ТМИ - ЈУЛ

1. Нека је $I=(a,b)$ фиксиран интервал и $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:

(1) Тачка $x=0\in I$.

(2) $m(f^{-1}(I))=+\infty$ за произвољну функцију $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

2. Доказати да важи једнакост $\displaystyle\int\limits_0^1 \sin x\ln x\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n(2n)!}$.

3. Нека је $f\in L^p(0,1)$, за $p>1$. Ако је $\alpha<3-\frac{1}{p}$ доказати да је $\frac{1-\cos x}{x^\alpha}f(x)\in L^1(0,1)$.

4. Нека је H Хилбертов простор и $\{e_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ ортонормиран систем вектора. Нека је $A=\{(1+\frac{1}{n})e_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ и $B=\{(1+\frac{1}{n+1})e_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$.

а) Доказати да су скупови A и B ограничени и дисјунктни.

б) Доказати да за $x,y\in A$ важи $||x-y||\geq\sqrt{2}$.

в) Доказати да су сви конвергентни низови у A константни почевши од неког члана, па извести закључак да је A затворен. Аналогно за B.

г) Доказати да је растојање између ова два скупа једнако нули, тј. $d(A,B)=0$.

ТМИ - ЈУЛ

1. Нека је $I=(a,b)$ фиксиран интервал и $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:

(1) Тачка $x=0\in I$.

(2) $m(f^{-1}(I))=+\infty$ за произвољну функцију $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

2. Доказати да важи једнакост $\displaystyle\int\limits_0^1 \sin x\ln x\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n(2n)!}$.

3. Нека је $f\in L^p(0,1)$, за $p>1$. Ако је $\alpha<3-\frac{1}{p}$ доказати да је $\frac{1-\cos x}{x^\alpha}f(x)\in L^1(0,1)$.

4. Нека је H Хилбертов простор и $\{e_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ ортонормиран систем вектора. Нека је $A=\{(1+\frac{1}{n})e_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ и $B=\{(1+\frac{1}{n+1})e_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$.

а) Доказати да су скупови A и B ограничени и дисјунктни.

б) Доказати да за $x,y\in A$ важи $||x-y||\geq\sqrt{2}$.

в) Доказати да су сви конвергентни низови у A константни почевши од неког члана, па извести закључак да је A затворен. Аналогно за B.

г) Доказати да је растојање између ова два скупа једнако нули, тј. $d(A,B)=0$.