ТМИ - писмени испит

1. Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = m([a,x] \cap E)$, где је $E \subset [a,b]$ ограничен m-мерљив скуп (m је Лебегова мера). Доказати да је f непрекидна неопадајућа функција.

2. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^{\infty} \dfrac{n^{k+1} \cdot x^k \cdot e^{-nx}}{1+x^k} \mathrm{d}x$, ако је $a \geqslant 0$ и $k \in \mathbb{N}$.

3. Нека је (X,μ) простор са мером, при чему је $\mu(X) = 1$. Ако је $f : X \to [-1,+\infty]$, доказати да је $||f||_2 \leqslant \left(\dfrac{4 + \int_X f^3 \mathrm{d}\mu}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

4. Доказати да је са $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^{\pi} [x(t)\overline{y(t)} + x'(t)\overline{y'(t)}]\mathrm{d}t$ дефинисан један скаларни производ на простору непрекидно-диференцијабилних функција на $[0,\pi]$. Одредити угао између вектора t и $\sin t$ у овом простору.

ТМИ - писмени испит

1. Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = m([a,x] \cap E)$, где је $E \subset [a,b]$ ограничен m-мерљив скуп (m је Лебегова мера). Доказати да је f непрекидна неопадајућа функција.

2. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^{\infty} \dfrac{n^{k+1} \cdot x^k \cdot e^{-nx}}{1+x^k} \mathrm{d}x$, ако је $a \geqslant 0$ и $k \in \mathbb{N}$.

3. Нека је (X,μ) простор са мером, при чему је $\mu(X) = 1$. Ако је $f : X \to [-1,+\infty]$, доказати да је $||f||_2 \leqslant \left(\dfrac{4 + \int_X f^3 \mathrm{d}\mu}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

4. Доказати да је са $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^{\pi} [x(t)\overline{y(t)} + x'(t)\overline{y'(t)}]\mathrm{d}t$ дефинисан један скаларни производ на простору непрекидно-диференцијабилних функција на $[0,\pi]$. Одредити угао између вектора t и $\sin t$ у овом простору.

ТМИ - писмени испит

1. Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = m([a,x] \cap E)$, где је $E \subset [a,b]$ ограничен m-мерљив скуп (m је Лебегова мера). Доказати да је f непрекидна неопадајућа функција.

2. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^{\infty} \dfrac{n^{k+1} \cdot x^k \cdot e^{-nx}}{1+x^k} \mathrm{d}x$, ако је $a \geqslant 0$ и $k \in \mathbb{N}$.

3. Нека је (X,μ) простор са мером, при чему је $\mu(X) = 1$. Ако је $f : X \to [-1,+\infty]$, доказати да је $||f||_2 \leqslant \left(\dfrac{4 + \int_X f^3 \mathrm{d}\mu}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

4. Доказати да је са $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^{\pi} [x(t)\overline{y(t)} + x'(t)\overline{y'(t)}]\mathrm{d}t$ дефинисан један скаларни производ на простору непрекидно-диференцијабилних функција на $[0,\pi]$. Одредити угао између вектора t и $\sin t$ у овом простору.