrm{d}z$ једнак је збиру 4 интеграла (по луку γ_ϵ, луку γ_R и по дужима од $-R$ до $-\epsilon$ и од ϵ до R). Интеграл по луку γ_R једнак је нули на основу треће Жорданове леме. Интеграл по луку γ_ϵ једнак је 2π, користећи прву Жорданову лему и чињеницу да је лимес када z тежи нули од функције $zg(z)$ једнак $2i$. Дакле, $I = 2\pi$.

6. Нека је f аналитичка на затвореном јединичном диску. Доказати да постоји $n \in \mathbb{N}$ такав да је $f\left(\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n+1}$.

Решење: Претпоставимо супротно, тј. да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи да је $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$. Ако ставимо да је $z_n = \frac{1}{n}$, онда имамо да је $f(z_n) = \frac{z_n}{z_n+1}$. Даље, дефинишимо функцију $g(z) = \frac{z}{z+1}$. Видимо да се f и g поклапају на скупу који има тачку нагомилавања (то је тачка $z = 0$) која припада скупу $D = \{z | |z| < 1\}$. По теореми јединости важи да је $f \equiv g$ на D. Како је f аналитичка, то је и непрекидна, па је $\lim\limits_{z \to -1} f(z) = f(-1) = \lim\limits_{z \to -1} \frac{z}{z+1} = \infty$. Контрадикција.

Напомена: Студент бира 5 од 6 задатака.